# Numeri q-perfetti e q-amicabili di seconda specie e altre generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie

***Eugeni Franco***
*Università degli studi di Teramo*

***Ippoliti Gianluca***
*Dottorando dell'Università degli studi di Teramo*

Nel presente lavoro si affronta, tra le curiosità matematiche, il problema dei numeri perfetti di seconda specie, riprendendo anche un lavoro del 1979 di Franco Eugeni e Bruno Rizzi, utilizzato come preambolo e spunto per le problematiche lasciate aperte su tali concetti, e le loro generalizzazioni tra le quali quella dei numeri $q$-perfetti di $2^a$ specie. Il presente file si compone infatti di:

1. *Su alcune generalizzazioni dei numeri perfetti*, tratto dal periodico di matematiche serie V Volume 56 del 1980 riguardanti i numeri 1-perfetti di $2^a$ specie e alcune problematiche dei numeri $q$-perfetti di $2^a$ specie. Il testo è corredato di note scritte in questa occasione.

2. Un lavoro che appare qui per la prima volta in cui è trattato, per quanto sia possibile, il caso $q > 1$ per la suddetta generalizzazione dei numeri perfetti di $2^a$ specie e una diversa generalizzazione dei numeri perfetti di $2^a$ specie insieme a risultati sul problema delle coppie di numeri amicabili di seconda specie, per entrambe le generalizzazioni.

## Introduzione.

Il problema dei numeri perfetti ha origini antiche, essendo dovuto ad Euclide (IV secolo a. C.). Egli definì numeri perfetti quei naturali la cui somma dei divisori inferiori eguaglia il numero stesso. Definita la funzione $\sigma$ come $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ è chiaro che il problema si può esprimere nei seguenti termini: $n$ è perfetto se e solo se $\sigma(n) - 2n = 0$. Euclide stesso, posto il problema, caratterizzò completamente i numeri perfetti pari, mentre ancora oggi non è stato risolto, in maniera generale, quello dei perfetti dispari. In particolare non si conosce nessun numero perfetto dispari e né se ne esistano. La cosa però veramente interessante è che intorno al problema dei numeri perfetti siano nati, nel corso dei secoli, altri concetti, generalizzazioni e problemi che riguardano tali generalizzazioni, problemi, alcuni di essi tuttora irrisolti, che hanno affascinato schiere di matematici *professionisti* e dilettanti, uomini di cultura, studiosi e un vero e proprio popolo di *curiosi*. In questo lavoro ci occupiamo, appunto, di una parte di questi problemi, con qualche risultato originale. Una di queste problematiche riguarda le coppie di numeri amicabili che sono quelle coppie di numeri naturali per le quali la somma dei divisori inferiori dell'uno eguaglia il valore dell'altro (è facile provare che $(m,n)$ è una coppia di numeri amicabili se e solo se $\sigma(n) = \sigma(m) = m + n$).

Nella prima parte riportiamo anastaticamente l'articolo summenzionato, corredato, però da note a piè di pagina scritte per l'occasione, dove incontreremo una prima variazione, la più nota, sul concetto di numero perfetto (ovvero quella di numero perfetto di seconda specie) e una sua generalizzazione (ovvero quella di numero $q$-perfetto di seconda specie).

Nella seconda parte riprendiamo alcuni concetti/problemi della prima parte e forniamo una ulteriore generalizzazione dei numeri perfetti (ovvero quella che noi abbiamo chiamato numeri perfetti di seconda specie di ordine $k$) e il legame tra le due diverse generalizzazioni e risolviamo completamente i problemi collegati alle definizioni generalizzate dei numeri amicabili di seconda specie. Si sono usate, qui, le stesse notazioni e simboli della prima parte tranne per quello che riguarda la funzione prodotto dei divisori di un numero naturale, per la quale nella seconda parte si è preferito usare $\pi(n)$ piuttosto che $p(n)$, e per l'insieme dei numeri primi che, sempre nella seconda parte, si è denotato con $\mathbb{P}$.

**1.**

Franco Eugeni - Bruno Rizzi

# Su alcune generalizzazioni dei numeri perfetti

## 1. *Introduzione*

E' ben noto come dai Pitagorici in avanti i numeri perfetti siano stati oggetto di osservazioni, studio, congetture. Nell'antichità si partì dalla osservazione che i numeri 6 e 28 sono eguali alla somma delle loro parti aliquote, ossia alla somma dei loro divisori inferiori al numero stesso. Risulta cioè:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

anzi la divisione tramandataci da Nicomaco (I sec. d. C.) e Teone di Smirne (III sec. d. C.) è più fine, nel senso che dividevano i numeri in *mancanti, perfetti, abbondanti* a seconda che la somma delle parti aliquote è minore, eguale o maggiore del numero stesso — così 8 è un numero mancante, 12 è un numero abbondante, risulta cioè:

$$8 > 1 + 2 + 4 \qquad\qquad 12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$$

Non si sa se esistono numeri perfetti dispari a parte il fatto che, come ha dimostrato Catalan, se ne esistono devono avere almeno 45 cifre. Abbiamo accennato ai numeri perfetti pari, questi come hanno dimostrato Euclide (III sec. a. C.) ed Eulero (1707 - 1783), sono tutti della forma

$$E_p = 2^{p-1} \quad (2^p - 1)$$

essendo $p$ e $2^p$ - 1 numeri primi.

