

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

Nik Lygeros,* Olivier Rozier**

* LGPC (UMR 5285), Université de Lyon, 69616, Villeurbanne, France

** IPGP (UMR 7154), 75238, Paris, France

nlygeros@gmail.com, rozier@ipgp.fr

Abstract

The $3x + 1$ *problem* is a difficult conjecture dealing with quite a simple algorithm on the positive integers. A possible approach is to go beyond the discrete nature of the problem, following M. Chamberland who used an analytic extension to the half-line \mathbb{R}^+ . We complete his results on the dynamic of the critical points and obtain a new formulation the $3x + 1$ problem. We clarify the links with the question of the existence of wandering intervals. Then, we extend the study of the dynamic to the half-line \mathbb{R}^- , in connection with the $3x - 1$ *problem*. Finally, we analyze the mean behaviour of real iterations near $\pm\infty$. It follows that the average growth rate of the iterates is close to $(2 + \sqrt{3})/4$ under a condition of uniform distribution modulo 2.

Key words : $3x + 1$ problem, one-dimensional dynamics, attracting cycles, asymptotic analysis.

MSC 2010 : 37E05.

1 Introduction

Généralement attribué à Lothar Collatz, le *problème* $3x + 1$ est aussi appelé *conjecture de Syracuse*, en référence à l'Université du même nom. Il se rapporte à la fonction T définie sur les entiers positifs par

$$(1.1) \quad T(n) := \begin{cases} (3n + 1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

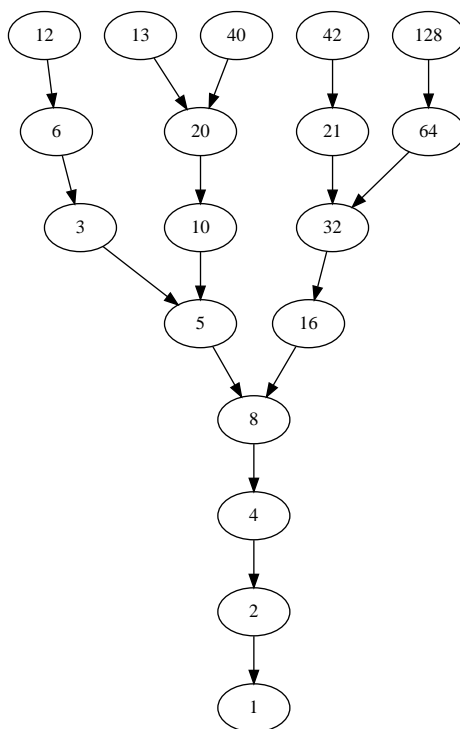


FIG. 1 – Arbre inverse du problème $3x + 1$ représentant l’ensemble des antécédents de 1 sur sept itérations.

Il s’agit de prouver que toute itération de T à partir d’un entier positif n arbitraire conduit nécessairement à la valeur 1. Cette valeur est cyclique de période 2 : $T(T(1)) = 1$.

Conjecture 1.1. Problème $3x + 1$

Pour tout entier $n > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $T^k(n) = 1$.¹

La figure 1 représente toutes les orbites qui aboutissent à 1 en un maximum de sept itérations.

Le problème $3x + 1$ se ramène entièrement aux deux conjectures 1.2 et 1.3 sur la dynamique de la fonction T .

Conjecture 1.2. Absence de trajectoires divergentes

Tout entier positif n a une orbite $\{T^i(n)\}_{i=0}^{\infty}$ bornée.

Conjecture 1.3. Absence de cycles non-triviaux

Il n’existe pas d’entiers $n > 2$ et $k > 0$ tels que $T^k(n) = n$.

¹On note $T^k(n)$ le $k^{\text{ème}}$ itéré de T .

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

La conjecture 1.2 implique que tout entier positif a une orbite cyclique à partir d'un certain rang par itération de T . La conjecture 1.3 stipule que le seul cycle possible est le cycle $(1, 2)$.

Généralement, on convient de stopper les itérations lorsque la valeur 1 est atteinte. Ainsi on appelle *temps de vol* de n le plus petit entier k tel que $T^k(n) = 1$.

T. Oliveira e Silva a vérifié par des calculs sur ordinateur que tout entier positif $n < 5 \cdot 2^{60}$ a un temps de vol fini [7].

Les conjectures 1.2 et 1.3, bien qu'abondamment étudiées, ne sont toujours pas résolues. On pourra se référer aux ouvrages de J. Lagarias [7] et G.J. Wirsching [10] pour une synthèse détaillée des résultats partiels relatifs au problème $3x + 1$ et diverses variantes.

