Ratio Math. n. 7 - 1994
91 - 102

NUMERI LATERALI E DIAGONALI

Silvio Maracchia
Dipartimento di Matematica - Università "La Sapienza" - Roma

1. PREMESSA

I matematici greci divisero i numeri in molti modi, alcuni dei quali ancora usati da noi (numeri pari, dispari, quadrati, primi, triangolari, ecc.), altri noti soltanto a studiosi di teoria dei numeri (numeri perfetti, amici, abbondanti, ecc.), altri ancora caduti in disuso e noti solo a studiosi di storia della matematica (numeri imparimpari, parimente pari, poligonali, eteromechi, solidi, ecc.).

A quest'ultima categoria appartengono i cosiddetti *numeri diagonali e laterali* di probabile origine pitagorica ma comunque sicuramente noti ai tempi di Platone, "numeri - scrive Teone di Smirne - che armonizzano le figure" (1).

2. NUMERI DIAGONALI E LATERALI

È proprio Teone di Smirne (I metà del secondo sec. d.C.) che ci consente di conoscere questo risultato della matematica greca (2) per il fatto che Platone aveva considerato come approssimazione del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato il valore 7/5 (3).

Teone scrive infatti l'opera *Esposizione delle conoscenze matematiche utili per la lettura di Platone,* un'opera che, pur giunta gravemente mutilata, ci permette di ottenere varie notizie sulla matematica e sull'astronomia.

---

1. Teone di Smirne, *Esposizione delle conoscenze matematiche utili per la lettura di Platone,* ed. curata da J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, cap. XXXI, p. 72. A questa edizione si farà riferimento per le citazioni successive.

2. Anche Giumblico (*In Nicom.* Pistelli 91, 3 sgg.) e Proclo (V sec. d.C.) parlano dei numeri diagonali e laterali; ed è quest'ultimo che nel suo commento alla *Repubblica* di Platone, attribuisce ai Pitagorici la loro individuazione affermando, inoltre, che la prova geometrica della loro formazione si trova nel secondo libro degli *Elementi* di Euclide (vedremo in seguito questa "prova" di Euclide). P. Tannery ha mostrato come tali numeri si sarebbero potuti ottenere dalla media armonica studiata appunto dai Pitagorici (per tutte queste notizie e per i vari riferimenti cfr. *De Pytagore à Euclide* di P. H. Michel, Les Belles Lettres, Paris, 1950, 1950, pp. 427-441.

3. Cfr. Platone, *Repubblica,* 546 c.

Ebbene, i numeri diagonali e laterali vengono trattati, scrive Teone, poiché in grado di approssimare sempre più il rapporto detto tra diagonale e lato di un quadrato.

Bisogna cominciare, scrive ancora Teone, dall'unità sia per i numeri diagonali che per i numeri laterali poiché l'unità è il principio di tutto e quindi è in potenza sia la diagonale e sia il lato. Successivamente, al primo numero diagonale stabilito ($d_1=1$) vanno aggiunti due laterali per ottenere il nuovo diagonale ($d_2 = 1 + 2 \cdot 1$) e al primo numero laterale ($l_1=1$) va aggiunto il primo diagonale ($l_2 = 1 + 1$). E così via, ottenendo pertanto le due successioni:

$$(1) \qquad \begin{array}{llllll} d_n) & 1 & 3 & 7 & 17 & 41\ldots \\ l_n) & 1 & 2 & 5 & 12 & 29\ldots \end{array}$$

con la legge di formazione:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} d_{k+1} = d_k + 2l_k & d_1 = 1 \\ l_{k+1} = l_k + d_k & l_1 = 1 \end{array}$$

Teone non scrive simbolicamente le formule (1) e (2), ma dopo aver calcolato alcune coppie delle successioni, conclude affermando: *"E così di seguito continuando l'addizione"*. Egli osserva inoltre che la "proporzione è alterna" intendendo con questo che il quadrato del numero diagonale è alternativamente maggiore o minore di una unità del doppio del quadrato del corrispondente laterale. Tradotto in simboli possiamo scrivere:

$$(3) \qquad d_k^2 = 2\, l_k^2 + (-1)^k$$

3. PLATONE E I NUMERI DIAGONALI E LATERALI

Prima di ulteriori osservazioni sui numeri diagonali e laterali, vediamo che cosa ha provocato l'esposizione di Teone e cioè vediamo che cosa dice Platone a tale riguardo.