Non si sa attualmente se i numeri perfetti pari sono in numero finito o infinito, dipendendo ciò dalla caratterizzazione dei numeri primi di Mersenne (1588 - 1648):

$$2^p - 1.$$

Si può ben dire che lo studio di questi numeri ha condotto ad importanti risultati relativamente alla conoscenza concreta di numeri primi via via più grandi. Così ad esempio negli anni 50 il più grande numero primo conosciuto era $2^{127}$ - 1, oggi $2^{44497}$ - 1, numero formato da ben 13395 cifre.

Le enormi difficoltà incontrate nello studio dei numeri perfetti hanno fatto sì che i matematici affrontassero problemi che presentano varianti e analogie con gli stessi.

Così alla fine del secolo scorso sono nati i numeri perfetti di 2ª specie che presentano la variante di considerare il prodotto, anzichè la somma, delle parti aliquote.

Nel nostro lavoro abbiamo ottenuto nuovi risultati su generalizzazioni dei numeri perfetti di 2ª specie.

## 2. *Definizioni e risultati*

Come si legge (1) nel Dickson, E. Lionnet (1879) chiama: *numeri perfetti di 2ª specie quei naturali n, più grandi di uno* ($n \in N_2$), *che sono uguali al prodotto dei divisori inferiori* (cioè diversi da $n$ stesso) di $n$.

In simboli se $p(n)$ denota il prodotto di *tutti* i divisori di $n$, risulta se $n$ è perfetto di 2ª specie:

$$p(n) = n^2 \tag{2.1}$$

(ad es. se $n = 8$ poichè i divisori di 8 sono 1, 2 ,4, 8 il loro

---

(1) Cfr [2] pag. 58

prodotto è 64 perciò 8 è un numero perfetto di 2ª specie).

Sarà utile nel seguito dedurre (1) una espressione della funzione aritmetica $p(n)$.

Se $f$ è una qualsiasi funzione *incondizionatamente additiva*, i. a. (2) e se $\nu(n)$ indica il numero dei divisori di $n$ funzione che come è noto quando $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$ si esprime tramite la

$$\nu(n) = \prod_1^r (1 + \alpha_i)$$

vale (3) *l'identità di Pellegrino* (caratteristica per le funzioni incondizionatamente additive):

$$\sum_{d|n} f(d) = \frac{1}{2} \nu(n) f(n) \qquad (2.3)$$

Dalla identità (2.3) posto $f(n) = \log n^k$ ($k \in N_1$) si ha:

$$\sum_{d|n} \log d^k = \log \prod_{d|n} d^k = \log \quad n^{k\nu(n)/2}$$

da cui detto $p_k(n)$ il prodotto delle potenze *k-me* dei divisori di $n$ si ottiene (4):

---

(1) Una espressione si trova in Cipolla [1] che la deduce da considerazioni sul cosiddetto *fattoriale integrale* dicendo che è una formula nota, ma senza citarne le « introvabili » fonti.

(2) Una funzione aritmetica è *i. a.* se $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ Cfr. ad es. B. Rizzi [4].

(3) Cfr. F. Pellegrino [3], si tratta di una comunicazione ad un congresso U.M.I. del 1951 ove la formula è data senza dimostrazione

(4) Si noti che come facilmente si prova $n^{k\nu(n)/2}$ è sempre intero, poichè se uno almeno degli esponenti di un primo che divide $n$ è un dispari $\nu(n)$ è pari. Altrimenti se tutti gli esponenti dei primi che dividono $n$ sono pari, $n$ è un quadrato (perfetto).

$$p_k(n) = \prod_{d|n} d^k = n^{k\,\nu(n)/2} \qquad (2.4)$$

che per $k = 1$, posto $p_1 = p$ fornisce l'espressione richiesta.

Diamo la seguente dimostrazione del:

*Teorema* (2.1) (*di Lionnet*): *I numeri perfetti* di 2ª specie *sono tutti e soli i cubi di un numero primo e i numeri secondi* (prodotto di due primi distinti).

Dim. Si vede direttamente che se $n = p^3$ oppure $n = p_1 p_2$ vale la (2.1).

Inversamente se $n \in N_2$ soddisfa la (2.1) riesce per la (2.4):

$$p(n) = n^{\nu(n)/2} = n^2$$

e quindi i numeri perfetti di 2ª specie sono tutti e soli quelli per cui:

$$\nu(n) = 4.$$

Ora se $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$ deve essere per la (2.2)

$$\prod_1^r (1 + \alpha_i) = 1.4 = 2.2$$

Dunque si può avere che $r = 1$ con $1 + \alpha = 4$, $\alpha = 3$ oppure $r = 2$ con $1 + \alpha_1 = 1 + \alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e quindi è $n = p^3$ ovvero $n = p_1 p_2$ *C.V.D.*

Una prima generalizzazione potrebbe nascere chiamando *amicabili di 2ª specie una eventuale coppia* (m, n) *di naturali tra loro distinti, maggiori, di uno, tali che il prodotto dei divisori inferiori dell'uno eguaglia l'altro.*

Tuttavia questa definizione è una defínzione vuota, in quanto come proveremo *siffatti numeri non esistono*. Premettiamo il