R. E. Crandall [4] a avancé un argument heuristique basé sur l'idée de promenade aléatoire : si l'on considère uniquement la sous-suite des itérés impairs d'un entier n assez grand, on s'attend à ce que l'ensemble des rapports possibles entre deux termes successifs impairs, à savoir $3/2, 3/4, 3/8, \dots$, aient pour probabilités respectives les valeurs $1/2, 1/4, 1/8, \dots$. On obtient comme rapport moyen la valeur $3/4$. Ceci découle de l'égalité

$$(1.2) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots = \frac{3}{4}.$$

Cet argument plaide fortement en faveur de la conjecture 1.2.

Dans le cadre de notre étude, nous appellerons *vitesse moyenne* d'une séquence finie $\{n, T(n), \dots, T^k(n)\}$ la quantité $(T^k(n)/n)^{1/k}$.

Un raisonnement analogue [2] à celui de Crandall suggère que la vitesse moyenne d'une séquence arbitraire non-cyclique a statistiquement une valeur proche de $\sqrt{3}/2 \simeq 0.866\dots$, moyenne géométrique de $1/2$ et $3/2$. En effet, la croissance d'une séquence dépend principalement de la parité des itérés successifs. Or, on s'attend à ce que les parités soient équiréparties sur un grand nombre d'itérations.

Ainsi le temps de vol k d'un entier n serait tel que $(1/n)^{1/k} \approx \sqrt{3}/2$ et l'on obtiendrait la valeur moyenne

$$k \approx \frac{2 \ln n}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

en l'absence de cycle [7, p. 7].

Ces estimations sont confortées par les calculs numériques. Il semble donc qu'un tel raisonnement permette de saisir l'essentiel de la dynamique asymptotique du problème $3x + 1$.

2 Extension sur les réels positifs

Une approche possible du problème $3x + 1$ est de sortir du cadre discret et d'étendre T par une fonction analytique sur l'ensemble des nombres réels [3] ou complexes [5, 8]. Nous opterons pour l'extension réelle² qui nous paraît la plus naturelle, définie par l'équation (2.1) ci-après, et nous expliciterons les liens étroits qu'entretiennent la dynamique sur les réels et le problème $3x + 1$.

Chamberland [3] a étudié la dynamique sur la demi-droite \mathbb{R}^+ de la fonction analytique

$$(2.1) \quad f(x) := x + \frac{1}{4} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \cos(\pi x)$$

qui vérifie $f(n) = T(n)$ pour tout entier n , et $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Il a ainsi obtenu plusieurs résultats significatifs :

- (2.2) Le point fixe 0 est attractif ainsi que les cycles $\mathcal{A}_1 := \{1, 2\}$ et $\mathcal{A}_2 := \{1.192\dots, 2.138\dots\}$ de période 2.
- (2.3) La dérivée *Schwartzienne* de f est négative sur \mathbb{R}^+ .
- (2.4) Les intervalles $[0, \mu_1]$ et $[\mu_1, \mu_3]$ sont invariants par f , où $\mu_1 = 0.277\dots$ et $\mu_3 = 2.445\dots$ sont des points fixes répulsifs.
- (2.5) Tout cycle d'entiers positifs est attractif.
- (2.6) Il existe des orbites monotones non-bornées sur \mathbb{R}^+ .

Par ailleurs, il énonce la conjecture "Stable Set" [3] ci-dessous :

Conjecture 2.1. *Cycles attractifs sur* \mathbb{R}^+

La fonction f n'admet aucun cycle attractif sur l'intervalle $[\mu_3, +\infty)$.

Une conséquence immédiate de (2.5) est que la conjecture 2.1 entraîne la conjecture 1.3 du problème $3x + 1$.

Puis, il définit l'ensemble des orbites non-bornées

$$(2.7) \quad U_f^\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \infty \right\}.$$

²Le deuxième auteur (O. Rozier) avait antérieurement suggéré l'étude de l'extension (2.1) dans le plan complexe et obtenu des représentations graphiques des bassins d'attraction [1].

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

Le résultat (2.6) prouve que U_f^∞ est infini, et l'on démontre que U_f^∞ contient un ensemble de Cantor dans chaque intervalle $[n, n+1]$ pour tout entier $n \geq 2$ [8]. Il suit que U_f^∞ n'est pas dénombrable.

Conjecture 2.2. Orbites non-bornées sur \mathbb{R}^+

L'ensemble U_f^∞ est d'intérieur vide.

La conjecture 2.2 est une formulation faible de la conjecture "Unstable Set" [3]. Nous allons montrer qu'elle a des liens logiques avec le problème $3x + 1$.

Lemme 2.1. *Soit $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ l'ensemble des points critiques de f dans \mathbb{R}^+ , ordonnés de telle sorte que $0 < c_1 < c_2 < \dots$.*

Alors on a

$$n - \frac{1}{\pi^2 n} < c_n < n, \text{ si } n \text{ est pair};$$

$$n < c_n < n + \frac{3}{\pi^2 n}, \text{ si } n \text{ est impair}.$$

Démonstration. (indications) Soit n un entier positif. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \pi \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sin(\pi x)$$

et on vérifie facilement que $n - \frac{1}{2} < c_n < n$ si n est pair, et $n < c_n < n + \frac{1}{2}$ si n est impair.

