AKAR-AKAR POLINOMIAL *SEPARABLE* SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL PADA RING MODULO

Saropah

Mahasiswa Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: haforas@rocketmail.com

ABSTRAK

Salah satu kegunaan yang terpenting dari teori ring dan lapangan adalah perluasan dari suatu lapangan yang lebih luas sehingga suatu polinomial dapat diketahui mempunyai akar. Dalam penelitian ini peneliti mengambil modulo prima sebagai koefisien yang mengikuti peubahnya yang akan dicari akar-akar penyelesaiannya sehingga dapat diketahui perluasan normalnya. Suatu lapangan F yang dikenakan suatu polinomial membentuk himpunan polinomial $F[x]$, di mana $F[x]$ ini merupakan lapangan yang koefisien suku-sukunya merupakan bilangan modulo prima. Dari himpunan polinomial tersebut ada polinomial $f(x)$ yang tidak tereduksi, maka perlu adanya perluasan lapangan untuk mengetahui akar-akar penyelesaiannya. Misal perluasan lapangan dari F adalah lapangan K. Lapangan K disebut perluasan lapangan atas lapangan F, jika lapangan F merupakan sublapangan dari lapangan K dan $f(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam F maka $f(x)$ dapat difaktorkan sebagai hasil kali dari faktor linier dalam lapangan pemisahnya. Jika polinomial $f(x)$ mempunyai akar yang berlainan dalam lapangan pemisahnya maka polinomial tersebut disebut polinomial *separable*. Pada penelitian ini polinomial yang *separable* adalah polinomial yang berpangkat ganjil di mana koefisien suku-suku dari polinomial ini terdapat dalam perluasan lapangannya. Polinomial ganjil ini dinamakan polinomial *separable* karena mempunyai akar yang berlainan dalam faktor-faktornya dan salah satu faktornya terdapat dalam polinomial dalam lapangannya. Lapangan pemisah yang memuat semua himpunan polinomial *separable* ini dinamakan perluasan normal.

Kata kunci: perluasan lapangan, lapangan pemisah, perluasan normal

ABSTRACT

One of the most important uses of the ring and field theory is an extension of a broader field so that a polynomial can be found to have roots. In this study researchers took modulo a prima as follows indeterminate coeffcients to search for his roots extension the solutions of that it can seen normal. A field F is subject to a polynomial form a set of polynomials $F[x]$, where $F[x]$ is a coefficient field its terms modulo a prime number. Of the set of polynomial exists a polynomial $f(x)$ is irreducible, it is necessary to extension the field to know the roots of the solution. Suppose to extension of the field F is a field K. Field K is called extension the field over a field F, if the field F is subfield of the field K and $f(x)$ is irreducible polynomial in F then $f(x)$ can be factored as a product of linear factors in the splitting field. If the polynomial $f(x)$ has different roots in the splitting field the polynomial is called polynomial separable. In this study polynomial separable is contained of odd degree in which the coefficients of the tribes polynomial is contained in the extension field. Polynomial is called a polynomial separable odd because it has different roots in the factors and there is one factor in a polynomial in the field. Splitting field that contains all the set of polynomials separable is called normal extension.

Key words: extension field, splitting field, normal extension

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam Al-Qur'an (Rahman, 2007: 1).

Salah satu sifat matematika yaitu matematika bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Karena objek matematika merupakan hasil abstraksi dunia nyata, maka matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007: 15).

Ilmu aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika. Salah satu bahasan dalam aljabar abstrak adalah ring. Ring adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu + sebagai operasi pertama dan * sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma-aksioma yang telah ditentukan. Sedangkan ring komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur di R mempunyai invers terhadap operasi kedua kecuali elemen nol (identitas pada operasi pertama) disebut lapangan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 313-314).

Salah satu kegunaan yang terpenting dari teori ring dan lapangan adalah perluasan dari suatu lapangan yang lebih besar atau lebih luas sehingga suatu polinomial (suku banyak) dapat diketahui mempunyai akar.

Misalkan suatu lapangan F yang dikenakan polinomial ring yang kemudian membentuk himpunan-himpunan polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan elemen dari field F. Polinomial-polinomial ini kemudian dicari akar-akar penyelesaiannya, dan ternyata dalam mencari akar-akarnya terdapat polinomial-polinomial yang tidak dapat dicari akar-akarnya, dengan kata lain polinomial tersebut tidak dapat difaktorkan (*irreducible*). Maka dibentuklah perluasan lapangan K untuk memperoleh akar-akar penyelesaian dari polinomial-polinomial tak tereduksi tersebut. Akar-akar dari polinomial-polinomial tak tereduksi ini harus berada dalam perluasan lapangannya.