*Lemma: Condizione necessaria a che* m, $n \in N_2$, $m \neq n$,

---

[1] Diamo qui una breve dimostrazione: l'*identità di pellegrino* è equivalente a $\nu(n) \cdot f(n) = 2\sum_{d|n} f(d)$. Indicando con $d_1\ d_2, \ldots, d_{\nu(n)}$ i divisori di $n$ e con $d_i'$ il divisore "complementare" di $d_i$

*siano amicabili di 2ª specie è che m e n abbiano gli stessi fattori primi.*

*Dim.* La definizione degli « eventuali » numeri amicabili di 2ª specie si traduce in formule nella:

$$p(n) = p(m) = m \cdot n$$

ovvero per la (2.4) nella:

$$m^{\nu(m)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

Essendo $m, n \in N_2$ è $\nu(m) \geq 2$, $\nu(n) \geq 2$, segue che se $p|m$ allora necessariamente $p|n$ ed inversamente. *C.D.V.*

Dimostriamo poi il:

*Teorema* (2.2): *Non esistono numeri amicabili di 2ª specie.*

*Dim:* Siano $m, n \in N_2$ con $m \neq n$ due eventuali numeri tra loro amicabili di 2ª specie. Posto

$$n = \prod_{1}^{r} p_i^{\alpha_i} \quad , \quad m = \prod_{1}^{r} p_i^{\beta_i} \quad , \quad \text{segue:}$$

$$m^{\nu(n)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

da cui si deducono le identità:

$$\prod_{1}^{r} p_i^{\alpha_i \nu(n)/2} = \prod_{1}^{r} p_i^{\beta_i \nu(n)/2}$$

$$\alpha_i \nu(m) = \beta_i \nu(n) = 2(\alpha_i + \beta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Posto, come è usuale (1), $\Omega(n) = \sum_{1}^{r} \alpha_i$, e som-

(1) La funzione $\Omega(n)$ è una funzione incondizionatamente additiva (cfr. [4]) che esprime il numero dei fattori distinti e no di $n$.

---

ovvero tale che $n = d_i \cdot d_i'$, si ha, essendo $f$ incondizionatamente additiva, $f(n) = f(d_i) + f(d_i')$, $\forall\ i = 1, \dots, \nu(n)$.

Si ha, allora, che $\sum_{i=1}^{\nu(n)} f(n) = \sum_{i=1}^{\nu(n)} f(d_i) + f(d_i')$ cioè $\nu(n) \cdot f(n) = 2 \sum_{d|n} f(d)$.

mando le precedenti si deduce, l'identità:

$$(*)\quad \Omega(m)\,\nu(m) = \Omega(n)\,\nu(n) = 2\,\Omega(m \cdot n)$$

per la coppia $(m, n)$. Mostriamo che tale relazione non può sussistere per alcuna coppia di numeri. Ad esempio scrivendo:

$$\begin{cases} \Omega(m)\,\nu(n) = 2\,\Omega(n) + 2\,\Omega(m) \\ \Omega(n)\,\nu(n) = 2\,\Omega(n) + 2\,\Omega(m) \end{cases}$$

si ricava:

$$(\nu(m) - 2)\,\Omega(m) = 2\,\Omega(n)$$

$$(\nu(n) - 2)\,\Omega(n) = 2\,\Omega(m)$$

da cui:

$$(\nu(m) - 2)\,(\nu(n) - 2) = 4.$$

Da questa ultima, necessariamente vera se $m$, $n$ soddisfano la ipotesi iniziale, si deducono le due alternative:

$$\begin{cases} \nu(n) = 4 \\ \nu(m) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu(m) = 6 \\ \nu(n) = 3 \end{cases}$$

Nel primo caso per il Lemma premesso $n$ ed $m$ sono o entrambi il cubo di un primo o entrambi un numero secondo e quindi tra loro eguali contro l'ipotesi.

Nel secondo caso da $\nu(n) = 3$ si deduce $n = p^4$ e quindi sempre per il Lemma: $m = p^{\alpha}$ con $\alpha + 1 = 6$.

Ma come si prova direttamente $p^4$ e $p^7$ non possono essere amicabili di 2ª specie. C.V.D.

Non è possibile dunque per il teorema provato considerare l'insieme degli amicabil di 2ª specie essendo questi *vuoto*.

In questo contesto si può anche inquadrare un vecchio problema posto (1) da Paul Halcke (1719):

*Determinare i numeri naturali* $n \in N_2 - \mathscr{P}$ *per i quali esistano* $q, m \in N_1$ *tali che il prodotto dei divisori di* n *che non superano* n *sia* $m^q$.

Il problema per via della (2.4) si traduce nella:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{\nu(n)}{2} - 1} = m^q \tag{2.5}$$

Il problema di Halcke è completamente risolto dal seguente teorema che non ci risulta noto:

*Teorema* (2.3): *Fissato comunque* $n \in N_2 - \mathscr{P}$, *con* $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$, *la relazione* (2.5) *è soddisfatta da tutte e sole le coppie* (q, m) *tali che*:

$$q \mid \alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, r \tag{2.6}$$

*e con* m *avente gli stessi fattori primi di* n, *cioè del tipo*:

$$m = \prod_1^r p_i^{\beta_i} \qquad \text{e con gli esponenti dati dalle:}$$

$$\beta_i = \frac{1}{q} \cdot \alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) \tag{2.7}$$

*Dim.* Ogni coppia $(q, m)$ soddisfacente le (2.6) e (2.7) soddisfa (2.5).

