Ratio Mathematica 12
(1997), 73-78

UNE NOTE SUR LES GROUPES PERMUTABLES

Violeta Leoreanu[1]

RÉSUMÉ On montre, dans cette Note, que la catégorie $\mathcal{P}$ des groupes permutables est balancée.

INTRODUCTION.

D'abord, on rappelle quelques définitions et résultats importants concernants les groupes totalement permutables et les groupes permutables.

Définition 1.1. Soit G un groupe et soit n un entier plus grand que 1. On dit qu'un n-uple $(x_1,\ldots x_n)$ d'éléments de G est permutable s'il existe une permutation nontriviale $\sigma \in S_n$, ainsi que:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}$$

On dit qu'un sous-ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$ d'élements de G est permutable s'il existe deux permutations différentes s et t en S_n ainsi que:

$$x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)} = x_{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\tau(n)}$$

Définition 1.2. Un groupe G s'appelle *groupe totalement n-permutable* (ou n>1) si chaque n-uple $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de G est permutable.

[1] Faculty of Mathematics, Al.I.Cuza University, 6600 Iasi, Romania

On note par P_n la classe des groupes totalement n-permutables et on note par $P = \bigcup_{n>1} P_n$ la classe des groupes totalement permutables.

Définition 1.3. Un groupe G s'appelle *groupe n-permutable* (ou n>1) si chaque sous ensemble $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de G est permutable.

On note par Q_n la classe des groupes n-permutables et on note par $Q = \bigcup_{n>1} Q_n$ la classe des groupes permutables.

Théorème 1.4. ([2]) Un groupe fini G, ayant un nombre fini de générateurs est totalement permutable, si et seulement si, G est fini-par-abélien, c'est-à-dire s'il existe un sous groupe normal N, qui est abélien et a un index fini en G.

Théorème 1.5. ([3]) Un groupe G est totalement permutable, si et seulement si, G est fini par-abélien par-fini, c'est-à-dire s'il existe un sous-groupe normal N, d'index fini, ainsi que N' est fini. (N' est le sous-groupe dérivé de N.)

Un rôle important dans l'étude les groupes totalement permutables et des groupes permutables est joué par les FC-groupes.

Definition 1.6. Un élément $x \in G$ s'appelle *FC- élément* si x a un nombre fini des conjugués en G, c-à-dire $|G:C_G(x)| < \infty$.

Théorème 1.7. (Baer) ([6], Lemme 4.31) Pour chaque groupe G, les FC-éléments forment un sous-groupe caractéristique, qui s'appelle *FC- centre*.

Definition 1.8. Un groupe G s'appelle *FC-groupe* si G coïncide avec son FC-centre.

Théorème 1.9. ([3], Theorem 4.1) La classe des FC-groupes totalement permutables et la classe des groupes avec le sous--groupe dérivé fini coïncident.

Théorème 1.10. Un groupe G est permutable si G est fini par-abélien par-fini, c-à-dire s'il existe un sous-groupe normal N, d'index fini, ainsi que N' est fini.

Corollaire 1.11. La classe des groupes totalement permutables et la classe des groupes permutables coïncident.

Proposition 1.12. ([1], Proposition 2.10) Pour chaque $n \geq 3$, il existe un groupe G_n, d'ordre $(2^{j_n} - 1)j_n$ qui est n-permutable, mais il n'est pas totalement n-permutable, où $j_n = [\log_2(n!)]$.

LA CATÉGORIE $\mathcal{P}$.

On introduira une catégorie, notée par $\mathcal{P}$, qu'on appelle la catégorie des groupes permutables, pour laquelle:

- les objets de $\mathcal{P}$ sont tous les groupes permutables, c-à-dire $Ob\mathcal{P}=P=Q$;
- les morphismes de $\mathcal{P}$ sont les morphismes de groupes;
- le composé de morphismes est le composé de morphismes de groupes.