Ebbene, Platone sta descrivendo nella *Repubblica* il cosiddetto *"numero nuziale"* (4) che presiede alla generazione umana di cui è il periodo e che definisce in cinque modi diversi.

4. Platone, *Repubblica*, 546 b-d; per varie notizie su tale argomento cfr. *Platone e la matematica nel mondo antico* di A. Frajese, Univers. Studium, Roma, 1963, pp. 145-150.

Le interpretazioni di queste definizioni non sono univoche; noi seguiremo quelle di A. Diés (5) che sembrano le più attendibili e portano, come dev'essere, tutte allo stesso numero e giustificano inoltre la presenza dei numeri diagonali e laterali in Teone.

Il numero in questione è 12.960.000 e uno dei modi per raggiungerlo viene indicato da Platone come "composto parte da fattori uguali parte da fattori disuguali: di cento quadrati delle *diagonali razionali* di cinque, ciascuno diminuito di uno, o di cento quadrati delle diagonali irrazionali diminuiti di due, e di cento cubi di tre" (6).

Si tratta di due metodi assai simili: nel primo si considera $100(7^2 - 1)$ e nel secondo $100\left[(\sqrt{50})^2 - 2\right]$, valori da moltiplicare successivamente per "cento cubi di tre", cioè per $100 \cdot 3^3$.

Ebbene, nel primo metodo Platone indica il sette quale "diagonale razionale di cinque", intendendo cioè che, rimanendo nell'ambito delle grandezze razionali, il valore approssimato della diagonale di un quadrato di lato cinque è appunto sette (7). Ma la relazione sette-cinque è proprio una di quelle che si trovano tra due particolari numeri diagonali e laterali corrispondenti ($d_3 = 7$; $l_3 = 5$).

4. DIMOSTRAZIONI E IPOTESI SUI NUMERI DIAGONALI E LATERALI

Possiamo ora dimostrare la proprietà (3) indicata da Teone deducendola dalla definizione (2) mediante il procedimento di induzione.

---

5. A. Diés, *Le nombre de Platon. Essai d'exégése et d'histoire* (Acc. des Inscrip. et belles lettres t.XIV, Paris, 1936); citazione tratta dall'opera di A. Frajese citata nella nota precedente.

6. Cfr. l'op.cit. di A. Frajese, p. 146 (la sottolineatura è nostra). Due altri metodi portano al calcolo di $(3 \cdot 4 \cdot 5)^4$ espresso in due modi diversi.

7. Come viene mostrato nel *Menone* (82a - 85b), Platone è a conoscenza che, indicando con d ed l rispettivamente diagonale e lato di uno stesso quadrato (o le loro misure), si ha $d^2 = 2\ l^2$, per cui la (vera) lunghezza della diagonale del quadrato di lato 5 risulta da $d^2 = 2 \cdot 5^2 = 50$ [egli però non può scrivere, come abbiamo fatto noi $(\sqrt{50})^2 = 50$] .

Vedremo anche come si possono ottenere i numeri diagonali e laterali attraverso l'algoritmo delle frazioni continue. Dopo questo vedremo che la (3) non è che un caso particolare di una famosa equazione di analisi indeterminata che ebbe una notevole importanza nello sviluppo della teoria dei numeri.

Metodo di induzione

La proprietà (3) è vera per k = 1, infatti, essendo $d_1 = l_1 = 1$, si ha:

$$d_1^2 = 2l_1^2 - 1 = 2l_1^2 + (-1)^1$$

Se la proprietà (3) si suppone vera per k = n e cioè se si suppone che

$$d_n^2 = 2l_n^2 + (-1)^n$$

oppure

$$d_n^2 - 2l_n^2 = (-1)^n$$

essa si può dimostrare per k = n+1 e cioè che

$$d_{n+1}^2 = 2l_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Infatti, per le (2) si ha:

$$d_{n+1}^2 = (d_n + 2l_n)^2 = d_n^2 + 4d_nl_n + 4l_n^2$$

e

$$2l_{n+1}^2 = 2(d_n + l_n)^2 = 2d_n^2 + 4d_nl_n + 2l_n^2$$

pertanto

$$d_{n+1}^2 = 2l_{n+1}^2 - d_n^2 + 2l_n^2$$

e quindi

$$d_{n+1}^2 = 2l_{n+1}^2 - (d_n^2 - 2l_n^2) = 2l_{n+1}^2 - (-1)^n = 2l_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Notiamo che le (2) consentono di osservare che le due successioni sono entrambe divergenti ($d_{k+1} > d_k$ e $l_{k+1} > l_k$ con d_k e l_k numeri naturali), per cui dalla (3) si ottiene:

$$\left(\frac{d_k}{l_k}\right)^2 = 2 + \frac{(-1)^k}{l_k^2}$$

e quindi

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{d_k}{l_k}\right)^2 = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{d_k}{l_k} = \sqrt{2}$$

Anche senza la teoria dei limiti, ai matematici greci era possibile verificare che i vari rapporti d_k/l_k riuscivano ad approssimare sempre meglio il rapporto tra diagonale e lato del quadrato, poiché è sufficiente verificare che il rapporto dei rispettivi quadrati si avvicina sempre più a due.

Ad esempio (ritrovando l'alternanza delle approssimazioni):

$$\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad \text{e si ha} \qquad \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25} \qquad \text{e si ha} \qquad 2 - \frac{49}{25} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{17^2}{12^2} = \frac{289}{144} \qquad \text{e si ha} \qquad \frac{289}{144} - 2 = \frac{1}{144}$$

e così via (8).

Dalla teoria delle frazioni continue sappiamo che un radicale quadratico a $\pm \sqrt{b}$ dà origine ad una frazione continua illimitata periodica, semplice o mista. Nel caso di $\sqrt{2}$ si ha:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Indicate con $R_1 = 1$; $R_2 = 1 + 1/2$; $R_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$ ecc. le "ridotte" di tale sviluppo e con P_1, Q_1; P_2, Q_2; P_3, Q_3, ecc. i corrispondenti numeratori e denominatori delle ridotte, si può notare che essi sono, nell'ordine, proprio i numeri diagonali e laterali:

$$R_1 = 1 \qquad P_1 = 1 \qquad Q_1 = 1$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad P_2 = 3 \qquad Q_2 = 2$$

$$R_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} \qquad P_3 = 7 \qquad Q_3 = 5 \qquad \text{ecc.}$$

8. Notiamo che il limite calcolato risulterebbe sempre $\sqrt{2}$ anche se anziché ± 1 si avesse nella (3) una qualsiasi altra costante.

D'altra parte, la legge di formazione dei numeratori e denominatori delle ridotte del generico sviluppo

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

è la seguente:

$$(4) \qquad \begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \qquad n = 3, 4, 5, \dots$$

ed essa consente, nel caso particolare di $\sqrt{2}$, di calcolare ugualmente i numeri diagonali e laterali tenendo conto che in questo caso $P_1 = 1$, $Q_1 = 1$; $P_2 = 3$, $Q_2 = 2$ e che $a_n = 2$ (con $n > 1$).

Infatti:

$$\begin{cases} P_3 = a_3 P_2 + P_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ Q_3 = a_3 Q_2 + Q_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = a_4 P_3 + P_2 = 2 \cdot 7 + 3 = 17 \\ Q_4 = a_4 Q_3 + Q_2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_5 = a_5 P_4 + P_3 = 2 \cdot 17 + 7 = 41 \\ Q_5 = a_5 Q_4 + Q_3 = 2 \cdot 12 + 5 = 29 \end{cases} \qquad \text{ecc.}$$

Il fatto che i numeri diagonali e laterali risultano numeratori e denominatori delle ridotte dello sviluppo in frazioni continue di $\sqrt{2}$, ha fatto avanzare l'ipotesi che i matematici greci conoscessero questo sviluppo. D'altra parte l'algoritmo euclideo, inerente al calcolo del massimo comun divisore di due numeri, avrebbe potuto portare allo sviluppo in frazione continua (limitata) di un numero razionale (9) (se poi due grandezze sono tra loro incommensurabili il procedimento a loro applicato non avrebbe avuto termine (10)).

---

9. Per queste considerazioni rimandiamo, ad esempio, alle *Frazioni continue* di C. D. Olds, Zanichelli, Bologna 1968, pp. 24-25.