---

(1) [2] pag. 158. Se $n = 1$, o $n \in \mathscr{P}$ si hanno casi così banali e non significativi che è opportuno escludere dal problema generale.

Inversamente se $(m, q)$ è una coppia soddisfacente la (2.5) e cioè tale che:

$$n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = \prod_{1}^{r} p_i^{\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2}-1\right)} = m^q$$

per essere $\nu(n) \neq 2$ $m$ ha necessariamente gli stessi fattori primi di $n$ e posto $m = \prod_{1}^{r} p_i^{\beta_i}$ risulta:

$$\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1\right) = \beta_i \, q \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

e quindi le (2.6) con gli esponenti $\beta_i$ di $m$ dati dalle (2.7). C.V.D.[2]

Un caso particolare del *problema di Halcke* è quello dei numeri (1) che chiameremo $q$-perfetti di 2ª specie.

Chiamiamo così *quei naturali* n $\in N_2$ *tali che il prodotto dei divisori inferiori eguaglia il prodotto di* k *numeri eguali ad* n. In simboli:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = n^q \tag{2.8}$$

ovvero:

$$p(n) = n^{q+1} \tag{2.9}$$

---

(1) Un naturale $n$ si dice *q-perfetto di 1ª specie* quando la somma dei divisori di $n$, inferiori ad $n$, eguaglia la somma di $q$ naturali eguali ad $n$. In simboli $\sigma(n) = (q+1)\, n$. Per $q = 1$ si hanno i perfetti di 1ª specie.

Si tratta dunque del problema di Halcke, per $m = n$. Da notare che per $q = 1$ si ritrova la definizione dei numeri perfetti di 2ª specie. Il teorema (2.3) si specializza nel seguente:

*Teorema* (2.4): *Fissato comunque* n $\in N_2 - \mathcal{P}$, C.N.E.S. *a che* n *sia* q-perfetto *è che sia*:

$$\nu(n) = 2(q + 1) \tag{2.10}$$

*Dim.* Segue subito dalla dimostrazione del teorema precedente ripetuta in questo caso, osservando che la relazione:

$$\alpha_i \left( \frac{\nu(n)}{2} - 1 \right) = \beta_i q$$

per essere $\alpha_i = \beta_i$ e per il fatto che $\frac{\nu(n)}{2} - 1$ non è in generale un intero si scrive:

$$\nu(n) - 2 = 2q.$$

Vogliamo ora pervenire, fissato q, ad una costruzione dei numeri q-perfetti. Il problema è quello di trovare tutti

gli $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$ tali che:

$$\nu(n) = \prod_1^r p_i^{\alpha_i} = 2(q + 1)$$

Siano: $m_1, m_2, \ldots, m_k$ un qualsiasi sistema *completo* di $k$ divisori di $2(q + 1)$, cioè tali che $\prod_1^k m_i = 2(q + 1)$ e sia $1 \leq k \leq \Omega(2(q + 1))$. Gli interi $n$ aventi $k$ fattori primi arbitrari $p_1, \ldots, p_k$ sono $q$-perfetti se e solo se gli

---

[2] Naturalmente questo significa che $\forall\, n \in \mathbb{N}_1 - \mathbb{P}$, esiste un'opportuna scelta della coppia $(m, q)$ in modo che l'identità (2.5) sia vera. Precisamente se $n$ non è un quadrato perfetto (dunque $\nu(n)$ è pari ed è comunque $\nu(n) > 2$ quindi $\frac{\nu(n)}{2} - 1 \in \mathbb{N}_1$): $q = \frac{\nu(n)}{2} - 1$ e $\beta_i = \alpha_i$ ( dunque $m = n$);

se $n$ è un quadrato perfetto (dunque $\alpha_i \in 2\mathbb{N}$, $\nu(n)$·è dispari ma comunque $\nu(n) > 2$): $\beta_i = \frac{\alpha_i}{2}$ (dunque $m = \sqrt{n}$ ) e $q = \nu(n) - 2$.

esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ degli stessi sono dati dalle relazioni:

$$\alpha_i = m_i - 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

al variare, in tutti i modi possibili, del sistema completo di $k$ divisori.

Così ad esempio se $q + 1 = p \in \mathscr{P}$ si hanno i numeri del tipo $p_1^{\alpha}$ e $p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2}$ essendo $k=1, 2$ con $\alpha=2(q + 1)$, e $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 2_q + 1 = p\text{-}1$ e cioè i numeri del tipo $p_1^{\,2\,(q+1)}$, $p_1\, p_2^{\,2q+1}$ con $p_1$ e $p_2$ arbitrari sono tutti e soli i numeri $q$-perfetti quando $q+1$ è primo.[3]

## BIBLIOGRAFIA

1 M. CIPOLLA — *Sui principi del calcolo artimetico-integrale.* Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali, serie 5°, vol. VIII, Catania, 1915

2 L. E. DICKSON — *History of the theory of numbers* vol. I, Chelsea, New Work, (1971).

3 F. PELLEGRINO — *Sviluppi moderni del calcolo numerico-integrale di Michele Cipolla.* Atti IV Congresso U.M.I., Taormina, 1951.