Berdasarkan jurnal yang di tulis oleh Sulastri Daruni, Bayu Surarso, dan Bambang Irawanto (2004), jika dalam lapangan F terdapat $f(x)$ polinomial tak tereduksi maka $f(x)$ dapat dibentuk sebagai hasil kali faktor linier dalam $K(x)$ di mana $K(x)$ adalah himpunan polinomial-polinomial dengan koefisien-koefisien di dalam K. Sehingga dapat dikatakan perluasan lapangan K atas lapangan F adalah lapangan pemisah atas lapangan F terhadap polinomial $f(x)$. Selanjutnya polinomial $f(x)$ dapat disajikan sebagai $f(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ dengan $c \neq 0 \in F$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in F$ dan $K = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ kemudian jika akar-akar dari polinomial $f(x)$ tersebut dalam lapangan pemisahnya mempunyai faktor yang akar-akarnya berlainan maka polinomial tidak tereduksi $f(x)$ dalam lapangan F adalah *separable* dalam F. Selanjutnya untuk lapangan pemisah yang memuat semua akar-akar yang berlainan dari lapangan tidak tereduksi $f(x)$ di mana salah satu akar dari akar-akar berlainan tersebut merupakan faktor dari polinomial pada sublapangannya maka lapangan pemisah ini disebut perluasan normal.

Pada polinomial ring, jika tidak ada penjelasan mengenai koefisien-koefisie yang menyertai peubahnya masing-masing, maka dianggap sebagai bilangan real. Tetapi apabila ada penjelasan lebih lanjut, maka koefisien sesuai dengan ring yang ditunjuk. Dari penjelasan di atas maka penulis ingin mengembangkan akar-akar polinomial yang koefisien-koefisiennya merupakan elemen dari lapangan yaitu pada ring modulo. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang akar-akar polinomial *separable* pada ring modulo dengan judul "Akar-akar Polinomial *Separable* sebagai Pembentuk Perluasan Normal pada Ring Modulo."

KAJIAN TEORI

1. Lapangan

Lapangan adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur di R mempunyai invers terhadap operasi kedua kecuali elemen nol (identitas pada operasi pertama) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 314). Dengan kata lain, untuk setiap elemen bukan nol $a \in R$ ada $a^{-1} \in R$ sedemikian hingga $a \cdot a^{-1} = 1$ (Wahyudin, 1989: 155).

2. Polinomial

Polinomial $p(x)$ berderajat n, didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Dengan a_i adalah konstanta riil, $i = 0,1,2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$

di mana:

x	: merupakan peubah.
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$	: merupakan nilai koefisien persamaan x.
n	: merupakan orde atau derajat persamaan.

3. Polinomial atas Lapangan

Misalkan F adalah lapangan. Jika $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in F$, maka sebarang bentuk dari

$$a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

disebut polinomial atas F dengan peubah x koefisien $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$. Semua himpunan polinomial dengan koefisien di F dinotasikan dengan $F[x]$. Jika n adalah bilangan bulat non negatif paling besar sedemikian hingga $a_n \neq 0$, maka dapat dikatakan bahwa polinomial $f(x) = a_nx_n + \cdots + a_0$ mempunyai derajat n, ditulis dengan $(f(x)) = n$, dan a_n disebut koefisien pertama dari $f(x)$. Jika koefisien pertama adalah 1, maka $f(x)$ dikatakan polinomial monik (Beachy dan Blair, 1990: 165).

4. Perluasan Lapangan

Suatu sublapangan (lapangan bagian) dari lapangan K adalah suatu subring (ring bagian) F dan juga merupakan lapangan. Dalam hal ini, lapangan K disebut perluasan dari lapangan F. Misalnya, $\mathbb{Q}$ adalah sublapangan dari $\mathbb{R}$, oleh karena itu $\mathbb{R}$ adalah suatu perluasan dari lapangan $\mathbb{Q}$ (Wahyudin, 1989: 234).

