

NUMERYCZNE OBLICZANIE WIOTKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH
POWŁOK PODDANYCH PLASTYCZNEMU PŁYNIĘCIU W ZAKRESIE DUŻYCH
ODKSZTAŁCEN

JANUSZ O R K I S Z, JÓZEF W I L K (KRAKÓW)

1. Sformułowanie problemu i uwagi wstępne

W pracy [14] rozważany był problem wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego uogólnionej na zakres skończonych odkształceń. Przyjęto że: materiał powłoki jest plastyczny nieściśliwy, izotropowy, obciążenie dowolne obrotowo-symetryczne, a sama powłoka jest wiotka, tj. może znajdować się jedynie w stanie błonowym i przenosić tylko naprężenia rozciągające. Przy powyższych założeniach wyprowadzony został układ quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi \cos \varphi}{u x \cos \psi}, & \frac{\partial p_1}{\partial \xi} &= -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\xi \cos \varphi}{u x^2 \cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\xi \sin \varphi}{u x \cos \psi}, & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{p_1 u x \cos \psi} \left(\frac{Q_n}{f u} - p_2 \frac{\sin \varphi}{x} \right), \\ u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned}$$

opisujących formę naprężenia i odkształcenia w procesie obciążania takich powłok. W równaniach tych niewiadomymi są współrzędne Eulera punktu powłoki $x(\xi, \tau)$ i $y(\xi, \tau)$, rzeczywiste naprężenia główne $p_1(\xi, \tau)$ i $p_2(\xi, \tau)$, kąt $\varphi(\xi, \tau)$ zawarty między styczną do południka (po odkształceniu) a osią x (rys. 1) oraz sprowadzona grubość powłoki $u(\xi, \tau)$, zmiennymi niezależnymi są: ξ — osiowa współrzędna punktu powłoki oraz τ — parametr wzrostu obciążenia. Szóste równanie, które należy rozpatrywać łącznie z układem (1.1) ma charakter algebraiczny, a jego postać zależy od założonej fizycznej charakterystyki $F(p_1, p_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0$ materiału powłoki. W dalszych rozważaniach przyjmujemy ją dla prostoty obliczeń jako zależność potęgową (μ — stała materiałowa)

$$(1.2) \quad p_i = \varepsilon_i^\mu$$

między intensywnościami rzeczywistych naprężeń p_i i odkształceń ε_i liczonych w mierze logarytmicznej Hencky'ego. W rozpatrywanym tu płaskim stanie naprężenia

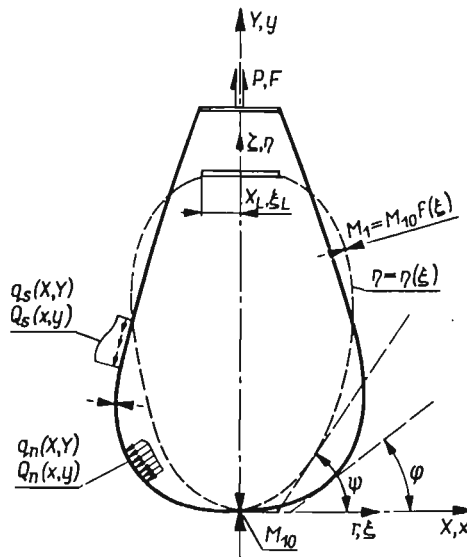
$$(1.3) \quad p_i = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3},$$

przy czym indeks 1 oznacza kierunek południkowy, 2 — równoleżnikowy, 3 — normalny do powłoki. Odształcenia główne wyrażają się poprzez pozostałe funkcje następująco:

$$(1.4) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u,$$

gdzie $\psi = \psi(\xi)$ — oznacza kąt zawarty między styczną do południka (przed odkształceniem) a osią x . Pozostałe wielkości (por. rys. 1), które traktujemy jako znane oznaczają: $Q_n = Q_n(x, y, \tau)$ i $Q_s = Q_s(x, y, \tau)$ — obciążenia liczone na jednostkę powierzchni odkształconej powłoki odpowiednio w kierunku normalnym i południkowym, $f = f(\xi)$ — funkcję opisującą zmianę grubości ścianki powłoki w stanie nieodkształconym.