4 B. RIZZI — *L'albero e il traliccio degli interi.* Periodico di Matematiche; serie V, vol. 49, 1973.

[3] Refuso si stampa: $\alpha = 2q + 1$ e $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = p - 1 = q$ quindi $p_1^{2q+1}$, $p_1 p_2^q$ con $p_1$ e $p_2$ primi arbitrari distinti sono tutti e soli i numeri $q$-perfetti di 2ª specie quando $q + 1$ è primo.

## 2.1 Le generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie.

Le generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie più note sono di due tipi. la prima l'abbiamo vista nella prima parte e riguarda i numeri $q$-perfetti di $2^a$ specie che qui, brevemente, richiamiamo e sulla quale puntualizziamo i risultati noti.

**Definizione 2.1.1.** Sia $q \in \mathbb{N}_1$, un numero $n \in \mathbb{N}_2$ è detto $q$-perfetto di $2^a$ specie se il prodotto dei suoi divisori inferiori ad $n$ eguaglia la potenza di ordine $q$ di $n$ stesso.

È chiaro che per $q = 1$ si ritrovano i numeri perfetti di $2^a$ specie che qui chiameremo, dunque, 1-perfetti di $2^a$ specie. Utilizzando la funzione π, che associa ad un numero $n$ il prodotto di tutti i suoi divisori: $\pi(n) = \prod_{d|n} d$, un numero $n$ è $q$-perfetto di $2^a$ specie se $\frac{\prod_{d|n} d}{n} = n^q$ ovvero se $\prod_{d|n} d = n^{q+1}$. Si ha così modo di sfruttare l'identità $\pi_k(n) = \prod_{d|n} d^k = n^{k\frac{\nu(n)}{2}}$, (2.4) della prima parte con $k = 1$, dove con $\nu(n)$ si è indicata la funzione numero di divisori.

Sarà appena il caso di ricordare che, se $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ è la fattorizzazione in primi di $n$, l'espressione per $\nu(n)$ è data da $\nu(n) = \prod_{i=1}^{r} (1+\alpha_i)$, come già visto nella prima parte. È questa una delle più note funzioni aritmetiche insieme alla funzione $\sigma$, somma dei divisori, già incontrata con i numeri perfetti di $1^a$ specie, la quale è moltiplicativa[4]. Ricordiamo inoltre che $\nu(0)$ non è definita, $\nu(1) = 1$[5], $\nu(n) = 2$ se e solo se $n$ è primo, $\nu(n)=3$ se e solo se $n$ è il quadrato di un primo[6], $\nu(n) \geq 4$ per tutti gli altri naturali, dove l'uguaglianza si ha solo per i numeri secondi (non quadrati) e per i cubi di un primo i quali, come abbiamo già visto nella prima parte, costituiscono tutti e soli i numeri 1-perfetti di $2^a$ specie. Infine ricordiamo (vedi nota 4 della prima parte) che $\nu(n)$ è pari se e solo se $n$ non è un quadrato perfetto e, quindi, $n^{\frac{\nu(n)}{2}}$ è una potenza intera di $n$ (o della sua radice quadrata, se $n$ è un quadrato perfetto).

---

[4] Una funzione aritmetica $f$ è moltiplicativa se $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ $\forall$ $m, n \in \mathbb{N}_1$ tali che $(m, n) = 1$, ovvero relativamente primi tra loro.

[5] Sebbene 1 soddisfi l'uguaglianza **(2.1.1)**, per definizione esso non è $q$-perfetto qualunque sia il valore di $q$.

[6] Questi ultimi due casi contemplano tutti numeri che, in analogia con quanto accade con i numeri perfetti di prima specie, a partire dalla definizione 2.1.2 chiameremo $q$-mancanti di seconda specie, qualunque sia il valore di $q \in \mathbb{N}_1$.

A questo punto possiamo continuare dicendo che un numero $n \in \mathbb{N}_2$ è $q$-perfetto di 2ª specie se e solo se

**(2.1.1)** $$n^{\frac{\nu(n)}{2}} = n^{q+1},$$

ovvero, essendo $n > 1$, se e solo se $\frac{\nu(n)}{2} = q + 1$ ovvero se e solo se, infine, $\nu(n)=2(q+1)$.

Dunque essere $q$-perfetto per $n \in \mathbb{N}_2$ dipende solo ed esclusivamente dal numero dei suoi divisori e dalla fattorizzazione di $2(q + 1)$.
Di seguito riportiamo una prima casistica non generale di numeri $q$-perfetti di seconda specie al variare di $q$, per i quali non riportiamo le dimostrazioni.

| Valori di $q$ | Valori di $\nu(n)$ | Caratterizzazione dei numeri $q$-perfetti di 2ª specie |
|---|---|---|
| $q = 0$ | $\nu(n) = 2$ | Numeri primi |
| $q = 1$ | $\nu(n) = 4$ | Numeri perfetti di 2ª seconda specie, ovvero numeri secondi non quadrati oppure cubi di un primo |
| $q = 2$ | $\nu(n) = 6$ | $n = p_1^5$ oppure $n = p_1^2 p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro |
| $q = 3$ | $\nu(n) = 8$ | $n = p_1^7$ oppure $n = p_1^3 p_2$ oppure $p_1 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro |
| $q = 4$ | $\nu(n) = 10$ | $n = p_1^9$ oppure $n = p_1^4 p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro |
| $q = 5$ | $\nu(n) = 12$ | $n = p_1^{11}$ oppure $n = p_1^5 p_2$ oppure $n = p_1^3 p_2^2$ oppure $p_1^2 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro |

E se estendessimo la definizione di numeri $q$-perfetti a valori di $q$ non interi? In questo caso si seguiterebbero ad avere numeri $q$-perfetti a condizione che $2q \in \mathbb{N}_1$, più precisamente $q = \frac{m}{2}$ per qualche $m \in \mathbb{N}_1 - 2\mathbb{N}_1$.