De plus, on a toujours $f'(n) > 0$ et on montre que

$$f' \left(n - \frac{1}{\pi^2 n} \right) < \frac{(20 - 6\pi^2 n)n + 1}{24\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est pair},$$

$$f' \left(n + \frac{3}{\pi^2 n} \right) < \frac{(18 - 6\pi^2 n)n + 9}{8\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est impair},$$

en utilisant les encadrements $1 - \frac{t^2}{2} < \cos t < 1$ et $t - \frac{t^3}{6} < \sin t < t$ pour $0 < t < 1$. □

Lemme 2.2. *On considère la famille d'intervalles $J_n^a := [n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$ pour tout entier $n > 0$ et tout réel a tel que $\frac{27}{8} < a < 6$.*

Alors on a $f(J_n^a) \subset J_{f(n)}^a$ pour tout entier n assez grand.

Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors l'inclusion est vraie pour tout $n > 0$.

Démonstration. Soit un entier $n > 0$ et un réel a tel que $\frac{27}{8} < a < 6$.

1^{er} cas : n est pair, $f(n) = \frac{n}{2}$ et f est croissante sur J_n^a . On vérifie alors que

$$f\left(n + \frac{a}{\pi^2 n}\right) \leq f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + A \cdot B$$

avec

$$A = \frac{a}{8\pi^4 n^3} \text{ et } B = \pi^2 n (2(a-6)n + a) + 2a^2$$

en utilisant l'inégalité $1 - \cos t < \frac{t^2}{2}$ pour $0 < t < 1$. Comme $a - 6 < 0$, il est clair que $A \cdot B < 0$ pour n suffisamment grand.

Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors $B \leq \frac{49}{2} - 13\pi^2 < 0$ pour tout n .

2^e cas : n est impair, $f(n) = \frac{3n+1}{2}$ et f est croissante sur $[n, c_n]$ et décroissante sur $[c_n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$. On vérifie alors que

$$f\left(n + \frac{a}{\pi^2 n}\right) \geq f(n) - A \cdot B$$

A et B étant défini comme précédemment, donc $A \cdot B < 0$ pour n suffisamment grand. Si de plus $a = \frac{7}{2}$, alors $A \cdot B < 0$ pour tout $n \geq 3$, et dans le cas $n = 1$, on a

$$f\left(1 + \frac{7}{2\pi^2}\right) = 2.013\dots > f(1).$$

D'après le lemme 2.1, on a $c_n = n + \frac{b}{\pi^2 n}$ avec $0 < b < 3$. Il vient

$$f(c_n) - f(n) \leq \frac{3b}{2\pi^2 n} - \frac{n}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{b}{\pi n}\right)\right)$$

puis en utilisant l'inégalité $1 - \cos t > \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}$ pour $0 < t < 1$,

$$f(c_n) - f(n) < \frac{b(6-b)}{4\pi^2 n} + \frac{b^4}{48\pi^4 n^3} \leq \frac{9}{4\pi^2 n} + \frac{27}{16\pi^4 n^3}.$$

On obtient

$$f(c_n) < f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + \frac{C}{D}$$

avec

$$C = 4\pi^2 n^2 ((27 - 8a)n + 9) + 81n + 27 \text{ et } D = 16\pi^4 n^3 (3n + 1).$$

On voit que $C < 0$ pour n suffisamment grand. Si de plus $a = \frac{7}{2}$ et $n \geq 11$, on a alors

$$C = 4\pi^2 n^2 (9 - n) + 81n + 27 < 0$$

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

et dans les cas où $n = 1, 3, 5, 7$ ou 9 , on vérifie numériquement que

$$f(c_n) - f(n) - \frac{7}{(3n+1)\pi^2} < 0$$

en utilisant les valeurs $c_1 = 1.180938\dots$, $c_3 = 3.084794\dots$, $c_5 = 5.054721\dots$, $c_7 = 7.040311\dots$ et $c_9 = 9.031889\dots$ \square

On déduit du lemme 2.2 un lien logique entre les conjectures 1.2 et 2.2 :

Théorème 2.1. *La conjecture 2.2 implique la conjecture 1.2 (absence d'orbites non-bornées) du problème $3x + 1$.*

Démonstration. Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 1.2 soit fautive. Alors il existe un entier positif n_0 tel que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(n_0) = \infty.$$

D'après le lemme 2.2, une simple récurrence donne

$$f^k \left(J_{n_0}^{\frac{7}{2}} \right) \subset J_{f^k(n_0)}^{\frac{7}{2}}$$

pour tout entier $k \geq 0$. Donc l'ensemble U_f^∞ contient l'intervalle $J_{n_0}^{\frac{7}{2}}$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que U_f^∞ soit d'intérieur vide. \square

3 Dynamique des points critiques

Les résultats (2.3) et (2.5) entraînent que le bassin d'attraction immédiat de tout cycle d'entiers strictement positifs contient au moins un point critique [3]. Pour cette raison, Chamberland a effectué des calculs numériques relatifs aux orbites des points critiques c_n pour $n \leq 1000$. Il énonce la conjecture "Critical Points" ci-dessous :

Conjecture 3.1. Points critiques

Tous les points critiques c_n , $n > 0$, sont attirés par l'un des cycles \mathcal{A}_1 ou \mathcal{A}_2 .