10. Cfr. P.H.Michel, *De Pythagore à Euclide*, op. cit., pp. 432-433; cfr. anche A. Frajese, *Attraverso la storia della Matematica*, Le Monnier, Firenze, 1969, p. 247 passim.

Infine, ricordano i sostenitori di questa ipotesi, anche le approssimazioni di $\sqrt{3}$ operate da Archimede sono alcune ridotte del suo sviluppo in frazione continua.

Notiamo una volta per tutte che i matematici greci non avevano cognizione dei numeri irrazionali, pertanto, anziché parlare di $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ e così via, essi consideravano i rapporti tra grandezze che risultano uguali a tali valori. Oppure consideravano i quadrati delle grandezze in questione i cui rapporti erano dunque uguali a 2 o a 3 e così via. Per inciso notiamo che fu questa la risposta alla scoperta di grandezze incommensurabili.

C'è da osservarte però che solo col senno del poi possiamo dedurre dall'algoritmo euclideo il procedimento di frazione continua visto che non abbiamo alcuna indicazione esplicita. Allorché le due grandezze prese in esame sono poi tra loro incommensurabili, il loro rapporto non può essere un numero (11) poiché i matematici greci, non avendo, come si è detto, il concetto di numero irrazionale, non potevano che considerare numeri interi o razionali con i quali è possibile rappresentare solo grandezze tra loro commensurabili. Anzi, la possibilità di un procedimento infinito, è usato da Euclide per stabilire l'incommensurabilità di due grandezze, ma la dimostrazione (*Elementi* X, 2) è del tutto teorica e non prende in considerazione le varie misure delle successive grandezze sempre più piccole che vi si trovano.

Riguardo alle ridotte di $\sqrt{2}$ abbiamo già visto, inoltre, che vengono calcolate in modo differente da quello che verrebbe dalla consapevolezza del suo sviluppo in frazione continua (12).

Ma l'argomento a nostro parere più forte contro l'ipotesi che i matematici greci potessero conoscere questo sviluppo, è proprio quello che coinvolge le ridotte considerate da Archimede per approssimare $\sqrt{3}$.

---

11. Si veda a questo proposito un significativo brano della *Metafisica* di Aristotele (1021 a, 3-7) il cui esame si trova in *Aristotele e l'incommensurabilità* di S. Maracchia, Archive for History of Exact Sciences, 21, 1980, pp. 213 sgg.

12. C'è da dire però che, fornendo le stesse successioni di numeri, la (2) e la (4) risultano sostanzialmente equivalenti. È possibile infatti da una ottenere l'altra.

Infatti, come è noto, e come osserva anche Teone a proposito dei numeri diagonali e laterali, le ridotte individuano alternativamente valori per difetto e per eccesso del rapporto tra diagonale e lato di un quadrato (13). Dovendo quindi calcolare un valore per difetto e uno per eccesso di $\sqrt{3}$, Archimede, se fosse stato a conoscenza del suo sviluppo in frazione continua, avrebbe considerato due ridotte successive e non, come fa, due ridotte tra loro non consecutive (14).

Ritorniamo però alla formula (3) $d_k^2 = 2l_k^2 + (-1)^k$ descritta da Teone allorché osserva che, poiché $d^2 = 2l^2$ (essendo d ed l diagonale e lato di uno stesso quadrato), con i numeri laterali e diagonali si ha un'alternanza:

$$\text{a volte } d_k^2 > l_k^2 \text{ essendo } d_k^2 = 2l_k^2 + 1$$

$$\text{a volte } d_k^2 > l_k^2 \text{ essendo } d_k^2 = 2l_k^2 - 1.$$

Questa osservazione potrebbe dare la chiave della formazione di tali numeri: poiché $d^2 = 2l^2$ ma non è possibile trovare due numeri interi soddisfacenti tale relazione (15), si sono cercati numeri interi che si avvicinassero il più possibile a questa relazione, cioè numeri che risolvessero, in definitiva, equazioni del tipo:

$$(5) \qquad x^2 = 2y^2 + 1 \qquad\qquad x^2 = 2y^2 - 1$$

e da ciò la determinazione per tentativi di alcune coppie di numeri (diagonali e laterali) risolventi tali equazioni e, successivamente, la determinazione della legge di formazione (2) che porta appunto ad approssimazioni sempre migliori di $\sqrt{2}$.