In tal caso la condizione $\nu(n) = 2(q + 1)$ diventa $\nu(n) = m + 2$ con $m$ dispari e tutto dipende dalla fattorizzazione di $m + 2$. Possiamo dunque affermare che i valori ammissibili per $q$, ovvero quei valori che rendono non vuota la definizione di numeri $q$-perfetti di 2ª specie sono quelli dell'insieme $Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ dove si è usato l'indice 0 per distinguerlo dall'insieme $Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_1\}$ che in seguito useremo. Riportiamo, di seguito una tabella con i primi valori non interi di $q$, anche questa senza dimostrazioni.

| Valori | Valori | Caratterizzazione dei numeri $q$-perfetti di 2ª specie |
|---|---|---|

| di $q$ | di $\nu(n)$ | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 3 | $n = p_1^2$ con $p_1 \in \mathbb{P}$ |
| $\frac{3}{2}$ | 5 | $n = p_1^4$ con $p_1 \in \mathbb{P}$ |
| $\frac{5}{2}$ | 7 | $n = p_1^6$ con $p_1 \in \mathbb{P}$ |
| $\frac{7}{2}$ | 9 | $n = p_1^8$ oppure $n = p_1^2 p_2^2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro |
| $\frac{9}{2}$ | 11 | $n = p_1^{10}$ con $p_1 \in \mathbb{P}$ |
| $\frac{11}{2}$ | 13 | $n = p_1^{12}$ con $p_1 \in \mathbb{P}$ |

Consideriamo ora qualche caso generale enunciato sotto forma di teoremi:

**Teorema 2.1.1.**

I numeri della forma $n = p_1^{2q+1}$ e $n = p_1^q \cdot p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro, sono $q$-perfetti, i primi per ogni $q \in Q_0$ e i secondi per ogni $q \in \mathbb{N}_0$.

Dimostrazione

Sia $n = p_1^{2q+1}$ per qualche primo $p_1 \in \mathbb{P}$, per qualche $q \in Q_0$, allora $(2q + 1) \in \mathbb{N}_1$ e $n \in \mathbb{N}_2$ e si ha, per la nota identità che esprime $\nu(n)$ come $= \prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i)$, essendo $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la fattorizzazione in primi di $n$, $\nu(n) = 1 + 2q + 1 = 2(q + 1)$, dunque $n$ è $q$-perfetto di 2ª specie.
Sia $n = p_1^q p_2$ per qualche coppia di primi distinti $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, per qualche $q \in \mathbb{N}_0$, allora, sempre per l'identità summenzionata, si ha $\nu(n) = (1 + 1)(1 + q) = 2(q + 1)$ ovvero $n$ è $q$-perfetto di 2ª specie.

**Teorema 2.1.2.**

Sia $r \in \mathbb{N}_1$.e sia $q = 2^{r-1} - 1$. I numeri $q$-perfetti sono tutti e soli quei numeri $n$ del tipo $n = p_1^{2^{r_1}-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2^{r_k}-1}$ con $k, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}_1$ tali che $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$ e $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ diversi tra loro.

Sia $q = 2^{r-1} - 1$ per qualche $r \in \mathbb{N}_1$. $n$ è $q$-perfetto di 2ª specie se e solo se $\nu(n) = 2^r$. Un sistema completo di divisori di $2^r$ è del tipo $2^{r_1}, \ldots, 2^{r_k}$, per qualche $r_1, \ldots,$

$r_k \in \mathbb{N}_1$ tali che $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$ per qualche $k \in \mathbb{N}_1$ tale che $k \leq r = \Omega(n)$. Dunque $n$ è $q$-perfetto di 2ª specie se e solo se $\exists\ k \in \mathbb{N}_1$ con $k \leq r$ tale che $n = p_1^{2^{r_1}-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2^{r_k}-1}$ con $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}_1$ tali che $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$ e $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ diversi tra loro.

Al concetto di numeri $q$-perfetti di 2ª specie è collegato, come accade con i numeri perfetti (numeri perfetti di 1ª specie), quello dei numeri $q$-abbondanti e $q$-mancanti di 2ª specie, per i quali forniamo la seguente:

**Definizione 2.1.2.** Sia $n \in \mathbb{N}_2$. $n$ è $q$-mancante ($q$-abbondante) di 2ª specie se $\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d < n^q$ $\left(\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d > n^q\right)$.

Naturalmente, come accade per i numeri perfetti di 1ª specie, anche qui l'insieme dei numeri $q$-perfetti, $q$-mancanti e $q$-abbondanti costituisce una partizione di $\mathbb{N}_2$. Tale definizione ci conduce, inoltre, alla dimostrazione di due lemmi, a noi non noti in letteratura, che risulteranno utili in seguito.

**Lemma 2.1.1.** Sia $n$ $q$-perfetto di 2ª specie o $q$-mancante di 2ª specie allora ogni sottomultiplo proprio di $n$ è $q$-mancante.

