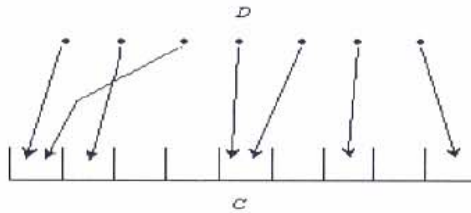


ASPETTI COMBINATORI DELLA LOGICA

Fabrizio Pascucci

I concetti dell'analisi combinatoria e soprattutto *l'angolo visuale* di questo ramo della matematica sono estremamente utili in molti campi dell'attività razionale.

Scegliamo come esempio uno dei modelli di base dell'analisi combinatoria: il modello delle biglie e delle scatole. Supponiamo di avere n biglie da mettere in m scatole. Ogni disposizione delle biglie nelle scatole corrisponde ad una funzione f di un insieme D di n elementi in un insieme C con m elementi: infatti una biglia può stare in una sola scatola e analogamente un elemento k_i di D corrisponde ad un solo elemento y_j di C , essendo $y_j = f(k_i)$.



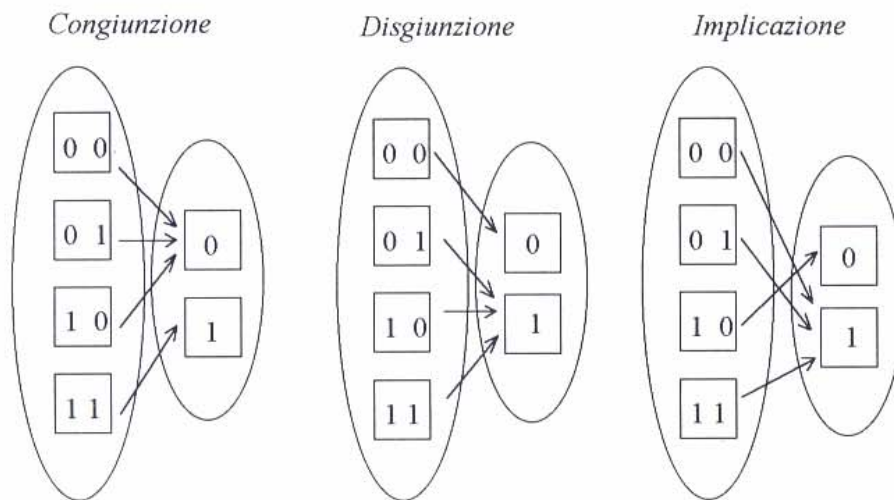
Per la prima biglia, si hanno m possibilità; passando alle successive, per ognuna ve ne sono ancora m . Il numero delle disposizioni delle biglie è quindi m^n e coincide con il numero delle funzioni dell'insieme D nell'insieme C : $|C|^{|D|}$.

Consideriamo ora due dei capitoli più noti della logica formale: il calcolo proposizionale e la teoria dei sillogismi.

(1) Gli enunciati possono essere combinati per formare enunciati complessi. Nel calcolo proposizionale si considerano solo combinazioni *verofunzionali*, nelle quali la verità o falsità dell'enunciato composto dipende dalla verità o dalla falsità degli enunciati semplici, detti *atomici*, perché non ulteriormente scomponibili. Si possono quindi considerare *funzioni di verità* a n argomenti, $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$, che danno il valore di verità di un enunciato composto da n enunciati atomici: ogni argomento è una variabile enunciativa, che può assumere due soli valori, identificati con 1 e 0 oppure con vero (T) e falso (F).

Il dominio D di una funzione di verità è dato da tutte le possibili assegnazioni di valori di verità alle n variabili enunciativie A_i ; poiché l'insieme dei valori di A_i ha cardinalità 2, risulta $|D| = |\{0; 1\} \times \dots \times \{0; 1\}| = 2^n$. Il numero delle possibili funzioni di verità coincide con l'insieme delle funzioni di D in $\{0; 1\}$ ed è pertanto 2^{2^n} .

Nel caso che n sia 2, le funzioni sono $2^{2^2} = 16$; tra queste si trovano i connettivi più noti: la congiunzione, la disgiunzione, l'implicazione.



(2) Uno dei temi più antichi della logica è il problema dei sillogismi, che Aristotele affrontò per primo in maniera scientifica.