Wszystkie wyrażenia we wzorach (1.1)-(1.4) zapisane są w wielkościach bezwymiarowych (por. [14]).



Rys. 1. Powłoka przed odkształceniem i po odkształceniu

Dla równań (1.1) podane zostały warunki początkowe

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x(\xi, 0) &= x_*(\xi), & y(\xi, 0) &= y_*(\xi), & u(\xi, 0) &= u_*(\xi), \\ \varphi(\xi, 0) &= \varphi_*(\xi), & p_1(\xi, 0) &= p_{1*}(\xi), & p_2(\xi, 0) &= p_{2*}(\xi) \end{aligned}$$

zdeteminowane przez stan wyjściowy (oznaczony $*$) w powłoce, w którym intensywność naprężeń osiąga co najmniej granicę plastyczności. Sformułowane również były różne typy warunków brzegowych (por. [14]).

Praca [14] nie zawiera jednak rozwiązania tak postawionego problemu. Zagadnienie to podejmuje niniejsza praca, której celem jest podanie pewnej numerycznej metody całkowania układu równań (1.1) i opracowanie na tej podstawie schematu blokowego oraz programu obliczeń na maszynę cyfrową, a następnie rozwiązanie tym sposobem konkretnego przypadku powłoki walcowej obciążonej parciem wewnętrznym. Równocześnie przeprowadzono porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniem analogicznego zadania w oparciu o odkształceniową teorię plastyczności uogólnioną na zakres skończonych odkształceń.

Zastosowanie teorii płynięcia plastycznego w teorii wiotkich powłok napotyka znaczne trudności natury matematycznej. Dlatego też podjęto w tym kierunku jedynie nieliczne próby. Stosunkowo najwięcej uwagi poświęcono stacjonarnym procesom obróbki plastycznej rur cienkościennych. Zagadnienie przeciągania rur bez uwzględnienia wzmocnienia rozważał ILJUSZYN [7], a ze wzmocnieniem izotropowym, lecz w sposób uproszczony SWIFT [18] (por. także KIJKO [8]). Ścisłe ujęcie tego problemu przy warunku plastyczności Hubera-Misesa i bez pomijania tarcia daje MALININ [9], a SZCZEPIŃSKI [20] uwzględnia ponadto kinematyczną hipotezę wzmocnienia.

Pierwsze rozwiązanie niestacjonarnego osiowo-symetrycznego zagadnienia tłoczenia podał HILL [5] dla izotropowej hipotezy wzmocnienia, przyjmując przy tym znaczne uproszczenia. Ścisłe rozwiązanie tego problemu, tak dla hipotezy wzmocnienia izotropowego, jak i anizotropowego, podaje SZCZEPIŃSKI [20]. Praca ta zawiera również przykłady liczbowe rozwiązane numerycznie metodą iteracyjną (por. [19]). HILL [4], [5] i następnie TRAN ŁYU CZIONG [24] (wzmocnienie anizotropowe) rozpatrzyli — w ujęciu teorii płynięcia — skończone odkształcenia plastyczne kołowej membrany poddanej równomiernemu ciśnieniu. Uzyskali oni przybliżone rozwiązanie przy aproksymacji formy odkształconej membrany powierzchnią kulistą. Analogiczne zadanie przy założeniu jedynie dużych przemieszczeń omawiają ROSS i PRAGER [17].

Przedstawione wyżej zagadnienia omawiają też monografie [6], [10], [12], [21], [22], [23]. Prócz wspomnianych już rozwiązań podają one również uproszczone inżynierskie metody obliczeń stosowanych w procesach plastycznej obróbki metali. Wspólną cechą tych wszystkich zadań (z wyjątkiem membrany) jest to, że forma powłoki, tak przed odkształceniem, jak i po odkształceniu jest z góry ustalona. Upraszcza to znacznie zagadnienie w stosunku do rozpatrywanego w niniejszej pracy, gdzie forma końcowa jest poszukiwana.