Sebuah lapangan K adalah perluasan lapangan dari F, jika F adalah sublapangan dari K berdasarkan pengertian ini dibuktikan teorema Kronecker sebagai berikut (Fraleigh, 1994: 394):

Teorema: Teorema Kronecker (Fraleigh, 1994: 394-395)

Misalkan F adalah lapangan dan $f(x)$ polinomial tidak konstan di dalam $F[x]$. Maka terdapat perluasan lapangan K dari F dan $\alpha \in K$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti:

Misalkan $f(x) \in F[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x)$, dengan $p_i(x)$ $(i = 1,2,\dots n)$ adalah polinomial prima yang tak tereduksi dengan $F[x]/\langle p(x)\rangle$ adalah suatu lapangan di mana $\langle p(x)\rangle$ himpunan polinomial tidak tereduksi dalam lapangan $F[x]$.
Didefinisikan suatu pemetaan
$\psi : F \rightarrow F[x]/\langle p(x)\rangle$
dengan

$$\psi(a) = a + \langle p(x)\rangle$$

ψ adalah pemetaan satu-satu, sebab $\forall a, b \in F$
jika

$$\psi(a) = \psi(b)$$

maka

$$a + \langle p(x)\rangle = b + \langle p(x)\rangle$$
$$a - b = 0$$
atau
$$a = b$$
$$\Leftrightarrow a - b \in \langle p(x)\rangle$$

Jadi $a - b$ suatu kelipatan $p(x)$ yang berderajat ≥ 1.
ψ homomorfisma ring. Sehingga $\psi(F) = \{a + \langle p(x)\rangle \mid a \in F\} \subseteq F[x]/\langle p(x)\rangle$ merupakan sublapangan dari $F[x]/\langle p(x)\rangle$. Jadi $F \cong \{a + \langle p(x)\rangle \mid a \in F\}$.

Misal $K = F[x]/\langle p(x)\rangle$ maka K merupakan perluasan lapangan dari F. Akan dibuktikan $f(\alpha) = 0$, ambil $\alpha \in E$ dengan $\alpha = x + \langle p(x)\rangle$. Jika $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ di mana $a_i \in F$ maka $p(\alpha) = a_0 + a_1(x + \langle p(x)\rangle) + \cdots + a_n(x + \langle p(x)\rangle)^n = 0$ dalam $K = F[x]/\langle p(x)\rangle$. $p(\alpha) = 0$ karena $f(x) = p_1(x)p_2(x)\dots\dots p_n(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. ■

5. Lapangan Pemisah

Perluasan lapangan K atas lapangan F dikatakan sebagai lapangan pemisah dari polinomial $f(x) \in F[x]$ jika faktor dari $f(x)$ merupakan faktor linier di $K[x]$ dan $f(x)$ bukan faktor linier atas setiap *proper* sublapangan terhadap K di F (Dummit dan Foote, 1999: 516).

6. Perluasan Normal

Jika K adalah perluasan aljabar F di mana ini merupakan lapangan pemisah atas F untuk koleksi polinomial $f(x) \in F[x]$ maka K disebut perluasan normal F (Dummit, 1999: 517).

PEMBAHASAN

Adapun untuk memperoleh perluasan normal pada ring modulo dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Lapangan dikenakan suatu polinomial
2. Dari himpunan polinomial yang terbentuk, terbagi menjadi:
   a. Polinomial konstan
   b. Polinomial tidak konstan yaitu:
      1) Polinomial tereduksi
      2) Polinomial tidak tereduksi
3. Membentuk perluasan lapangan untuk memperoleh akar-akar dari polinomial tidak tereduksi.
4. Perluasan lapangan yang memuat polinomial tidak tereduksi di mana polinomial tidak tereduksi tersebut salah satu faktornya terdapat dalam sublapangan, maka perluasan lapangan ini dinamakan lapangan pemisah.
5. Jika dalam lapangan pemisah polinomialnya mempunyai akar-akar yang berlainan, maka polinomial ini dinamakan polinomial *separable* dalam lapangan.
6. Lapangan pemisah yang memuat semua akar-akar berlainan dinamakan perluasan normal.

Pada penelitian ini penulis memberi contoh dari $M_2[x], M_3[x]$ dan $M_5[x]$. Untuk $M_2[x]$ tidak dapat dicari perluasan normalnya karena tidak ada polinomial yang tidak tereduksi yang menjadi syarat dalam pembentukan lapangan pemisah yaitu polinomial tidak tereduksi dalam lapangan pemisah harus bisa difaktorkan dan faktorisasi tersebut harus berada dalam polinomial lapangannya.

