

## LA CONICIDAD DE LOS ARBOLES Y ALGUNAS POSIBLES APLICACIONES EN EL MANEJO DE BOSQUES

HUBERTO GONZALEZ PEREZ \*

### RESUMEN

*La descripción de la conicidad de los árboles se plantea como una herramienta tecnológica de gran utilidad en el manejo de bosques. Se analizan tanto algunos factores del árbol y del rodal que afectan la conicidad de los árboles, como la utilización de la técnica de las "spline" cúbicas para la descripción del perfil y el cálculo del volumen del árbol individual. Se describe una metodología para determinar ecuaciones de volumen a partir de la aplicación de la técnica de las "spline" cúbicas y se propone un modelo simple de conicidad deducido de interpretaciones geométricas del comportamiento de la conicidad de árboles excurrentes. Se presentan algunos resultados experimentales haciendo especial referencia al ciprés (*Cupressus lusitanica*) una especie de gran interés en los programas de reforestación en la región andina de Colombia.*

*Palabras claves: Conicidad, "spline" cúbica, determinación del volumen, ciprés, *Cupressus lusitanica*.*

### ABSTRACT

#### TAPER EQUATIONS OF TREE SPECIES AND THEIR APPLICATIONS IN FOREST MANAGEMENT

*Taper equations of tree species are quite usefull for forest management purposes. The taper of the forest trees is a function*

\* Profesor asociado. Departamento de Ciencias Forestales. Facultad de Ciencias Agropecuarias. Universidad Nacional de Colombia, Seccional Medellín, A. A. 568.

*of several factors related with the species and the stand. Some of those factors are analyzed in this paper in conjunction with the use of the spline cubic technique for describing the species profile and the volume calculation for the individual trees.*

*Starting from the spline cubic equations it is described a methodology for finding the volume equations and, additionally, it is proposed a simple tape model derived from the relation between the geometry of the excurrent trees and the tape changes along the log.*

*Experimental results are presented, mainly with data collected from cypress stands (Cupressus lusitanica), a specie of great importance for the plantation programs of the andean region of Colombia.*

*Key words: Taper, spline cubic, volume calculation, cypress tree, Cupressus lusitanica.*

## INTRODUCCION

El concepto de conicidad hace referencia a la cuantificación del hecho evidente de la disminución del diámetro del fuste desde la base hasta el ápice del árbol. En este sentido la conicidad se puede cuantificar y calificar a partir de la determinación de la tasa de conicidad, definida como la tasa de variación del diámetro por unidad de longitud entre dos puntos del fuste, o por medio de la relación entre los diámetros entre esos mismos puntos; o, se puede describir a través de modelos matemáticos que definen el diámetro en cualquier punto del fuste como una función de la distancia desde ese punto hasta la base.

Aunque las teorías que intentan explicar las causas de la conicidad de los árboles se encuentran en un estado relativamente incipiente de desarrollo, todas las que se han planteado reconocen que existen factores del árbol y del rodal que producen variaciones significativas de la conicidad. La identificación y evaluación del efecto de estos factores reviste una marcada importancia en el diseño de sistemas silviculturales.

Por otro lado, la descripción matemática de la conicidad de los árboles constituye una valiosa herramienta tanto para el manejo, como para la valoración de bosques, ya que permite la derivación de ecuaciones de volumen aplicables a diferentes niveles de utilización.

En este trabajo se abordan estos temas, haciendo especial énfasis en el comportamiento de la conicidad del ciprés (*Cupressus lusitanica*), una especie que ha sido ampliamente utilizada en programas de reforestación en la región central andina de Colombia. Además, se propone un modelo simple de conicidad que ha dado resultados altamente satisfactorios para describir el fenómeno.

## FACTORES ASOCIADOS CON LA CONICIDAD

Las causas de la tendencia general de disminución del diámetro a medida que aumenta la distancia desde el suelo a lo largo del fuste del árbol en pie, han sido estudiadas por numerosos investigadores y se han propuesto y sustentado algunas teorías al respecto:

Las teorías mecánicas intentan explicar la conicidad de los árboles como el resultado de los esfuerzos internos y externos a que está sometido el fuste. Metzger, citado por Gray (1956), reconoce dos fuerzas mecánicas que afectan la conformación del fuste: una fuerza vertical ejercida por el peso mismo del fuste, del follaje, del agua lluvia, etc. y, una fuerza horizontal ejercida sobre el fuste por el viento.

Aunque se reconoce en términos generales la validez de los planteamientos básicos de las teorías mecánicas, también se acepta que las causas básicas de tal comportamiento son de origen fisiológico. La teoría fisiológica de más amplia aceptación es la teoría de conducción de Jaccard.