2. Metoda całkowania równań powłoki

Przedstawimy obecnie pewną numeryczną metodę rozwiązania układu równań (1.1). Łączy ona w sobie elementy metody charakterystyk oraz tzw. «metody prostych» (por. [1], [2]) i polega na sprowadzeniu układu równań cząstkowych do dwóch układów równań zwyczajnych, które następnie rozwiązuje się ściśle lub (jak w naszym przypadku) jedną ze znanych metod numerycznych. Sposób tego sprowadzenia nie jest jednak dowolny, lecz zdeterminowany rozkładem charakterystyk rozpatrywanego układu równań.

Przed przystąpieniem do numerycznego całkowania danego układu należy więc określić jego typ, znaleźć rozkład charakterystyk (jeśli one istnieją), a także ustalić rodzaj warunków brzegowych. Kierunki charakterystyczne układu równań (1.1) otrzymamy (por. [11], [16]) z warunku zerowania się wyznacznika

$$(2.1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_z & 0 & 0 & 0 & u(p_1+p_2)\lambda_r \\ 0 & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u}\lambda_z & 0 & x(2p_2-p_1)\lambda_r \\ 0 & 0 & \lambda_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(2p_2-p_1)\lambda_z^4\lambda_r = 0.$$

Znajdujemy stąd wektory własne $\bar{\lambda}_r^*(\lambda_\xi, 0)$ i $\bar{\lambda}_{11}^*(0, \lambda_\tau)$. Równania (1.1) stanowią zatem pewien szczególny quasi-liniowy układ hiperboliczny, którego charakterystykami są linie $\xi = \text{const}$ (jednokrotna) oraz $\tau = \text{const}$ (czterokrotna), co wynika z przyjęcia współrzędnej Lagrange'a ξ (a nie x) jako zmiennej niezależnej i znacznie upraszcza sposób rozwiązywania. Warunki zgodności na charakterystyce $\xi = \text{const}$ sprowadzają się do równania:

$$(2.2) \quad u(p_1 + p_2) \frac{dx}{d\tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Podobnie dla drugiego kierunku charakterystycznego ($\tau = \text{const}$) otrzymujemy równania

$$(2.3) \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi \cos \varphi}{ux \cos \psi}, \quad \frac{dp_1}{d\xi} + \frac{p_1}{u} \frac{du}{d\xi} = \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{ux \cos \psi}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{p_1 u x \cos \psi} \left(\frac{Q_n}{f u} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right).$$

Tak więc układ (1.1) rozpadł się na dwie grupy zwyczajnych równań różniczkowych (2.2) i (2.3), które mogą być spełnione wzdłuż odpowiednich charakterystyk. Równania te rozwiązywać będziemy numerycznie. Z postaci warunków zgodności wynika, że funkcję u możemy wyznaczyć z równania (2.2), funkcję x, y, φ, p_1 z równań (2.3), zaś p_2 z algebraicznego związku (1.2), który po rozwikłaniu ma postać

$$(2.4) \quad p_2 = \frac{p_1}{2} + \sqrt{\varepsilon_i^{2\mu} - \frac{3}{4} p_1^2}.$$

Obszar całkowania $D(\xi, \tau)$ podzielimy na n części za pomocą linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ przeprowadzonych w jednakowych odstępach $\Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1}$. Dla uproszczenia zapisu oznaczymy krótko

$$(2.5) \quad u(\xi, \tau_j) = u_j(\xi) = u_j, \quad \frac{du(\xi, \tau_j)}{d\xi} = \frac{du_j}{d\xi}, \quad \frac{du(\xi, \tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_j} = \frac{du_j}{d\tau}.$$

Podobnie jak w metodzie prostych równanie (2.2) zamieniamy na różnicowe. Korzystnie jest przy tym dla pochodnej funkcji posłużyć się wzorem różnicowym

$$(2.6) \quad \frac{du_{j-1}}{d\tau} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} u_{j-r},$$

który jest stabilny. Wartości liczbowe kilku pierwszych współczynników β_{kr} zawiera tablica 1. Z równania (2.2) tą drogą obliczymy:

Tablica 1. Współczynniki β_{kr}

$k \backslash r$	0	1	2	3	4
1	1	-1			
2	1/2	0	-1/2		
3	1/3	1/2	-1	1/6	
4	1/4	5/6	-3/2	1/2	-1/12

$$(2.7) \quad u_j = -\frac{1}{\beta_{k0}} \left[\frac{u(p_1 + p_2)}{x(2p_2 - p_1)} \right]_{j-1} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} x_{j-r} - \frac{1}{\beta_{k0}} \sum_{r=1}^k \beta_{kr} u_{j-r}.$$

W najprostszym przypadku, gdy $k = 1$ mamy stąd

$$(2.8) \quad u_j = u_{j-1} \left[1 + \left(\frac{p_1 + p_2}{2p_2 - p_1} \right)_{j-1} \left(1 - \frac{x_j}{x_{j-1}} \right) \right].$$

Przy $\tau = 0$ wszystkie funkcje występujące w tych wzorach są określone przez warunki początkowe (1.5).

Podstawiając do (2.3) p_2 oraz u_j wyrażone odpowiednio wzorami (2.4) i (2.7) dostajemy przy $\tau = \tau_j = \text{const}$ układ zwyczajnych równań różniczkowych zawierający jedynie cztery niewiadome funkcje $x_j, y_j, \varphi_j, (p_1)_j$. Warunki brzegowe dla tego układu otrzymamy kładąc $\tau = \tau_j$ w podanych w pracy [14] zależnościach (3.2)–(3.5). Warunki te nie pozwalają na bezpośrednie obliczenie na brzegu $\xi = \xi_0$ wartości wszystkich poszukiwanych funkcji i prowadzą do problemów brzegowych dla równań (2.3). Problemy te sprowadzamy następnie do zagadnień początkowych (ponieważ z uwagi na znaczną nieliniowość prawych stron równań (2.3) korzystamy z metod numerycznych takich jak Eulera, Adamsa, Rungego–Kutty itp., w których całkowanie odbywa się krok po kroku począwszy od punktu wyjściowego), zakładając na brzegu wyjściowym pewne dodatkowe warunki i rozwiązując zadanie metodą półodwrotną. Do rozpoczęcia obliczeń potrzebna jest zatem znajomość wartości funkcji $x(\xi_0, \tau), y(\xi_0, \tau), \varphi(\xi_0, \tau), p_1(\xi_0, \tau)$ (po części wyznaczamy je z warunków brzegowych, a brakujące zakładamy dodatkowo) oraz $u(\xi_0, \tau)$ i $p_2(\xi_0, \tau)$ dla każdego $\tau = \tau_j$. Dla warunków (3.2) sprecyzowanych w pracy [14] wystarczy założyć jedynie $u(0, \tau_j)$, a wówczas z równań fizycznych znajdujemy

$$(2.9) \quad p_2(0, \tau_j) = p_1(0, \tau_j) = [-\ln u(0, \tau_j)]^\mu.$$

Z warunków brzegowych (3.4) i (3.5) bezpośrednio możemy określić tylko $x(\xi_0, \tau_j)$ i $y(\xi_0, \tau_j)$ zakładając dodatkowo $u(\xi_0, \tau_j)$ otrzymamy (ze związków fizycznych)

$$(2.10) \quad p_2(\xi_0, \tau_j) = 1/2 p_1(\xi_0, \tau_j) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu+1} [-\ln u(\xi_0, \tau_j)]^\mu,$$

a następnie $\varphi(\xi_0, \tau)$ z zależności (3.3). Inne warunki wymagają przyjęcia dwóch dodatkowych danych na brzegu $\xi = \xi_0$. Wielkości, które dodatkowo zakładamy dla $\xi = \xi_0$ kolejno na każdej linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, muszą być tak dobrane, aby każdorazowo spełnione były wszystkie warunki zadane na obu brzegach. Wymaga to na ogół wielu prób (iteracja), przy czym w pierwszym przybliżeniu wygodnie jest przyjąć, że dla $\tau = \tau_j$ brakujące dane osiągają na brzegu $\xi = \xi_0$ te same wartości co dla $\tau = \tau_{j-1}$ np. $u(\xi_0, \tau_j) = u(\xi_0, \tau_{j-1})$.