Ricordiamo che Aristotele riduce un enunciato qualsiasi a due componenti, i nomi e i verbi; questi esprimono la relazione che intercorre tra il nome che fa da *soggetto* (S) e quello che rappresenta il *predicato* (P). Nel sillogismo aristotelico un enunciato segue necessariamente da altri due, che rappresentano le *premesse*: le premesse contengono i *termini* della conclusione (ovvero i nomi che svolgono le funzioni di soggetto e predicato) e li collegano ad un terzo termine, detto *medio*, che costituisce il perno dell'argomentazione.

La premessa che contiene il predicato della conclusione si chiama *premessa maggiore* e l'altra, che ovviamente contiene il soggetto della conclusione, è detta *premessa minore*.

Poiché in un enunciato i nomi svolgono due funzioni, *soggetto* e *predicato*, i sillogismi si suddividono in 2×2 classi, dette *schemata* o *figure*: infatti la premessa maggiore è del tipo MP o PM , a seconda che il termine medio M vi rappresenti il soggetto o il predicato, e per ognuna delle possibilità della premessa maggiore ce ne sono due analoghe per la minore: le figure risultano allora essere

	1° fig.	2° fig.	3° fig.	4° fig.
Premessa maggiore	$M P$	$P M$	$M P$	$P M$
Premessa minore	$\frac{S M}{S P}$	$\frac{S M}{S P}$	$\frac{M S}{S P}$	$\frac{M S}{S P}$
Conclusioni	$S P$	$S P$	$S P$	$S P$

Ogni proposizione, dal punto di vista quantitativo, appartiene ad uno dei seguenti tipi:

- A, *universale affermativa* (tutti gli uomini sono mortali);
- E, *universale negativa* (nessun uomo è mortale);
- I, *particolare affermativa* (qualche uomo è mortale);
- O, *particolare negativa* (qualche uomo non è mortale).

Ad esempio, il sillogismo

Nessun eroe è codardo
 Alcuni soldati sono codardi

 Alcuni soldati non sono eroi

risulta essere della 2° figura, poiché *soldati* è il soggetto S della conclusione, *eroi* e *codardi* sono rispettivamente il predicato P della conclusione e il termine medio M ; inoltre gli enunciati che compaiono nell'argomentazione sono del tipo E, I e O.

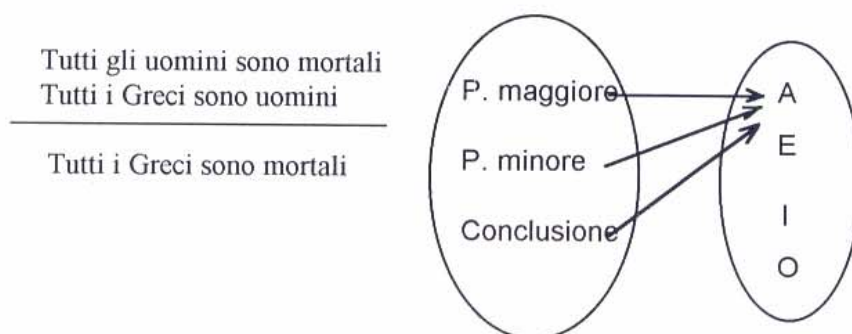
Una qualunque delle quattro figure è un insieme F di 3 elementi, gli enunciati, che poniamo in corrispondenza di un insieme di 4 valori, la classe $Q = \{A, E, I, O\}$: contando tutte le applicazioni di F in Q si danno quindi $4^3 = |Q|^{|F|}$ modi del sillogismo per ogni figura; si può anche dire che i modi sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di classe $k=3$ di $n=4$ elementi.