La hipótesis de Jaccard, descrita por Gray (1956), consiste en la afirmación de que el fuste de un árbol es un tubo de capacidad de conducción uniforme. Esto implica que el área de la sección de los tejidos de conducción en cualquier parte del fuste libre de ramas es igual, por ejemplo, al área agregada por los tejidos de conducción en el punto de confluencia de ramas vivas; asumiendo que los tubos de los tejidos de conducción se comportan como pequeños tubos capilares, es de esperarse que cuando los elementos de conducción están inclinados, la tasa de conducción es más baja y por lo tanto se requiere un área más grande de los tejidos de conducción. Jaccard sugiere que ésta es la razón por la cual se presentan ensanchamientos en la intercepción de las ramas con el fuste y especialmente en la parte baja del fuste, en

donde es frecuente encontrar ensanchamientos anormales no explicables por teorías mecánicas.

Existen muchas evidencias que apoyan tanto las teorías mecánicas como las fisiológicas pero, aunque todos los hechos no puedan ser explicados por una única teoría, parece existir un reconocimiento general acerca de que la forma del fuste es afectada por factores del árbol y del rodal. Estos factores provocan variaciones tanto en los esfuerzos a que está sometido el árbol, como en las condiciones fisiológicas del crecimiento y desarrollo del fuste, lo cual debería manifestarse en variaciones en la forma y conicidad de los árboles.

El estado incipiente de desarrollo de las teorías que tratan de explicar las causas de la variación de la conicidad de los árboles trae como consecuencia el que los factores que más afectan tal característica no hayan sido muy precisamente identificados ni mucho menos explicado razonablemente bien su efecto.

En relación con los factores del árbol, tanto el tamaño como la posición sociológica de los individuos han demostrado resultados consistentemente ajustados a los planteamientos teóricos. Las investigaciones experimentales de González (1983a) y González (1986) muestran que en el caso del ciprés tanto los árboles más grandes (de mayor diámetro) como los árboles dominantes presentan las mayores tasas de conicidad. En estas investigaciones la longitud de la copa afectó positivamente la tasa de conicidad y estuvo altamente correlacionada con la posición sociológica sin que pudiera aislarse el efecto de estos dos factores del de su interacción. Con respecto a la longitud de la copa, Larson (1983) anota que numerosos investigadores están de acuerdo en que las podas producen una redistribución en el crecimiento diamétrico de tal manera que se disminuye la conicidad del fuste, lo que parece ser un resultado derivado del efecto de la longitud de la copa sobre la tasa de conicidad.

Entre los factores del rodal, los que han sido más ampliamente estudiados son la densidad del rodal y la calidad del sitio. Kotze (1960), lo mismo que otros autores, opina que los árboles llegan a ser más cilíndricos cuando se aumenta la densidad del rodal y cuando decrece la longitud de la copa, lo cual está de acuerdo con las teorías mecánicas. De otra parte, Larson (1983) opina que la distribución relativa del crecimiento del diámetro a través del fuste también varía ampliamente con la calidad del sitio. En los sitios buenos el crecimiento se concentra en la parte

superior de la copa, mientras que en los sitios pobres el crecimiento tiende a distribuirse más uniformemente a lo largo del fuste. En los trabajos de González (1983a) y González (1986) la densidad, expresada con base en el número de árboles, afectó negativamente la conicidad del ciprés, aunque el efecto fue sólo significativo en términos estadísticos; la calidad de sitio no mostró efectos significativos sobre la conicidad, sin embargo el efecto de este factor podría estar siendo enmascarado por la influencia de la densidad, ya que en estas investigaciones la gran mayoría de las muestras presentaban valores muy altos para este factor.

Aunque como parece razonable, se deben esperar fuertes interacciones entre los diferentes factores que afectan la conicidad, González (1986) no encontró interacción significativa ni entre los factores posición sociológica y edad, ni entre la longitud de la copa y el tamaño del árbol, en el caso del ciprés.

## DESCRIPCION DEL PERFIL INDIVIDUAL

En manejo de bosques generalmente se necesita la cubicación de fustes de árboles muestra; para el efecto el fuste se divide en trozas y éstas se cubican mediante la medición de los diámetros requeridos por los modelos de volumen a emplear (Huber, Smalian, Newton, etc.).

Recientemente Liu (1980) introdujo la metodología de las funciones "spline cúbicas" para la descripción del perfil de los árboles y la determinación del volumen. La aproximación "spline" es una forma de interpolación por una clase de funciones coordinadas, las cuales deben ser descritas como un conjunto de segmentos polinómicos cúbicos con uniones suaves. En lugar de ajustar una función dada  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  (el fuste), este intervalo se puede dividir en  $n$  subintervalos (trozas) y aproximar  $f(x)$  por un polinomio diferente en cada subintervalo. La función de aproximación  $g(x)$  es una "spline" cúbica, si se cumple que:

- En cada subintervalo la función  $g(x)$  debe ser un polinomio de máximo grado tres.
- $g(x)$  debe coincidir con  $f(x)$  en cada uno de los límites de los subintervalos.
- La primera derivada,  $g'(x)$  y la segunda  $g''(x)$  deben ser continuas en el intervalo.