Nous complétons ici les résultats numériques de Chamberland. Une précision de 1500 chiffres décimaux en virgule flottante est requise pour le calcul de certaines orbites (c_{646} par exemple). Nous avons vérifié nos résultats avec deux logiciels différents, Mathematica et Maple.

D'après nos calculs, les cycles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 attirent tous les points critiques c_n pour $n \leq 2000$. Plus précisément, c_n est attiré par \mathcal{A}_2 pour ³ $n = \mathbf{1}$,

³En gras les valeurs déjà obtenues par Chamberland.

3, 5, 382, 496, 502, 504, 508, 530, 550, 644, 646, 656, 666, 754, 830, 874, 1078, 1150, 1214, 1534, 1590, 1598, 1614, 1662, 1854, et par \mathcal{A}_1 pour toutes les autres valeurs de $n \leq 2000$. Nous avons observé que l'orbite de c_n est toujours proche de l'orbite de n , sauf pour $n \equiv -2 \pmod{64}$ et pour $n=54, 334, 338, 366, 390, 442, 444, 470, 484, 486, 496, 500, \dots$

Les résultats numériques suggèrent la conjecture suivante⁴ :

Conjecture 3.2. Points critiques d'ordre impair

Les points critiques c_n sont attirés par le cycle $\mathcal{A}_1 = \{1, 2\}$ pour tout entier $n \geq 7$ impair.

Nous montrons à présent que la conjecture 3.2 suffit pour reformuler complètement le problème $3x + 1$.

Théorème 3.1. *Soit un entier impair $n \geq 7$ dont l'orbite contient 1. Alors le point critique c_n est attiré par le cycle \mathcal{A}_1 .*

Démonstration. Considérons un entier impair $n \geq 7$ dont l'orbite contient 1. La construction de l'arbre des orbites inverses de 1, représenté sur la figure 1, montre que l'orbite de n contient l'un des entiers 12, 13, 16 ou 40. On déduit de règles itératives modulo 3 sur les entiers que les antécédents de 12 sont des entiers pairs. Il vient que $f^k(n) = 13, 16$ ou 40 pour un entier $k \geq 0$. Les lemmes 2.1 et 2.2 entraînent que c_n appartient à $J_n^{\frac{7}{2}}$ et $f^k(c_n)$ se trouve dans $J_{13}^{\frac{7}{2}} \cup J_{16}^{\frac{7}{2}} \cup J_{40}^{\frac{7}{2}}$.

1^{er} cas : $f^k(n) = 13, f^k(c_n) \in J_{13}^{\frac{7}{2}}$. La séquence des itérés de $f^k(n)$ est $13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Soit m un entier pris dans cette séquence. La fonction f est unimodale sur $J_m^{\frac{7}{2}}$ avec un maximum en c_m lorsque m est impair, et strictement croissante lorsque m est pair. Ce comportement permet de déterminer les images successives de $J_{13}^{\frac{7}{2}}$ en fonction de $c_{13} = 13.022478\dots$

$$f\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [20, f(c_{13})]$$

$$f^3\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [5, f^3(c_{13})]$$

avec $f^3(c_{13}) = 5.0249\dots < c_5 = 5.0547\dots$

$$f^7\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [1, f^7(c_{13})]$$

⁴Dans [5], une conjecture analogue avec davantage d'hypothèses est formulée relativement à une autre extension de la fonction T sur les réels.

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

avec $f^7(c_{13}) = 1.0184\dots$

De plus la fonction f^2 est strictement croissante sur l'intervalle $(1, c_1)$ avec une unique point fixe $x_1 = 1.023686\dots$ qui est répulsif. Il suit que l'intervalle $[1, x_1)$ fait partie du bassin d'attraction immédiat du cycle \mathcal{A}_1 et que c_n est attiré par \mathcal{A}_1 .

2^e cas : $f^k(n) = 16$, $f^k(c_n) \in J_{16}^{\frac{7}{2}}$. On a la séquence $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Comme précédemment, on obtient l'image

$$f^4\left(J_{16}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right) = 1.0227\dots < x_1$. Donc c_n est attiré par \mathcal{A}_1 .