Remarques

1. La catégorie $\mathcal{P}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes Gr.
2. Dans la catégorie $\mathcal{P}$ on peut distinguer une chaîne des sous-catégories $\{Q_n\}_{n>1}$ où par Q_n on a noté la catégorie des groupes n-permutables.

Q_n est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}$ et pour tous $m, n \in N^*$, $1 < m < n$, Q_m est une sous-catégorie pleine de Q_n.

Définition 2.1. Une catégorie s'appelle *balancée* si chacun de ses monomorphismes est un morphisme injectif et chacun de ses épimorphismes est un morphisme surjectif.

Quoique sur la catégorie Gr on sache que c'est une catégorie balancée ([4], p.27), on ne peut pas dire la même chose sur toutes ses sous-catégories pleines. Il y a des sous-catégories pleines en Gr qui sont balancées, par exemple, la catégorie des groupes abéliens Ab ([4], p.26), mais il existe encore des sous-catégories pleines de Gr qui ne sont pas balancées, par exemple, la catégorie des groupes divisibles Div ([4], p.32).

Par la suite, on montrera que $\mathcal{P}$ est balancée.

Proposition 2.2. Si l'inclusion canonique $i: G_1 \to G_2$ est un épimorphisme en Gr, alors $G_1 = G_2$.

Démonstration. Soit $*$ un élément fixé, ainsi que $*$ n'apartient pas à l'ensemble facteur $(G_2 / G_1)_d = \{G_1 * g | g \in G_2\}$. Soit K le groupe des permutations de l'ensemble $(G_2 / G_1)_d \cup \{*\}$.
On définit les monomorphismes $t, s: G_1 \to K$ de cette maniére:

$$t(g) = t_g \text{ avec } tg(\hat{g}) = \widehat{gg'} \text{ et } t_g(*) = * \text{ et}$$

$$s(g) = s_g = \sigma t_g \sigma \text{, où } \sigma \in K \text{ est définie par } \sigma(\hat{1}) = *,$$

$$\sigma(*) = \hat{1} \text{ et } \sigma(\hat{g}) = \hat{g}, \text{ pour tout } \hat{g} \neq \hat{1}$$

On vérifie immédiatement que t et s sont des morphismes de groupes.
De plus, pour tout $g \in G_1$, on a $t(g) = s(g)$.

Puisque i est un épimorphisme on obtient $t = s$.
Pour tout $g \in G_2$ on a: $\hat{g} = t_g(\hat{1}) = s_g(\hat{1}) = (\sigma t_g \sigma)(\hat{1}) = \sigma t_g(*) = \sigma(*) = \hat{1}$ d'où $G_1 = G_2$.

La démonstration reste encore valable si on change la catégorie Gr avec chaque sous-catégorie Gr d'elle. La seule différence est qu'il faut satisfaire la condition que le groupe K soit un objet de la catégorie C.

Par conséquent, on obtient le lemme suivant:

Lemme 2.3. Si l'inclusion canonique de l'i:$G_1 \to G_2$ est un épimorphisme en P et si K, le groupe des permutations de l'ensemble $(G_2 / G_1)_d \cup \{*\}$ où $* \notin (G_2 / G_1)_d$ est un groupe permutable, alors $G_1 = G_2$.

Théorème 2.4. La catégorie $\mathcal{P}$ est balancée.

Démonstration. La démonstration du fait que chaque monomorphisme de $\mathcal{P}$ est un morphisme injectif est similaire à celle pour Gr.

Soit $u:G_1 \to G_2$ un épimorphisme en $\mathcal{P}$ $(G_1, G_2 \in \mathcal{P})$. En décomposant canoniquement $u = iu_1$, où $u_1: G_1 \to \text{Im } u$ et $i: \text{Im} \to G_2$, on obtient que i est un épimorphisme en $\mathcal{P}$.

En appliquant pour G_2 le Théorème 1.10 il résulte l'existence du sous-groupe N, normal en G_2, d'index fini, ainsi que N' soit fini. Par conséquent, $N \cdot \text{Im } u \le G_2$ et $|G_2 : (N \cdot \text{Im } u)| < \infty$.