González (1983) describe un sistema para la determinación de los coeficientes de los polinomios y anota cómo el sistema posee una solución única.

Una vez determinados los coeficientes de los polinomios particulares para las diferentes secciones de cada árbol y asumiendo que cada sección es circular, el volumen entre cualesquiera dos puntos del árbol se calcula como

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (g(x))^2 dx$$

La función "spline" cúbica,  $g(x)$  representa la curva que describe el perfil de cada árbol.

Este sistema de cubicación es fácil de sistematizar en un programa para computadoras, tal como el programa denominado interpolación cúbica segmentada elaborado por Arango\* y descrito por González (1983).

## MODELOS DE CONICIDAD Y DE VOLUMEN

### *La "spline" cúbica relativa promedio*

Con la metodología de las "spline" cúbicas es posible describir el perfil del fuste de un árbol específico y calcular su volumen muy exactamente; sin embargo, esta metodología requiere la medición de radios a lo largo del fuste, lo que en la práctica sólo se puede hacer para una muestra de árboles representativa de una población de referencia.

González (1983) describe y aplica una metodología la cual permite derivar una ecuación de volumen a partir de la aplicación de la técnica de las "spline" cúbicas. A grandes rasgos esta metodología incluye los siguientes pasos:

A los fustes muestra se les mide su diámetro en las mismas posiciones relativas a la longitud total del fuste. A partir de los diámetros medios se determinan los radios correspondientes y éstos se hacen proporcionales al radio a la altura del pecho (los resultados son los mismos si los cálculos se hacen a partir de los diámetros y no de los radios).

---

\* Comunicación personal.

En cada una de las posiciones relativas a la longitud total del fuste se determina el radio relativo promedio (la media aritmética de los radios relativos en cada posición). A través de estos puntos: posición relativa y radio relativo promedio se aproxima una función "spline" cúbica. El volumen generado por esta función constituye un coeficiente de forma promedio (K) para la población de fustes en estudio, con el cual se puede estimar el volumen del fuste del árbol en pie así:

$$V = KR^2L \quad (1)$$

en donde:

V = volumen del fuste (m<sup>3</sup>)

R = radio base de proporcionalidad o radio a la altura del pecho (m)

L = longitud del fuste (m)

La aplicación de esta metodología, en los pocos casos en que se ha utilizado, ha dado resultados altamente satisfactorios tanto en lo concerniente a la facilidad para su elaboración como al alto grado de ajuste mostrado por las ecuaciones. En la Tabla 1 se presentan algunos de los resultados obtenidos.

TABLA 1

ALGUNAS ESTIMACIONES DEL COEFICIENTE DE FORMA PROMEDIO Y NIVELES DE AJUSTE DE LA ECUACION DE VOLUMEN UTILIZANDO EL MODELO (1)

<i>Especie</i>	<i>K</i>	<i>R<sup>2</sup></i>	<i>Fuente</i>
Ciprés	1,4758	0,976	González (1986)
<i>Pinus oocarpa</i>	1,56376	0,955	Cartón de Colombia (1986)
<i>Pinus kesiya</i>	1,60560	0,956	Cartón de Colombia (1986)

Los principales inconvenientes de esta metodología se refieren a las dificultades actuales para analizar estadísticamente las funciones, lo mismo que para, a partir de la información básica, generar ecuaciones de volumen comercial para diferentes niveles de utilización.

#### *Un modelo de conicidad*

Numerosos modelos matemáticos han sido propuestos para

describir la conicidad de árboles de forma típicamente *excurrente*; tales modelos varían desde formas muy simples hasta polinomios complejos de alto grado. La mayor complejidad de los modelos, posibilitada por los avances en los sistemas de cómputos, no ha dado como resultado una completa solución al problema de describir la conicidad del fuste pero sí ha conducido a modelos de volumen en ocasiones tan complejos que dificultan su utilización en la práctica.