3^e cas : $f^k(n) = 40$, $f^k(c_n) \in J_{40}^{\frac{7}{2}}$, et la séquence des itérés est $40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. De la même manière, on itère les images successives

$$f^3\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[5, f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 5.0118\dots < c_5 = 5.0547\dots$,

$$f^7\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec $f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 1.0047\dots < x_1$. Ainsi c_n est attiré par \mathcal{A}_1 dans tous les cas. □

Remarque 3.1. *Dans cette démonstration, il n'est pas possible de fusionner les cas 1 et 3 en partant de l'entier 20 car $f^6\left(J_{20}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^6\left(20 + \frac{7}{40\pi^2}\right)\right] = [1, 1.023691\dots]$ n'est pas inclus (de très peu) dans le bassin d'attraction de \mathcal{A}_1 délimité par $x_1 = 1.023686\dots$*

Corollaire 3.1. *La conjecture 3.2 est logiquement équivalente au problème $3x + 1$.*

Démonstration. Une conséquence immédiate du théorème 3.1 est que la conjecture 1.1 (problème $3x + 1$) implique la conjecture 3.2 sur la dynamique des points critiques d'ordre impair. On démontre à présent la réciproque.

Considérons un entier $n > 0$. Son orbite contient au moins un entier impair $f^{k_1}(n)$, $k_1 \geq 0$. Si $f^{k_1}(n) \leq 5$, alors l'orbite de n contient le point 1 (cf. figure 1). On considère à présent le cas $f^{k_1}(n) \geq 7$.

Supposons que la conjecture 3.2 soit vraie. Alors il existe un entier positif k_2 tel que

$$f^{k_2}(c_{f^{k_1}(n)}) < 2.$$

De plus, le lemme 2.2 donne par récurrence l'inclusion

$$f^{k_2}(c_{f^{k_1}(n)}) \in J_{f^{k_1+k_2}(n)}^{\frac{7}{2}}.$$

Il découle l'égalité

$$f^{k_1+k_2}(n) = 1. \quad \square$$

4 Intervalles errants

L'existence d'*intervalles errants* [9] dans la dynamique de l'extension f est une question ouverte avec d'importantes implications pour le problème $3x + 1$.

Conjecture 4.1. Absence d'intervalles errants

La fonction f n'admet pas d'intervalles errants dans \mathbb{R}^+ .

Elle est au cœur du théorème ci-dessous.

Théorème 4.1. *On a les relations suivantes entre conjectures :*

- (a) la conjecture 2.2 entraîne la conjecture 4.1,
- (b) la conjecture 4.1 entraîne la conjecture 1.2.

Démonstration. Par l'absurde.

(a) Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 4.1 soit fausse. Cela implique que la fonction f admette une famille d'intervalles errants sur une partie bornée de \mathbb{R}^+ . Or ce serait en contradiction avec la propriété (2.3) : la dérivée Schwartzienne de f est négative sur \mathbb{R}^+ .

(b) Supposons que la conjecture 1.2 soit fausse. Alors il existe un entier positif n tel que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(n) = +\infty$. D'après le lemme 2.2, les intervalles $\left\{ f^i \left(J_n^{7/2} \right) \right\}_{i=0}^{\infty}$ sont inclus dans les intervalles $\left\{ J_{f^i(n)}^{7/2} \right\}_{i=0}^{\infty}$, deux à deux disjoints. Il s'agit d'une famille d'intervalles errants. \square

Une synthèse des liens logiques entre conjectures est donnée en annexe.

5 Extension sur les réels négatifs

L'ensemble \mathbb{R}^- des réels négatifs est également invariant par la fonction f définie par (2.1). La dynamique sur les entiers négatifs est alors identique, au signe près, à celle de la fonction " $3x - 1$ ", notée U et définie sur les entiers positifs par

$$(5.1) \quad U(n) := \begin{cases} (3n - 1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, on a la relation de conjugaison $f(-n) = -U(n)$ pour tout entier n positif. La fonction U admet le point fixe 1 et a deux cycles connus : $\{5, 7, 10\}$ de période 3 et $\{17, 25, 37, 55, 82, 41, 61, 91, 136, 68, 34\}$ de période 11. Cela conduit à formuler le "*problème $3x - 1$* " :

Conjecture 5.1. *Problème $3x - 1$*

Pour tout entier $n > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $U^k(n) = 1, 5$ ou 17 .

Les valeurs de f sur \mathbb{R}^+ et $(-\infty, -1]$ sont liées par l'équation fonctionnelle

$$(5.2) \quad f(x) - f(-1 - x) = 2x + 1$$

de sorte que les points fixes de f sur $(-\infty, -1]$ sont exactement les points $\nu_i := -1 - \mu_i$, où $\{\mu_i\}_{i=0}^\infty$ désigne l'ensemble des points fixes de f sur \mathbb{R}^+ , $\mu_0 = 0 < \mu_1 < 1 < \mu_2 < 2 < \dots$

Néanmoins, la dynamique de f sur \mathbb{R}^- diffère partiellement de celle que l'on a pu décrire sur \mathbb{R}^+ , comme le montrent les propriétés (5.3) à (5.7).