I modi possibili del sillogismo sono dunque

$$|F| \times |Q|^{|F|} = 4 \times 4^3 = 4^4 = 256;$$

in realtà, i sillogismi corretti, cioè quelli che assicurano la verità della conclusione qualora siano vere le premesse, sono 6 per ciascuna figura e quindi 24 in tutto, di cui Aristotele considera solo 19. Gli schemi in figura corrispondono ai sillogismi della prima figura e della seconda, che gli Scolastici denominano, rispettivamente, *Barbara*, *Celarent* e *Baroco*:

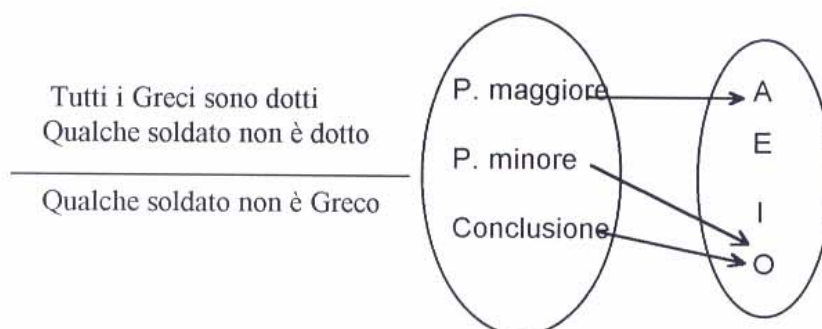
(Barbara)



(Celarent)



(Baroco)



(3) Nell'epoca della massima fioritura della civiltà araba un gruppo di astrologi arabi costruì una macchina, la *zairja*, basata su una corrispondenza tra le 28 lettere dell'alfabeto arabo e altrettanti concetti della filosofia araba; combinando le lettere secondo certi schemi si ottenevano enunciati dotati di significato, così da alimentare la leggenda della scoperta di una macchina pensante [cfr. P. Mc Corduck, *Machines Who Think*, 1979]. In uno dei suoi

tre viaggi in Africa, Raimondo Lullo (1235 - 1315) venne a conoscenza della zairja e ne fece il fulcro delle sue ricerche logiche, che culminarono nella stesura dell' *Ars Magna*. In sostanza, Lullo cercò di costruire dei "meccanismi" su base combinatoria in grado di formare enunciati accettabili e successivamente dei sillogismi validi. Elaborò quattro figure. La prima consiste in un cerchio, diviso in nove settori, detti *camere*; ciascun settore, contrassegnato da una lettera (*B, C, D, E, F, G, H, J, K*), corrisponde a nove nomi e ad altrettanti aggettivi (*Bonitas e bonus, Magnitudo e magnus,...*). Completa la figura un disco su cui è disegnata una stella che con le sue linee indica le combinazioni ammesse tra i concetti iniziali: ad esempio, *la bontà è grande* o *Dio è grande*, oppure, inversamente, *la grandezza è buona* o *la grandezza è divina*. La seconda figura, rappresentata da tre triangoli di colori diversi, serve a scegliere alcuni tra gli enunciati ottenuti mediante la prima, seguendo certi criteri (differenza, concordanza, contraddizione, ...). La terza figura, prendendo come "input" due enunciati produce il termine medio; la simulazione del procedimento sillogistico, che Lullo intende come processo di combinazione e sostituzione dei termini è finalmente portata a compimento dalla quarta figura. Questa è un sistema di tre dischi divisi in nove *camere*, di cui solo quello più esterno resta fermo interno mentre gli altri hanno un certo numero di rotazioni ammesse, corrispondenti ai sillogismi ottenibili.

Certamente i risultati di Lullo sono modesti e non sono esenti da obiezioni. Tuttavia le idee di Lullo affascinarono molti pensatori, come Leibniz e Hobbes, e, sia pur indirettamente Giuseppe Peano. Moritz Cantor ebbe a dire a proposito dell'opera di Lullo "...un miscuglio di logica, follia cabalistica e follia personale, in cui cadono, non si sa come, dei granelli di salutare buon senso."

Conclusioni. Abbiamo mostrato come uno strumento tipico dell'analisi combinatoria trovi applicazione in un campo apparentemente lontano da quello disciplinare e come più in generale sia suggestivo e fertile l'approccio combinatorio.

BIBLIOGRAFIA

1. M.CERASOLI, F. EUGENI, M. PROTASI. *Elementi di matematica discreta*, Zanichelli.
2. R. BLANCHE'. *La logica e la sua storia*. Ubaldini Editore.
3. L. GEYMONAT. *Storia del pensiero filosofico e scientifico. L'antichità e il medioevo*. Garzanti.
4. E. G. OMODEO. *L'automazione della sillogistica*. Le Scienze, Ottobre 1986, n. 218.