Pada $M_3[x]$ dan $M_5[x]$ telah diketahui bahwa masing-masing terdapat lapangan pemisah. Pada $M_3[x]$ polinomial tidak tereduksi yang merupakan polinomial yang mempunyai akar-akar berlainan dalam lapangan pemisahnya yaitu $p_{24}(x)$ dan untuk $M_5[x]$ polinomial-polinomial tidak tereduksi yang merupakan polinomial yang tidak mempunyai akar-akar berlainan dalam lapangan pemisahnya yaitu $f_{22}(x)$, $f_{38}(x)$, dan $f_{43}(x)$. Polinomial-polinomial tidak tereduksi inilah yang termasuk dalam perluasan normal di mana polinomial-polinomial tidak tereduksi ini berderajat lebih dari satu yaitu $f(x) > 1$.

Berdasarkan contoh penentuan perluasan normal dari M_2, M_3, dan M_5 dapat diperoleh bentuk umum perluasan normal sebagai berikut. Misalkan suatu ring $(M_n, +, \times)$ adalah lapangan dengan n prima yang memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

a. $(M_n, +)$ gup abelian
   i. Operasi $+$ tertutup di M_n
   Jika $a, b \in M_n$ dengan definisi penjumlahan modulo n maka, $a \in M_n, b \in M_n \Rightarrow a + b \in M_n\ \forall a, b \in M_n$
   ii. Bersifat asosiatif.
   Untuk semua $a, b, c \in M_n$, berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
   iii. Mempunyai identitas pada operasi $+$
   Bilangan bulat $0 \in M_n$ adalah elemen identitas di M_n untuk penjumlahan modulo n, untuk setiap bilangan bulat $a \in M_n$, berlaku $0 + a = a + 0 = a$
   iv. Mempunyai invers
   Untuk semua elemen $a \in M_n$ kecuali 0 di M_n maka
   $a \in M_n, a \neq 0 \Rightarrow 0 < a < n$
   $\Rightarrow 0 < n - a < n$
   $\Rightarrow n - a \neq 0$
   dan $n - \ \in$
   Juga, $(-) + \ = \ + (-) = 0$
   Jadi masing-masing bilangan bulat bukan nol $\in$ mempunyai invers di .
   v. Bersifat komutatif
   Untuk semua , , $\in$, berlaku
   $+ \ = \ +$
   Jadi operasi penjumlahan modulo adalah komutatif di .

b. Operasi $\times$ tertutup di M_n
Misalkan , $\in$ berlaku $1 \leq \ \leq - 1$ dan $1 \leq \ \leq - 1$ dengan definisi dari perkalian modulo maka $\times =$ di mana $\leq - 1$ hasilnya dapat dibagi oleh maka $1 \leq \ \leq - 1$ dan hal ini menunjukkan bahwa operasi $\times$ tertutup di .

c. Bersifat asosiatif
Untuk semua , , $\in$, berlaku
$\times (\times) = (\times) \times$

d. Mempunyai elemen identitas
Bilangan bulat $1 \in$ adalah elemen identitas untuk perkalian biangan modulo , jika menjadi elemen yang berubah-ubah di maka $1 \times$ sama dengan $\times 1$ berlaku $1 \times \ = \ \times 1 = , \forall \in$

e. Mempunyai elemen invers
Misalkan $\in$, mengingat himpunan $' = \{1 \times ,\ 2 \times , 3 \times , \ldots ,\ (- 1) \times \}$ maka adalah tertutup pada operasi perkalian modulo , mengikuti bahwa anggota dari $'$ adalah anggota dari . Semua unsur di $'$ berbeda, jika dan adalah dua bilangan bulat yang berbeda di sedemikian hingga $>$, maka $1 \leq \ \leq - 1$, $1 \leq \ \leq - 1$ dan $>$. Misal $\times \ = \ \times$
$\Rightarrow \ \cdot - \cdot$ dapat dibagi
$\Rightarrow (-) \cdot$ dapat dibagi
Tetapi ini tidak mungkin, ketika $1 \leq \ - \ < - 1$ dan $1 \leq \ \leq - 1$ di mana prima, jadi $(-) \cdot$ tidak pernah bisa dibagi dengan . Maka dari itu $\times \ \neq \ \times$.
Dengan demikian himpunan $'$ terdiri dari $(- 1)$ elemen yang berbeda di M_n dan oleh sebab itu bertepatan dengan M_n. Jadi satu elemen di $M_n{}'$ harus 1.
Misalkan $a' \times a = 1, \forall a' \in M_n$ berakibat $a' \times a = a \times a' = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen a di M_n mempunyai invers a' di M_n.

f. Operasi $\times$ bersifat komutatif
Jika $a, b \in M_n$ maka berlaku $a \times b = b \times a, \forall a, b \in M_n$
(Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 49-53).