Sia $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, se $n$ è $q$-perfetto o $q$-mancante allora $\nu(n) \leq 2\cdot(q+1)$ ma $\nu(n) = \prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i)$. Sia $m$ un sottomultiplo proprio di $n$, allora $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i\ \forall\ i = 1,\ldots,r$ e, inoltre, esiste almeno un indice $k \leq r$ tale che $\beta_k < \alpha_k$.
Dunque $\nu(m) = \prod_{i=1}^{r}(1+\beta_i) < \prod_{i=1}^{r}(1+\alpha_i) = \nu(n) \leq 2\cdot(q+1)$ essendo $(1+\beta_i) \leq (1+\alpha_i)$ e $(1+\beta_k) < (1+\alpha_k)$ ovvero $m$ è $q$-mancante di 2ª specie. C.V.D.

**Lemma 2.1.2. (duale)**. Sia $n$ $q$-perfetto o $q$-abbondante di 2ª specie allora ogni multiplo proprio di $n$ è $q$-abbondante.

Supponiamo che esista un numero $n$ $q$-perfetto o $q$-abbondante con un multiplo proprio $m$ $q$-perfetto o $q$-mancante allora tale multiplo $m$ avrebbe $n$ come sottomultiplo proprio ma n è $q$-perfetto di 2ª specie o $q$-abbondante di 2ª specie e ciò è assurdo per il lemma precedente. C.V.D.

La seconda generalizzazione dei numeri perfetti di 2ª specie è quella collegata al già citato problema di Halcke, ed è illustrata dalla seguente:

**Definizione 2.1.3.** Sia $n \in \mathbb{N}_1$, $n$ è perfetto di 2ª specie di ordine $k \in \mathbb{N}_1$ se $\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k = n$.

È immediato provare che tale definizione è equivalente a $\pi_k(n) = n^{k+1}$ dove si è utilizzata la funzione $\pi_k(n)$ (prodotto delle potenze $k$-esime di tutti i divisori di $n$) per la quale abbiamo già visto nella prima parte essere vera l'identità $\pi_k(n) = n^{k\frac{\nu(n)}{2}}$.

Dunque, se si eccettua 1 che risulta, analogamente al caso precedente, perfetto di 2ª specie di ordine k per ogni $k \in \mathbb{N}_1$, i numeri $n$ perfetti di 2ª specie di ordine $k$ risultano completamente caratterizzati dalla seguente identità $k\frac{\nu(n)}{2} - (k+1) = 0$ cioè $k = \frac{2}{\nu(n)-2}$.

Dunque esistono perfetti di 2ª specie di ordine $k \in \mathbb{N}_1$ solo per $k = 1$ o $k = 2$. Precisamente $n$ è perfetto di 2ª specie di ordine 1 se e solo se $\nu(n) = 4$ ovvero se e solo se è 1-perfetto di 2ª specie, le cui caratterizzazioni abbiamo già visto (infatti in tal caso le due diverse generalizzazioni coincidono entrambe con i numeri perfetti di 2ª specie). Nell'altro caso n è perfetto di seconda specie di ordine 2 se e solo se $\nu(n) = 3$ ovvero se e solo se è 1-perfetto di 2ª specie.

Ricordando che $Q \overset{\text{def}}{=} \{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_1\}$, riportiamo ora un teorema che non ci risulta noto in letteratura e che rappresenta una risultato che lega tra loro le due generalizzazioni dei numeri perfetti di 2ª specie e:

**Teorema 2.1.4.** Sia K l'insieme costituito dagli inversi degli elementi dell'insieme Q. $n$ è perfetto di 2ª specie di ordine $k \in K$ se e solo se $n$ è $q$-perfetto di 2ª specie con $q = \frac{1}{k}$.

Dimostrazione

Sia $n$ perfetto di $2^a$ specie di ordine $k$ allora $k = \dfrac{2}{\nu(n)-2}$ ovvero $\nu(n) = \dfrac{2(1+k)}{k} = 2\left(\dfrac{1}{k}+1\right) =$ $= 2(q+1)$ ponendo $q = \dfrac{1}{k}$ dunque $n$ è $q$-perfetto di $2^a$ specie con $q = \dfrac{1}{k}$. Analogamente per il viceversa. C.V.D.

Di conseguenza restano caratterizzati tutti i numeri di $2^a$ specie di ordine $k$ come i numeri $\dfrac{1}{k}$-perfetti e tutti i risultati validi per i secondi si possono vedere come risultati sui primi a patto di invertire l'indice.

**Definizione 2.1.4.** Sia $n \in \mathbb{N}_2$, $n$ è mancante (abbondante) di $2^a$ specie di ordine $k$ se $\prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d^k < n$ ($\prod_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d^k > n$).

## 2.2 Le generalizzazioni delle coppie di numeri amicabili di seconda specie.

Consideriamo ora le generalizzazioni delle coppie di numeri amicabili di seconda specie, illustrate con le seguenti definizioni che dimostreremo essere entrambe vuote.