(5.3) Les points fixes 0 et $\nu_1 = -1.277\dots$ sont attractifs, ainsi que les cycles

$$\mathcal{B}_1 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -5.046002\dots,$$

$$\mathcal{B}_2 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -4.998739\dots,$$

$$\mathcal{B}_3 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -17.002728\dots,$$

$$\mathcal{B}_4 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -16.999991\dots$$

(5.4) La dérivée Schwartzienne de f n'est pas partout négative sur \mathbb{R}^- .

(5.5) Les intervalles $[-1, 0]$ et $[\nu_1, -1]$ sont invariants par f .

(5.6) Tout cycle d'entiers négatifs est répulsif.

(5.7) Il existe des orbites monotones non-bornées sur \mathbb{R}^- .

Point ou cycle attractif	Période	Multiplicateur
0	1	0.5
ν_1	1	0.385708...
\mathcal{B}_1	3	0.036389...
\mathcal{B}_2	3	0.866135...
\mathcal{B}_3	11	0.003773...
\mathcal{B}_4	11	0.926287...

TAB. 1 – Coefficients multiplicateurs des points et cycles attractifs sur les réels négatifs.

Démonstration. (indications)

Propriété (5.3) : Les vitesses d'attraction sont données dans le tableau 1.

Propriété (5.4) : La dérivée Schwartzienne est positive sur un intervalle contenant le point -0.2. On a en effet $Sf(-0.2) = 39.961\dots$, où

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Propriété (5.5) : La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\nu_1, 0]$ contenant le point fixe répulsif -1.

Propriété (5.6) : Voir les indications dans [3, p.16].

Propriété (5.7) : La démonstration est similaire à celle de (2.6). □

Remarque 5.1. *Les cycles \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_4 sont très faiblement attractifs car leur multiplicateur est proche de 1 (cf. tableau 1). On vérifie également que les cycles contenant les points -5 et -17 sont très faiblement répulsifs, avec pour multiplicateurs respectifs les rationnels $9/8$ et $2187/2048$.*

Comme précédemment, on note c_n les points critiques proches des entiers $n < 0$, et on peut montrer que les itérés successifs de c_n pour n impair négatif restent proches des itérés de n , par valeurs inférieures. Nous avons vérifié numériquement pour tout entier n , $-1000 < n < 0$, que

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

- si n est impair et $f^k(n) = -1$ (resp. $-5, -17$) pour un entier k , alors l'orbite de c_n converge vers ν_1 (resp. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$);
- si n est pair et $f^k(n) = -1$ (resp. $-5, -17$) pour un entier k , alors l'orbite de c_n converge vers 0 (resp. $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4$), sauf pour $n = -34, -66, -98, -130, -132, -162, -174, -194, -202, -226, \dots$ où l'orbite de c_n converge vers $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \nu_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \nu_1, \mathcal{B}_1, \nu_1, \nu_1, \dots$ respectivement. On note que les entiers $n \equiv -2 \pmod{32}$ semblent toujours faire partie des exceptions.

Le plus souvent, lorsque $n < 0$ est pair, l'orbite de c_n reste proche de l'orbite de n , par valeurs supérieures. Pour $n = -34, -98, -132, -162, -202, \dots$ les itérés de c_n finissent pas être inférieurs aux itérés de n , sans s'en éloigner pour autant. Pour $n = -66, -130, -174, -194, -258, \dots$ les orbites de n et de c_n sont décorréelées après un nombre fini d'itérations. Dans ce dernier cas, on observe une répartition des orbites de c_n dans chacun des six bassins d'attraction de \mathbb{R}^- : $0, \nu_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et \mathcal{B}_4 .

Conjecture 5.2. Points critiques d'ordre négatif impair

Les points critiques c_n sont attirés soit par le point fixe ν_1 , soit par l'un des cycles \mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_3 , pour tout entier $n < 0$ impair.

6 Dynamique asymptotique

Dans cette partie, nous étudions le comportement moyen de séquences finies ou infinies d'itérations de f , afin de déterminer la vitesse moyenne asymptotique (i.e. au voisinage de $\pm\infty$).

Nous dirons ainsi qu'une séquence infinie $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^\infty$ est uniformément distribuée modulo 2 (u. d. mod 2) si et seulement si la discrédance à l'origine de $\{f^i(x) \bmod 2\}_{i=0}^{n-1}$ dans l'intervalle $[0, 2]$, notée $D_n^*(S \bmod 2)$, vérifie⁵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S \bmod 2) = 0.$$

Dans le cas d'une séquence finie $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$, nous dirons de manière informelle que S est u. d. mod 2 dès lors que $D_n^*(S \bmod 2) \ll 1$.