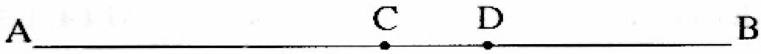
---

13. Giustificheremo tra poco questa osservazione.

14. Archimede considera $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ ma il valore per difetto è la nona ridotta e quello per eccesso la dodicesima.

15. Questo è noto alla matematica greca poiché è nota l'incommensurabilità delle due grandezze.

Si trovano negli *Elementi* di Euclide, come ricorda Proclo, due proposizioni (II, 9 e II, 10) nelle quali si riesce a dimostrare geometricamente che per i due segmenti AD e AC della figura, con C punto medio di un segmento AB e



D un punto qualsiasi di CB (16), per i quali evidentemente:

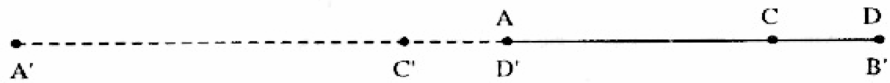
$$(6)\qquad \begin{cases} AD = 2CD + DB \\ AC = CD + DB \end{cases}$$

[relazioni simili a quelle indicate dalle (2)], si ha:

$$(7)\qquad AD^2 - 2AC^2 = 2CD^2 - DB^2$$

La (7) mostra che, a prescindere dal segno, la differenza $2CD^2 - DB^2$ rimane invariata se si costruiscono i due segmenti corrispondenti AC e AD mediante le (6). Si può dunque proseguire costruendo altri due segmenti A'D' e A'C' a partire da AD e AC che si trovino nella stessa relazione indicata dalle (6).

Ebbene, con C'D' = AC e A'C' = C'B' (D' = A e B' = D) si ha infatti:



$$(6')\qquad \begin{cases} A'D' = 2C'D' + D'B' = 2AC + AD \\ A'C' = C'D' + D'B' = AC + AD \end{cases}$$

per cui anche in questo caso, con la stessa dimostrazione geometrica di Euclide, si ottiene:

$$(7')\qquad A'D'^2 - 2A'C'^2 = 2AC^2 - AD^2$$

e così via per nuovi punti A'', D'', C'', ecc.

In tal modo, a partire da CD = DB = 1, si ottengono coppie di segmenti AD, AC; A'D', A'C', ecc. le cui lunghezze sono pertanto quelle dei numeri diagonali e laterali che conosciamo.

16. Questa è la proposizione II, 9; nella proposizione successiva il punto D è preso sul prolungamento di AB dalla parte di B.

In ogni caso, come è stato già osservato, il rapporto dei quadrati delle coppie dei segmenti ottenuti (AD^2 / AC^2, $A'D'^2 / A'C'^2$, $A''D''^2 / A''C''^2$, ecc.) tenderebbe a due.

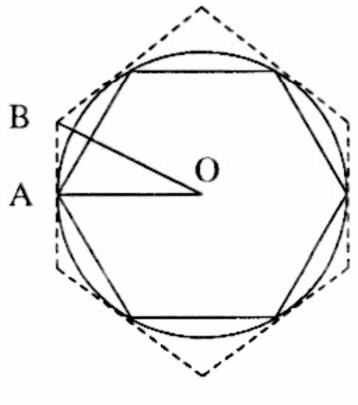
5. PRIMA ESTENSIONE DEI NUMERI DIAGONALI E LATERALI

Analogamente a quanto è stato fatto per l'approssimazione di $\sqrt{2}$, allorché il rapporto tra due grandezze m ed n è, come scriveremmo noi, $\sqrt{3}$ cioè se si ha $m^2 = 3n^2$, è possibile seguire una strada simile a quella vista.

Osserviamo intanto che un tale rapporto venne ottenuto da Archimede nell'opera *Misura del cerchio* allorché, considerando poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio, ottenne la famosa relazione:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \qquad \text{(cioè } \pi = 3{,}14 \ldots)$$

Partendo dall'esagono, egli si ferma a poligoni di 96 lati. Ebbene,



essendo AB metà del lato dell'esagono circoscritto si ha: $OA/AB = \sqrt{3}$.

Non seguiremo il procedimento di Archimede, notiamo solo che, essendo $A\hat{O}B = 30°$ segue $OA/AB = \cot g 30° = \sqrt{3}$.