**Definizione 2.2.1.** Sia $q \in$ Q [7]e siano $m$, $n \in \mathbb{N}_2$ distinti. $m$, $n$ sono $q$-amicabili di $2^a$ specie se:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi(n)}{n} = m^q \\ \dfrac{\pi(m)}{m} = n^q \end{cases}.$$

**Definizione 2.2.2.** Sia $k \in$ K e siano $m$, $n \in \mathbb{N}_2$ distinti. $m$, $n$ sono amicabili di $2^a$ specie di ordine $k$ se:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi_k(n)}{n^k} = m \\ \dfrac{\pi_k(m)}{m^k} = n \end{cases}.$$

**Teorema 2.2.1.**

Non esistono $q$-amicabili di $2^a$ specie per ogni $q \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione

Sia $q \in \mathbb{Q}$ e siano $m$, $n \in \mathbb{N}_2$ tali che

$$\begin{cases} \dfrac{\pi(n)}{n} = m^q \\ \dfrac{\pi(m)}{m} = n^q \end{cases} \qquad (1)$$

o, equivalentemente

[7] Non consideriamo il caso $q = 0$, poco significativo e che, come è facile verificare, condurrebbe a definire ogni coppia di primi distinti una coppia di numeri amicabili.

$$\begin{cases} n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = m^q \text{ [8]} \\ m^{\frac{\nu(m)}{2}-1} = n^q \end{cases} \qquad (2)$$

allora $m$ ed $n$ hanno gli stessi divisori primi.

Siano dunque $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ ed $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ , con $\alpha_i$, $\beta_i$ $\in \mathbb{N}_1$, le fattorizzazioni in primi di $n$ ed $m$.

Le (1) sono equivalenti a (3) $\begin{cases} \alpha_i\left(\dfrac{\nu(n)}{2}-1\right) = q\beta_i \\ \beta_i\left(\dfrac{\nu(m)}{2}-1\right) = q\alpha_i \end{cases}$ $\forall\ i = 1,\ldots,r$.

Dalla (1) segue, moltiplicando membro a membro le due equazioni, che

$\dfrac{\pi(n)}{n^{q+1}} \cdot \dfrac{\pi(m)}{m^{q+1}}$ = 1. Possiamo considerare due casi:

primo caso: $\dfrac{\pi(n)}{n^{q+1}} = 1 = \dfrac{\pi(m)}{m^{q+1}}$ ovvero $m$ ed $n$ sono $q$-perfetti di $2^a$ specie; ma dalla (2) segue che $n^q = m^q$ ovvero $m = n$;

secondo caso: $\dfrac{\pi(n)}{n^{q+1}} < 1$ e $\dfrac{\pi(m)}{m^{q+1}} > 1$ (o viceversa) ovvero $n$ è $q$-mancante ed $m$ è $q$-abbondante di $2^a$ specie. In questo caso la (1) implica $\begin{cases} m^q n < n^{q+1} \\ n^q m > m^{q+1} \end{cases}$ ovvero $m < n$;
avendo $m$ ed $n$ hanno gli stessi fattori primi questo implica che $m$ è un sottomultiplo proprio di $n$, ma, come abbiamo già dimostrato nel lemma 2.1.1 ciò implica $m$ è $q$-mancante contro la posizione iniziale. C.V.D.

**Teorema 2.2.1.**

Non esistono coppie di numeri amicabili di seconda specie di ordine k per ogni k$\in \mathbb{N}_1$.

---

[8] Al solito si è utilizzata l'identità (2.4) della prima parte con $k$ = 1: $\pi(n)^{\frac{\nu(n)}{2}}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}_1$.

Dimostrazione

$$\begin{cases} \prod\limits_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d^k = m \\ \prod\limits_{\substack{d|m \\ d\neq m}} d^k = n \end{cases} \qquad \begin{cases} \prod\limits_{\substack{d|n \\ d\neq n}} d^k = m\cdot n^k \\ \prod\limits_{\substack{d|m \\ d\neq m}} d^k = n\cdot m^k \end{cases} \qquad m \neq n,\ m,n \in \mathbb{N}_2,\ k \in \mathbb{N}_2.$$

$\pi_k(n) \cdot \pi_k(m) = (m \cdot n)^{k+1}$ e $p|m \Rightarrow p|n$ e viceversa.

$$n^{k\frac{\nu(n)}{2}} \cdot m^{k\frac{\nu(m)}{2}} = m^{k+1} \cdot n^{k+1}$$

$$m^{k+1-k\frac{\nu(m)}{2}} \cdot n^{k+1-k\frac{\nu(n)}{2}} = 1$$

$$\nu(m) = \frac{2(k+1)}{k} = 2\cdot(1+\frac{1}{k})$$

$$\nu(n) = \frac{2(k+1)}{k} = 2\cdot(1+\frac{1}{k})$$

Se $k = 2 \Rightarrow \nu(m) = 3$ e $\nu(n) = 3 \Rightarrow m = p^2$ e $n = p^2$.

## Bibliografia


(0) Emilio Ambirsi, *Numeri Amici, Mirabili e Perfetti*, Periodico di matematiche, Serie VI, Volume 67, 1991.

(1) P. HOFFMAN, *La vendetta di Archimede,* Bompiani, 1990, p. 31.

([2]) H. STEINHAUS, *Cento problemi di matematica elementare,* Boringhieri. 1987.

([3]) D. R. HOFSTADTER: *Godel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante,* Adelphi 1984, pag. 434.

([4]) M. GARDNER, *Enigmi e Giochi Matematici, vol. 5,* Sansoni, 1976, pag. 106.