Setelah M_n terbukti merupakan lapangan maka dibuktikan bahwa M_n adalah ideal. Sesuai dengan teorema 1 berikut:

Teorema 1. (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 366)
Jika M_n adalah ring komutatif dan $a \in M_n$, maka $M_n \times a = \{m \times a : m \in M_n\}$ adalah ideal di M_n.

Bukti
Misalkan $(M_n, +, \times)$ adalah ring komutatif dan $a \in M_n$. Maka akan ditunjukkan bahwa $M_n \times a$ adalah ideal dari M_n.

a) $M_n \times a$ adalah subring
Misalkan $m_1 \times a$ dan $m_2 \times a$ adalah dua elemen di $M_n \times a$ maka $(m_1 \times a) - (m_2 \times a) = (m_1 - m_2) \times a \in M_n \times a$.
[karena $m_1 \in M_n, m_2 \in M_n \Rightarrow m_1 - m_2 \in M_n$].
Dan untuk $(m_1 \times a) \times (m_2 \times a) = p \times (m_2 \times a)$ di mana
$p = (m_1 \times a) \in M_n$ sebagai $m_1 \in M_n, a \in M_n \Rightarrow m_1 \times a \in M_n$
$= (p \times m_2) \times a \in M_n \times a$ [Jadi $p \in M_n, m_2 \in M_n \Rightarrow p \times m_2 \in M_n$]
Dapat diketahui bahwa $M_n \times a$ adalah subring dari M_n.

b) Misalkan m adalah sebarang elemen di M_n dan $m_1 \times a$ adalah elemen di $M_n \times a$, maka $m \times (m_1 \times a) = (m \times m_1) \times a \in M_n \times a$ ideal kanan dan $(m_1 \times a) \times m = (m_1 \times m) \times a \in M_n \times a$ ideal kiri.
Terbukti bahwa $M_n \times a$ ideal di M_n

Teorema 2. (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 366-367)
Suatu ring komutatif dengan elemen satuan disebut lapangan jika lapangan tidak mempunyai *proper* ideal.

Bukti:
Misalkan M_n ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak mempunyai *proper* ideal yaitu idealnya hanya identitas $\{0\}$ dan pada dirinya sendiri. Kemudian menunjukkan bahwa M_n adalah lapangan dengan memperlihatkan

bahwa setiap elemen bukan nol di M_n mempunyai invers pada operasi perkalian di M_n.
Misalkan a elemen bukan nol di M_n,
$S = \{m \times a: m \in M_n\}$ di mana $S = M_n \times a$
Maka S adalah ideal di M_n .... [Teorema 1]
Sekarang $1 \in M_n \Rightarrow 1 \times a = a \in S$ di mana a adalah suatu elemen bukan nol di M_n. Oleh karena itu S adalah ideal bukan nol dalam M_n.
Ketika M_n tidak mempunyai *proper* ideal dan S adalah ideal bukan nol dalam M_n. Sehingga satu-satunya yang mungkin adalah $S = M_n$.
Sekarang, ketika $1 \in M_n$ dan $S = M_n$, maka harus ada beberapa elemen $b \in M_n$ sedemikian hingga $b \times a = 1$ dengan cara yang sama $a \times b = 1$. Karenanya $a^{-1} = b \in M_n$ yaitu setiap elemen di M_n mempunyai invers pada operasi perkalian atau operasi kedua di M_n. Maka M_n adalah lapangan. ■

Pada teorema 1 dan 2 telah terbukti M_n merupakan lapangan dan ideal maka M_n dikenakan pada suatu polinomial $f(x)$, misalkan $f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$,
$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_n$ di mana koefisien suku-sukunya merupakan anggota bilangan dalam M_n. Akar-akar dari polinomial $f(x)$ dalam lapangan M_n ini ternyata terdapat polinomial yang tidak tereduksi maka dari itu dibentuklah perluasan lapangan yang akar-akarnya terdapat di dalamnya. Hal ini akan ditunjukkan sebagai berikut. Misalkan polinomial $p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ tidak tereduksi dalam M_n, polinomial $p(x)$ tidak tereduksi dalam M_n karena polinomial ini tidak mempunyai suatu elemen dalam M_n yang menyebabkan $p(x) = 0$. Diberikan polinomial $p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ dan di cari akar-akarnya dengan metode horner sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x = m & a_{2n} & a_{2n-2} & \cdots\ a_8 & a_6 & a_4 & a_2 \\
\downarrow & & & & & & \\
 & & A_{2n}m & A_{10}m & A_8m & A_6m & A_4m \\
\hline
 & A_{2n} & A_{2n-2} & A_8 & A_6 & A_4 & A_2
\end{array}
$$

