Ratio Math. n. 7 - 1994
103 - 109

MATEMATICA E FIGURINE*

Antonio Maturo
Dipartimento di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro
Università "G. D'Annunzio", Viale Pindaro 42, Pescara

1. IL PROBLEMA DELLE FIGURINE

Alcuni anni fa mio figlio Alessandro decise di fare la collezione delle figurine dei calciatori.

Si trattava di riempire un album di 600 figurine ed ogni figurina costava L.10 (oggi costano £.50).

Fui contento della sua decisione perchè pensavo di aver trovato una maniera per impegnarlo e anche per farlo crescere culturalmente (aveva tre anni e sei mesi).

Stimavo di comprargli 20 figurine al giorno, spendendo così £. 200 (equivalenti a £. 1.000 attuali) e mi sembrava che la soluzione fosse abbastanza economica. Mi insospettiva un poco il fatto che l'album, molto bello e ricco di notizie, fosse distribuito gratuitamente, ma non diedi molto peso a tale circostanza.

Dopo tre o quattro giorni, però, la situazione precipitò: mio figlio, preso dall'ansia di completare l'album, voleva le 20 figurine (e possibilmente di più) ogni volta che passavamo davanti ad un giornalaio.

Cominciarono inoltre rapidamente a comparire i doppioni, i triploni e l'album non si riempiva mai.

Mi chiesi allora preoccupato: quanto si spende a riempire un album di figurine?

Alessandro non aveva buttato nessuna figurina multipla, nè aveva amici per fare scambi, per cui cominciai a raccogliere dei dati.

Su 530 figurine acquistate ne erano state messe, sull'album,339, mentre 191 erano almeno doppioni.

---

* *Lavoro presentato al Convegno Nazionale Mathesis 1989, Gioia del Colle, 29-30 aprile*

Cinque giorni dopo notai che, su 790 figurine acquistate ne erano state attaccate, sull'album, 427, mentre 363 erano almeno doppioni. In cinque giorni erano state acquistate 260 figurine (per una spesa equivalente a £.13.000 attuali) e di queste sull'album ne erano state attaccate appena 88.

Alcuni giorni dopo il totale delle figurine acquistate era diventato 930 mentre quelle attaccate all'album erano 471.

A questo punto pensai che, come professore di Matematica, fosse doveroso trovare una formula per stabilire la relazione fra figurine acquistate e figurine messe nell'album e, in definitiva, per prevedere la spesa necessaria per riempire l'album.

2. RISOLUZIONE APPROSSIMATA CON LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Indichiamo con x il numero di figurine acquistate e con y quelle delle figurine messe nell'album.

La probabilità di attaccare una ulteriore figurina acquistata sull'album è, allora,

$$p(y) = (600 - y) / 600. \tag{2.1}$$

Facciamo le seguenti approssimazioni:

(1) trattiamo y e x come variabili continue e non discrete come effettivamente sono. Ammettiamo che si possa comprare una quantità infinitesima dx di figurine e metterne, in corrispondenza, una quantità dy;

(2) interpretiamo le probabilità come frequenze.

In base alle (1) e (2) possiamo allora scrivere

$$dy = \frac{600 - y}{600} dx ; \qquad \frac{600}{600 - y} dy = dx$$

Integrando con la condizione iniziale che per $x = 0$ (nessuna figurina acquistata) sia $y = 0$ (nessuna figurina messa) si ottiene

$$x = 600 \log \frac{600}{600 - y} \quad . \tag{2.2}$$

Confrontiamo i dati teorici, ottenuti dalla formula (2.2), con quelli osservati. Si ha la tabella

y	x osservato	x teorico
339	530	499
427	790	746
471	930	922

Tabella 1

Il grado di vicinanza fra valori teorici e valori osservati era veramente eccezionale, tenuto conto del fatto che le approssimazioni effettuate erano tali da far inorridire sia un "analista" che un "probabilista".

Ciò, tuttavia, non era affatto consolante per il mio portafoglio, poichè dalla (2.2) segue

$$\lim_{y \to 600} x = +\infty \tag{2.3}$$

Leggendo attentamente l'album, però, ho scoperto che la casa editrice dell'album era disposta a fornire, al prezzo di £. 25 l'una, fino a 20 figurine (per una spesa equivalente a £. 2.500 attuali, un vero affare per me!).

In base alla (2.2) le figurine da acquistare per attaccarne 580 sull'album sono, approssimativamente, 600 log 30 = 2.041 (per una spesa equivalente a £. 102.050 attuali).

Dopo aver fatto tutti questi calcoli (nel frattempo avevo acquistato altre 200 figurine, quasi tutte doppioni) ho spiegato a mio figlio che non era più il caso di proseguire la collezione poichè a quel punto si dovevano comprare quasi 10 figurine per metterne una e quindi ogni figurina messa costava in media una somma pari alle attuali £. 500.

Alessandro capì perfettamente i miei calcoli e non mi chiese più soldi per le figurine. Però i giorni successivi lo vidi sempre con le tasche piene di doppioni acquistati dai nonni.

3. RISOLUZIONE DEL PROBLEMA CON IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Supponiamo di aver messo y figurine.

La probabilità di attaccare una ulteriore figurina acquistata è allora data dalla (2.1).

Indichiamo con N(y) il numero di figurine da acquistare per metterne una nuova dopo che ne sono state attaccate y.