On rappelle que la notion de discrédance est une mesure de l'uniformité de la distribution d'une séquence de points $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$ et est définie par

$$(6.1) \quad D_n^*(\mathcal{X}) := \sup_{a \leq c \leq b} \left| \frac{|\{x_1, \dots, x_n\} \cap [a, c]|}{n} - \frac{c - a}{b - a} \right|$$

Elle intervient notamment dans l'inégalité de Koksma [6] :

⁵On note $x \bmod 2$ la valeur modulo 2 de tout réel x , définie par $x \bmod 2 := x - 2\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

Théorème 6.1. (*Koksma*) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation (totale) $V(f)$ bornée. Alors pour toute séquence $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$, on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| < V(f) D_n^*(\mathcal{X})$$

Nous considérons dorénavant que la fonction f définie par (2.1) s'applique sur \mathbb{R} tout entier. Comme f ne s'annule qu'en 0, il suit que $f^n(x)$ est de même signe que x pour tout réel $x \neq 0$ et tout entier n .

Notre approche consiste à approximer $f(x)/x$ par son asymptote sinusoidale

$$(6.2) \quad g(x) := 1 - \frac{\cos(\pi x)}{2}$$

dont on détermine la moyenne géométrique.

Lemme 6.1. La moyenne géométrique τ de la fonction réelle $g(x) = 1 - \cos(\pi x)/2$ sur $[0, 2]$ est égale à $\alpha/4$, où $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ est racine du polynôme $X^2 - 4X + 1$.

Démonstration. On cherche à calculer $\tau := \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt\right)$ avec

$$g(t) = 1 - \cos(\pi t)/2 = (\alpha - e^{i\pi t})(\alpha - e^{-i\pi t})/(4\alpha) = |\alpha - e^{i\pi t}|^2/(4\alpha).$$

On obtient

$$\ln \tau = \int_0^2 \ln |\alpha - e^{i\pi t}| dt - \ln(4\alpha).$$

La formule de Jensen relative aux fonctions analytiques sur le disque de centre α et de rayon 1 donne le résultat attendu

$$\ln \tau = 2 \ln \alpha - \ln(4\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha}{4}\right). \quad \square$$

On montre à présent qu'au voisinage de $\pm\infty$ toute séquence d'itérations u. d. mod 2 de f décroît avec une vitesse moyenne proche de $\tau = (2 + \sqrt{3})/4 \simeq 0.933\dots$

Théorème 6.2. Soit une séquence finie d'itérations $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$ telle que $\min\{|f^i(x)|\}_{i=0}^{n-1} \geq M$ pour un réel $M > \frac{1}{3}$. Alors on a

$$\left| \frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau \right| < 2(\ln 3) D_n^*(S \bmod 2) - \ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right).$$

Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

Démonstration. On considère la formulation $f(t) = g(t)(t + h(t))$ où h est la fonction périodique

$$h(t) := \frac{1 - \cos(\pi t)}{4g(t)} = \frac{1 - \cos(\pi t)}{4 - 2\cos(\pi t)}.$$

On a donc

$$\frac{f^n(x)}{x} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i+1}(x)}{f^i(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} g(f^i(x)) \left(1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)}\right)$$

Il vient alors

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau = A + B$$

avec

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(g(f^i(x))) - \ln \tau$$

et

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)} \right)$$

D'après le lemme 6.1,

$$\ln \tau = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt$$

On applique l'inégalité de Koksma :

$$|A| \leq V(\phi) D_n^*(S \bmod 2)$$

où $V(\phi)$ est la variation totale de la fonction $\phi(t) := \ln(g(t))$ sur $[0, 2]$, soit $V(\phi) = 2\phi(1) - \phi(2) - \phi(0) = 2 \ln 3$.

Pour majorer $|B|$, on vérifie que la fonction $h(t)$ est à valeur dans $[0, 1/3]$ avec un maximum en $t = 1$. On en déduit que

$$|B| \leq \max \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right), \ln \left(1 + \frac{1}{3M} \right) \right) = -\ln \left(1 - \frac{1}{3M} \right). \quad \square$$

Le théorème 6.2 est inopérant pour les séquences d'entiers, dont la vitesse moyenne attendue est $\sqrt{3}/2$, strictement inférieure à τ . Il permet toutefois d'établir un lien entre la vitesse moyenne et la distribution modulo 2 des itérations.

Théorème 6.3. *Soit x un réel d'orbite $\{f^i(x)\}_{i=0}^\infty$ telle que*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| > \frac{1}{3(1-\tau)} \simeq 4.97\dots$$

Alors l'orbite de x n'est pas uniformément distribuée modulo 2.

Démonstration. Il existe un entier positif N et un réel $a > 1$ tels que

$$|f^i(x)| \geq \frac{a}{3(1-\tau)}$$

pour tout $i \geq N$.

On considère les séquences finies $S_n = \{f^i(x)\}_{i=N}^{n+N}$ pour tout n entier positif, et on pose $M_n := \min\{|f^i(x)|\}_{i=N}^{n+N}$.