Come sappiamo, Archimede usa poi le approssimazioni notevoli:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \qquad (17)$$

---

17. Per il procedimento di Archimede e per le approssimazioni indicate cfr. A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica* op.cit., pp. 285 sgg.

Notiamo , però, che anche nel *Teeteto* di Platone si trova la circostanza che il lato del quadrato di area 3 (e quindi, scriveremmo noi, il lato di misura $\sqrt{3}$) non è commensurabile con il lato del quadrato di lato 1 e cioé non il segmento lungo 1(18).

Ma, tornando all'analogia con l'approssimazione di $\sqrt{2}$, non essendo possibile risolvere l'equazione $m^2 = 3n^2$ con numeri interi, si saranno cercate coppie di numeri che si avvicinassero ad essa col risolvere equazioni del tipo:

(8) $$x^2 = 3y^2 \pm 1 \qquad x^2 = 3y^2 \pm 2$$

analoghe alla (3).

Anche in questo caso è possibile trovare facilmente per tentativi coppie di numeri risolventi le (8) o alcune di esse e risalire poi da tali soluzioni a delle leggi di formazione del tipo delle (2).

Si ottiene pertanto:

(9) $$\begin{aligned} m_{k+1} &= 2m_k + 3n_k \\ n_{k+1} &= m_k + 2n_k \end{aligned}$$

che forniscono, a partire dalla soluzione $m_1 = 1$, $n_1 = 1$ dell'equazione $x^2 = 3y^2 - 2$, le successioni

(10) $$\begin{array}{lccccc} m_n) & 1 & 5 & 19 & 71 & \dots \\ n_n) & 1 & 3 & 11 & 41 & \dots \end{array}$$

della stessa equazione, e, a partire dalla soluzione $m_1 = 2$, $n_1 = 1$ dell'equazione $x^2 = 3y^2 + 1$, porta alle successioni

(10') $$\begin{array}{lccccc} m_n) & 2 & 7 & 26 & 97 & \dots \\ n_n) & 1 & 4 & 15 & 56 & \dots \end{array}$$

6. EQUAZIONE DI PELL-EULERO

Le equazioni

$$d_k^2 = 2l_k^2 + (-1)^k$$
$$x^2 = 3y^2 \pm 1$$

sono casi particolari dell'equazione

$$x^2 = Ny^2 \pm 1 \qquad \text{(N numero intero non quadrato)}$$

che consentono di approssimare la $\sqrt{N}$.

18. V. Platone, Teeteto, 147c sgg.

Ebbene, nel caso ancora più particolare:

(11) $$x^2 = Ny^2 + 1 \text{ (oppure } x^2 - Ny^2 = 1\text{)}$$

essa si trova nel famoso *Problema dei buoi* enunciato da Archimede con N = 4.729.494. La più piccola soluzione del problema di Archimede porta comunque a numeri di oltre 200.000 cifre (19).

Questa equazione (11), da risolversi con numeri interi non nulli, prende il nome improprio di "*equazione di Pell-Eulero*" e fu studiata per secoli dai più grandi matematici.

Nella presunzione dell'esistenza di una soluzione, essa fu risolta da matematici arabi. Fu però Lagrange per primo a dimostrare, per ogni valore di N, l'esistenza di una soluzione dalla quale ricavarne poi infinite.

Tale operazione si trova risolta anche da Dirichlet con procedimenti che coinvolgono l'algebra astratta (20) e per essa *furono scritti numerosi lavori e il libro Gheschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$ (Storia dell'equazione $t^2 - Du^2 = 1$) da H. Konen (21).

19. Si veda ad esempio *Le scienze esatte nell'antica Grecia* di G. Loria, Hoepli, Milano, 1914, pp. 932 sgg. Si vedano anche il libro di H. Konen che verrà citato compiutamente più avanti e quanto ne scrive T. Heath in *Diophantus of Alexandria* (Cambridge, Univ. Press 1910) Section II, pp. 227 sgg.

20. V. ad esempio *Algèbre* di P. Dubreil, Gauthier-Villars, Paris 1946, pp. 202 sgg.

21. Leipzing, 1901. Nel libro vengono descritti i contributi, oltre che dei matematici arabi, di Fermat, Freniele, Wallis, Brouneker, Eulero, Lagrange, Gauss, Dirichlet e Jacobi.