En décomposant maintenant $i = i_2 i_1$, où $i_1: \text{Im } u \to N \cdot \text{Im } u$ et $i_1: N \cdot \text{Im } u \to G_2$ il résulte que i_2 est un épimorphisme en $\mathcal{P}$.

Soit K le groupe des permutations de l'ensemble $(G_2 / N \cdot \text{Im } u)_d \cup \{*\}$ où $* \notin (G_2 / N \cdot \text{Im } u)_d$.

On supposera qu'il existe N, sous-groupe normal en $G_2, M \neq G_2$, ainsi que Im u soit un sous-groupe en M. On considérera du groupe G_2 au groupe facteur G_2 / M la projection canonique p et le morphisme nul 0. Parce que $p = 0$ en Im u, il résulte $p = 0$ en G_2, en vertue du fait que i est un épimorphisme. On obtient $M = G_2$, contradiction.

Donc, le plus petit sous-groupe normal de G qui contient Im u est G_2. Par conséquent, chaque $n \in N$ peut être écrit $n = n_1 \cdot u(x) \cdot n_1^{-1}$ où $n_1 \in N, x \in G_1$.

Si $N \subset \text{Im } u$, alors on obtient $G_2 = \text{Im } u$ (Lemme 2.3).

Si $N \not\subset \text{Im } u$, alors il existe $n \in N - \text{Im } u$ et pour ce $n, n_1 \in N - \text{Im } u$.

On obtient $[n_1, n^{-1}] = u(x) \cdot n^{-1}$ et parce que N' est fini il résulte que $\{u(x) \cdot n^{-1}\}_{n \in N}$ est un ensemble fini, donc $|G_2 : \text{Im } u| < \infty$.

Conformément au Lemme 2.3, on obtient $G_2 = \text{Im } u$.

Donc, u est un morphisme surjectif en $\mathcal{P}$.

Proposition 2.5. Pour tout u, un monomorphisme en $\mathcal{P}$, il existe $n_0 \in N^*, n_0 \ge 2$, ainsi que u est un monomorphisme en Q_m, pour tout $m \ge n_0$. Pour tout u, un épimorphisme en $\mathcal{P}$, il existe $n_0 \in N^*, n \ge 2$, ainsi que u est épimorphisme en Q_m pour tout $m \ge n_0$.

Demonstration. On applique la définition d'un monomorphisme dans une catégorie

$n_0 = \max(K(G_1), K(G_2))$ où $K(G) = \min\{n \in N^*, n \geq 2, G \in Q_n\}$
Fait analogue pour les épimorphismes.

Proposition 2.6. La catégorie $\mathscr{P}$ a des noyaux et des conoyaux de double flèhe.

Demonstration. En Gr, pour $u, v : X \to Y$ il existe $(K, k) = Ker(u, v)$ où K est un sous-groupe de X. Donc, si $x \in P^{\cdot}$, alors $K \in P$. Fait analogue, en $Gr(p; Y / N) = Coker(u, v)$ où N est le sous-groupe normal engendré de $u(x)v(x)^{-1}, x \in X$ et si $Y \in P$, alors $Y / N \in P$.

RÉFÉRENCES

[1] Blyth, D., *Rewriting Products of Group Elements* . I. Journal of Algebra 116 (1988), 506--521.
[2] Curzio, M., Longobardi, P. and Maj, M. *Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi*. Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Fis. VIII, 74 (1983), 136--142.
[3] Curzio, M., Longobardi, P., Maj, M. and Robinson, D., *A permutational property for groups.* Arch. Math. 44 (1985), 385--389.
[4] Radu, G. Algebra categoriilor si functorilor. Ed. Junimea, Iasi, 1988.
[5] Restivo, R. and Reutenauer, C., *On the Burnside problem for semigroups.* J. Algebra 89 (1984), 102--104.
[6] Robinson, D.J.S., *Finiteness conditions and generalized soluble groups.* Part I, Springer Verlag, Berlin. Heidelberg. New York, 1972.