La variabile casuale N(y) può assumere i valori 1, 2, ..., n, ... con probabilità $p(y), (1 - p(y))\, p(y), \dots, (1 - p(y))^{n-1} p(y)$,

$$\text{media } m(y) = \frac{1}{p(y)} \qquad \text{e varianza } V(y) = \frac{1 - p(y)}{[p(y)]^2} .$$

Il numero di figurine da acquistare per poterne mettere y è allora:

$$X = N(0) + N(1) + \dots\dots + N(y - 1)$$

Il valore medio di X è dato dalla formula:

$$m(X) = \sum_{i=0}^{y-1} m(i) = 600 \sum_{i=0}^{y-1} \frac{1}{600 - i} \tag{3.1}$$

e, poichè le N(i) sono indipendenti, la varianza di X è uguale a

$$V(X) = \sum_{i=0}^{y-1} V(i) = 600 \sum_{i=0}^{y-1} \frac{i}{(600 - i)^2} \tag{3.2}$$

È noto che (cfr, ad es. [3], [6])

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - \frac{\Theta_{n+1}}{n+1} \tag{3.3}$$

dove Θ_{n+1} è un numero appartenente all'intervallo (0, 1), la successione di termine generale $\Theta_{n+1} / (n+1)$ è strettamente decrescente e γ è la costante di Eulero-Mascheroni, uguale a 0,5772155...

Dalla (3.1) si ottiene:

$$m(X) = 600\left[\sum_{j=1}^{600} \frac{1}{j} - \sum_{j-1}^{600-y} \frac{1}{j}\right]$$

e quindi, per la (3.3),

$$m(X) = 600\left[\log 600 - \log(600 - y) + \log\left(1 + \frac{1}{600}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{600-y}\right) + \right.$$
$$\left. - \Theta_{601} / 601 + \Theta_{600-y+1} / (600 - y + 1)\right]$$

ossia, ponendo

$$(3.4) \quad \alpha = \left[\log\left(1 + \frac{1}{600}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{600-y}\right)\right] + \left[\frac{\Theta_{600-y+1}}{600-y+1} - \frac{\Theta_{601}}{601}\right]$$

$$(3.5) \qquad m(X) = 600\left(\log\frac{600}{600-y} + \alpha\right)$$

Con facili calcoli si vede subito che, per $y \leq 580$ è certamente $|\alpha| < 0{,}048$ e, per $y \leq 500$, risulta $|\alpha| < 0{,}002$.

Quasi sicuramente, poi, α è molto più vicino a zero da quanto appare dalle precedenti disuguaglianze, poichè, nella (3.4), il termine fra parentesi quadre a sinistra, negativo, e quello fra parentesi quadre a destra, positivo, sono dello stesso ordine di grandezza.

La (3.5) permette di chiarire il significato della (2.2).

Infatti confrontando le due formule segue che

$$m(X) = x + 600\,\alpha$$

Possiamo osservare che $600\,\alpha$ è minore di 29 per $y \leq 580$ ed è minore di 2 per $y \leq 500$. Ciò implica che si può assumere, con buona approssimazione, $m(X) \approx x$.

Per poter valutare la variabilità di X, diamo una maggiorazione della sua varianza.

Poichè:

$$\frac{i}{(600 - i)^2} = \frac{600}{(600 - i)^2} - \frac{1}{600 - i}$$

risulta, per la (3.2),

$$V(X) = 600^2 \sum_{j = 600 - y + 1}^{600} \frac{1}{j^2} - m(X)$$

e quindi

$$V(X) < 600^2 \sum_{j = 600 - y + 1}^{600} \frac{1}{j(j - 1)} - m(X) = 600^2 \left(\frac{1}{600 - y} - \frac{1}{600}\right) - m(X)$$

Si ha dunque

$$V(X) < \frac{600^2}{600 - y} - 600 \left(1 + \log \frac{600}{600 - y}\right) - 600\,\alpha\ . \tag{3.6}$$

In particolare, per $y \leq 580$, essendo $V(X)$ funzione crescente di y, si ha

$$V(X) < 600^2/20 - 600(1 + \log 30) + 600\ |\ \alpha\ |$$

ossia, tenuto conto delle limitazioni su α,

$$V(X) < 18000 - 2641 + 29 = 15388.$$

Lo scarto quadratico medio, in corrispondenza, soddisfa alla condizione

$$\sigma < 125$$

Per $y \leq 500$, invece, si ha, per la (3.6),

$$V(X) < 600^2/100 - 600\ (1 + \log 6) + 600\ \alpha$$

da cui

$$V(X) < 18000 - 1675 + 2 = 1927;\ \sigma < 44.$$

Assumendo l'ipotesi che la X sia distribuita normalmente, per $y \leq 500$ la probabilità dell'evento $\{ | X-m(X) | < 44 \}$ è maggiore di 0,68 ; quella dell'evento $\{ |X - m(X) | < 88 \}$ è maggiore di 0,95.

Ciò spiega i risultati della tabella 1.

Al crescere di y gli intervalli di confidenza al 68% e al 95% si allargano e per $y = 580$, massimo valore di y, si ottiene, sempre nell'ipotesi che X sia normale,

$$\text{prob} \{ | X - m (X) | < 125\} > 0{,}68$$

e

$$\text{prob} \{ |X - m(X)| < 250\} > 0{,}95$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G.CALOT. *Cours de calcul des probabilités*. Dunod, Paris 1967

[2] G.DALL'AGLIO. *Calcolo delle probabilità*. Zanichelli, Bologna. 1987

[3] A.GHIZZETTI. *Complementi ed esercizi di Analisi Matematica vol. I*. Libreria Veschi, Roma. 1966

[4] A.MATURO. *Numeri pseudocasuali*. Montefeltro Edizioni Urbino 1983

[5] R.SCOZZAFAVA. *Introduzione alla Probabilità e alla Statistica*. Libreria Veschi, Roma.1984

[6] G.ZWIRNER. *Esercizi e complementi di Analisi Matematica vol. I*. Cedam, Padova. 1967