En este trabajo se propone un modelo de conicidad simple, deducido de interpretaciones geométricas del comportamiento de la conicidad de árboles típicamente *excurrentes*:

El diámetro en cualquier punto por debajo del ápice depende fundamentalmente de la distancia desde ese punto hasta el ápice (1) es decir

$$d = F(l)$$

l es simplemente la diferencia entre H (la longitud total del fuste) y h; la longitud desde el suelo hasta el punto de medición,

$$l = H - h$$

Si la variable l se divide por H la nueva variable indica la posición relativa del punto con respecto a la longitud total:

$$\frac{l}{H} = \frac{H - h}{H} = 1 - h/H$$

La hipótesis que se plantea afirma que el diámetro en cualquier punto es una función del producto de un diámetro base de referencia (D) y de la variable que indica la posición relativa del punto, es decir:

$$d = k_1 [(D)(1 - h/H)]$$

En este modelo se tiene que si h es igual a H (el ápice), d es cero. Y si h = 0 (la base) d = KD por lo cual en general k debe ser mayor o igual a 1 dependiendo del diámetro base de referencia y de la tasa de conicidad del árbol.

Si la variable se divide por H — 1,3, operación razonable en el caso en el que el diámetro base de referencia D sea el diámetro a la altura del pecho (DAP) entonces

$$d = k_1 (DAP(H - h)/(H - 1,3))$$

Con el fin de ajustar el modelo haciendo uso de las técnicas de regresión, éste se puede plantear

$$d = a + \beta [D(1 - h/H)]$$

De esta manera el modelo ha sido ajustado a diferentes bases de datos obteniéndose resultados satisfactorios, así:

**TABLA 2**  
**RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL MODELO DE**  
**CONICIDAD PROPUESTA**

<i>Población referencia</i>	$\hat{a} = a$	$\hat{\beta} = b$	$R^2$	<i>Fuente</i>
Ciprés (P. Blancas)	0,67735	1,06748	0,9605	González (1983a)
Ciprés (Antioquia)	0,43578	1,14229	0,9472	González (1986)
<i>Pinus oocarpa</i>	1,60619	1,08101	0,988	Cartón de Colombia (1986)
<i>Pinus kesiya</i>	1,48397	1,09229	0,971	Cartón de Colombia (1986)
Cerezo ( <i>Alnus jorullensis</i> )	0,01569	1,09998	0,949	Del Valle y González (1988)

La principal utilidad práctica de los modelos de conicidad resulta del hecho de que la integral de la ecuación de conicidad entre cualesquiera dos puntos a lo largo del fuste es numéricamente igual al volumen del sólido de revolución obtenido por rotación de tal función alrededor del eje de las abscisas y por lo tanto aproximadamente igual al volumen del fuste entre tales puntos

$$V = \pi/4 \int_{h_0}^{h_1} (d(h))^2 dh$$

Para el caso del modelo que se propone y teniendo en cuenta las unidades de medición: diámetro en centímetros y longitud en metros, la expresión para el volumen ( $m^3$ ) es:

$$V = \pi/40.000 \left[ h (a^2 + 2abD + b^2D^2) - \frac{h^2}{H} (a \cdot b \cdot D) + b^2D^2 + \frac{h^3}{3} - \frac{b^2D^2}{H^2} \frac{h_1}{h_0} \right]$$

Si se hace  $h_0 = 0$  y  $h_1 = H$  la expresión se reduce a

$$V = \pi/40.000 (H) (a^2 + abD + b^2D^2/3)$$

y corresponde a una estimación del volumen total del fuste.

## BIBLIOGRAFIA

- Cartón de Colombia S. A. 1986. Indices de sitio y funciones de producción de *Pinus oocarpa* y *Pinus kesiya* en los departamentos del Valle y Cauca. Colombia. Medellín. 106 p.
- Del Valle, J. I., González, H. 1988. Rendimiento y crecimiento del cerezo (*Alnus jorullensis*) en la región central andina, Colombia. Revista Facultad Nacional de Agronomía (Medellín), 41(1):59-87.
- González, C. A. 1986. La conicidad del ciprés (*Cupressus lusitanica* M.) en el departamento de Antioquia. Tesis Ing. For. Medellín, Universidad Nacional de Colombia. 77 p.
- González C. A. 1983. Descripción del perfil de los árboles utilizando la aproximación "Spline" cúbica. Medellín, Universidad Nacional de Colombia. 57 p.
- González, H. 1983. Cuantificación y calificación de la conicidad del ciprés (*Cupressus lusitanica* M.). Medellín, Universidad Nacional de Colombia. 101 p.
- Gray, H. R. 1956. The form and taper of forest-tree stems. Institute Paper Commonwealth Forestry Institute (Oxford) 32:1-80.
- Kotse, J. J. 1960. The management of pine stands for pulwood. Journal South African Forest Association (Pretoria) 35:3-9.
- Larson, P. R. 1963. Stem form of forest trees. Forest Science (Washington). Monograph 5. 42 p.
- Liu, C. J. 1980. Log volumen estimation with Spline approximation. Forest Science (Washington), 26 (3):361-369.