D'après le théorème 6.2,

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right) - \ln \tau < 2(\ln 3) D_n^*(S_n \bmod 2) - \ln \left(1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

Il vient

$$2(\ln 3) D_n^*(S_n \bmod 2) > A_n + B_n$$

avec

$$A_n = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right)$$

et

$$B_n = -\ln \tau + \ln \left(1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

D'une part, on vérifie aisément que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \geq 0$. D'autre part, on a

$$B_n \geq -\ln \tau + \ln \left(1 - \frac{1-\tau}{a} \right) = \ln \left(1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right) > 0.$$

On obtient donc le résultat souhaité :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S_n \bmod 2) \geq \frac{\ln \left(1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right)}{2 \ln 3} > 0. \quad \square$$

L'existence d'orbites tendant vers l'infini a été prouvée par Chamberland pour la fonction f et le corollaire 6.1 donne une condition nécessaire sur l'ensemble des valeurs modulo 2 d'une telle orbite.

Corollaire 6.1. *Soit x un réel d'orbite $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ divergente telle que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| = +\infty.$$

Alors l'orbite de x n'est pas u. d. mod 2.

Ce résultat renforce la conjecture 2.2. En effet, on peut s'attendre à ce que la condition de distribution uniforme modulo 2 des itérations de f soit le plus souvent valide au voisinage de $\pm\infty$, compte tenu des propriétés suivantes :

- le diamètre et la densité des zones contractantes tend vers 0,
- l'amplitude des oscillations devient infiniment grande.

Références

- [1] A. Aoufi, O. Rozier, Le problème de Syracuse dans \mathbb{C} , *Singularité* N°5 (1990) 26.
- [2] E. Barone, Una argumentazione euristica probabilistica sulla successione di Collatz, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 4 (1998) 151–153.
- [3] M. Chamberland, A continuous extension of the $3x+1$ problem to the real line, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996) 495–509.
- [4] R. E. Crandall, On the "3x + 1" problem, *Math. Comp.*, 32 (1978) 1281–1292.
- [5] J. Dumont, C. Reiter, Real dynamics of a 3-power extension of the $3x+1$ function, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 10 (2003) 875–893.
- [6] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, 1974.
- [7] J. Lagarias, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, American Mathematical Monthly, 2010.
- [8] S. Letherman, D. Schleicher, R. Wood, The $3n + 1$ problem and holomorphic dynamics, *Experiment. Math.*, 8, (1999) 241–251.
- [9] W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [10] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3n + 1$ Function*, Springer-Verlag, 1998.

Annexe

La figure 2 ci-dessous résume quelques-uns des principaux résultats de cet article sous la forme de liens logiques entre diverses conjectures.

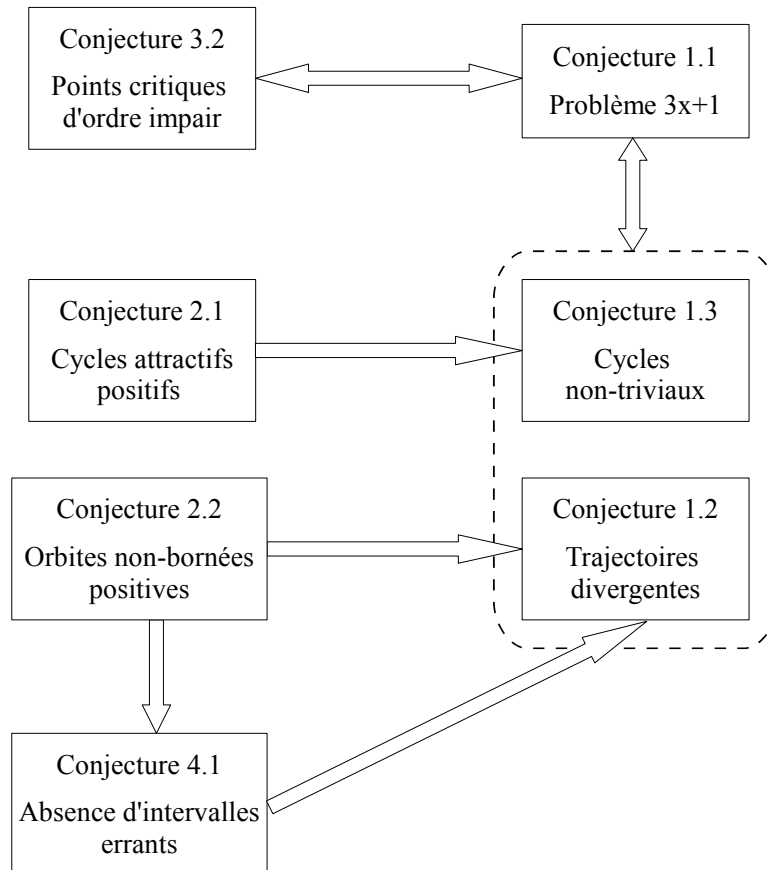


FIG. 2 – Liens logiques entre conjectures. La partie gauche concerne le cadre continu \mathbb{R}^+ et la partie droite le cadre discret \mathbb{Z}^+ .