Keterangan:

$$
\begin{aligned}
A_{2n} &= a_{2n} \\
A_{2n-2} &= A_{2n}m + a_{2n-2} \\
A_{2n-4} &= A_{2n-2}m + a_{2n-4} \\
&\vdots \\
A_8 &= A_{10}m + A_8 \\
A_6 &= A_8m + a_6 \\
A_4 &= A_6m + a_4 \\
A_2 &= A_4m + a_2
\end{aligned}
$$

Untuk $m \in M_n$ maka polinomial $p(x)$ tidak tereduksi karena hasil dari pembagiannya bukan nol sehingga sebarang $m \in M_n$ tidak memenuhi $p(x) = 0$. Oleh sebab itu dibentuklah perluasan lapangan atas M_n yaitu lapangan yang memuat akar-akar dari polinomial $p(x)$. Setelah terbentuk perluasan lapangan maka dibentuk lapangan pemisah dengan cara mencari faktorisasi dari polinomial $p(x)$. Misal diambil polinomial genap

$p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8$
$\quad\quad = x^2(a_2 + a_4x^2 + a_6x^4 + a_8x^6)$

Polinomial $p(x)$ dapat dibentuk sebagai hasil kali dari salah satu faktor dalam lapangan M_n maka dari itu polinomial $p(x)$ termasuk polinomial *separable*. Tetapi salah faktornya tersebut tidak linier yaitu x^2, maka polinomial $p(x)$ tidak termasuk dalam perluasan normal. Selanjutnya misal ambil lagi polinomial $q(x)$ di mana polinomial ini merupakan polinomial ganjil dalam perluasan lapangannya maka $q(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7$
$\quad\quad = x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6)$

Karena salah satu faktor dari $q(x)$ adalah linier dan faktor berlainan dengan faktor lainnya maka polinomial $q(x)$ merupakan polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya yang termasuk dalam perluasan normal.

PENUTUP

Hasil penelitian yang dilakukan penulis dengan mengenakan suatu polinomial pada lapangan M_n di mana M_n adalah lapangan yang koefisien suku-sukunya berada dalam modulo prima dengan peubah x, bahwa $M_n \times a$ ideal dari M_n di mana $M_n \times a$ adalah sublapangan dari M_n. Hal ini menunjukkan bahwa M_n menjadi suatu perluasan dari $M_n \times a$. Terbentuknya perluasan lapangan dikarenakan terdapat polinomial $p(x)$ tidak tereduksi dalam lapangannya sehingga dapat diketahui akar-akar penyelesaiaan pada perluasan lapangan. Pada penelitian ini, semua polinomial tidak tereduksi dalam lapangannya termasuk polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya. Namun, ada polinomial *separable* yang tidak termuat dalam perluasan normal yaitu polinomial *separable* yang berderajat genap. Hal ini dikarenakan adanya faktorisasi nonlinier dalam polinomial tersebut. Sementara untuk polinomial *separable* yang berderajat ganjil $(2k - 1)$ di mana k adalah bilangan bulat positif, maka polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya ini termasuk dalam perluasan normal. Hal ini ditunjukkan dengan adanya polinomial *separable* ini yang salah satu faktor liniernya termuat dalam polinomial di lapangannya. Maka semua polinomial *separable* yang berderajad ganjil ini termasuk dalam perluasan normal.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press

[2] Beachy, J. A. & Blair, W. D. 1990. *Abstract Algebra with A Concrete Introduction*. Prentice Hall, Englewood, New Jesey 07632

[3] Dummit, S. D. & Foote, R. M. 1999. *Abstract Algebra, Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[4] Fraleigh, J. B. 1994. *A First Course in Abstract Algebra, Fifth Edition.* New York: Addition and Wisley Publishing Company, USA.

[5] Herstein. 1975. *Topics in Algebra 2nd edition*. New York: John Wiley & Sons

[6] Irawanto, B., dkk. 2004. *Akar-akar Polinomial Separabel sebagai Pembentuk Perluasan Normal*. Yogyakarta: FMIPA UGM

[7] Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA

[8] Rahman, H. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press

[9] Raisinghania, M. D & Aggarwal R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

[10] Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Bandung: TARSITO