3. Algorytm obliczeń

Całkowanie równań cząstkowych (1.1) sprowadza się więc do rozwiązywania szeregu układów zwyczajnych równań różniczkowych (2.3) wzdłuż kolejnych linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$ w całym obszarze $D(\xi, \tau)$ przy omówionych wyżej warunkach brzegowych. Równania te będziemy rozwiązywać numerycznie. Można to uczynić opierając się ściśle

na metodzie prostych, czyli rugując w tych równaniach u_j i $(p_2)_j$ za pomocą związków (2.7) i (2.4). Taki sposób postępowania nie byłby jednak dogodny ze względu na obliczanie pochodnej $\frac{du_j}{d\xi}$ występującej w równaniach (2.3). Wprawdzie wystarczyłoby wówczas zróżniczkować wyrażenie (2.7), ale wtedy zachodziłaby potrzeba (zwłaszcza przy większej dokładności wzorów różnicowych) zachowania w pamięci maszyny cyfrowej zbyt wielu danych na liniach $\tau = \tau_{j-r} = \text{const}$, $r = 1, 2, 3, \dots, k$, co często praktycznie nie jest możliwe. Obliczymy więc tę pochodną nieco inaczej. Podzielmy w tym celu obszar całkowania na $2m$ części za pomocą linii $\xi = \xi_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2m$ przeprowadzonych w jednakowych odstępach $1/2\Delta\xi = 1/2(\xi_i - \xi_{i-2})$. Niech $w(\xi, \tau)$ przedstawia dowolną z rozpatrywanych funkcji; aby uprościć zapis oznaczymy krótko $w(\xi_i, \tau_j) = w_{ij}$. W niektórych przypadkach dla lepszego rozróżnienia wskaźników rozdzielać je będziemy przecinkiem. Chcąc teraz obliczyć pochodną $\left(\frac{du}{d\xi}\right)_{i-1,j}$ znajdujemy naprzód ze wzoru (2.7) u_{ij} , a następnie korzystamy ze schematu różnicowego analogicznego do (2.6).

Pokażemy obecnie jaki ma ostatecznie przebieg numeryczne rozwiązywanie układu (1.1) oparte na metodzie Rungego-Kutty (por. [2]) całkowania zwyczajnych równań różniczkowych. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy przy tym następujące oznaczenia [por. (2.3), (2.4), (2.6), (2.7)]:

$$B = \frac{\xi \cos \varphi}{ux \cos \varphi} = \frac{dx}{d\xi}, \quad C = \frac{B}{p_1 \cos \varphi} \left(\frac{Q_n}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right) = \frac{d\varphi}{d\xi},$$

$$(3.1) \quad D = \frac{B}{u} \left(p_2 - p_1 + \frac{xQ}{fu \cos \varphi} \right) - p_1 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} \right) = \frac{dp_1}{d\xi},$$

$$E = B \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{d\xi}, \quad F = \frac{p_1}{2} + \sqrt{\varepsilon_i^{2\mu} - \frac{3}{4} p_1^2} = p_2,$$

$$(3.2) \quad L_{i-2,j} = \frac{2}{\Delta\xi} \sum_{s=0}^k \beta_{ks} u_{i-s-1,j} \approx \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{i-2,j}.$$

$$(3.3) \quad S_{ij} = -\frac{1}{\beta_{k0}} \left[\frac{u(p_1 + p_2)}{x(2p_2 - p_1)} \right]_{i,j-1} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} x_{i,j-1} - \frac{1}{\beta_{k0}} \sum_{r=1}^k \beta_{kr} u_{i,j-r} = u_{ij},$$

$$(3.4) \quad M_{\nu(w)ij} = \gamma K_{\nu(w)ij},$$

gdzie

$$(3.5) \quad K_{\nu(w)} = \frac{dw}{d\xi} \Delta\xi, \quad \nu = 1, 2, 3, 4.$$

$$(3.6) \quad H_{i-z,j}(w) = 1/6 \sum_{r=1}^4 \omega K_{\nu(w)i-z,j}.$$

Wielkości $\gamma = \gamma(\nu)$ i $\omega = \omega(\nu)$ będące współczynnikami występującymi we wzorach Rungego–Kutty przybierają wartości dyskretne 1/2, 1/2, 1, 1 oraz 1, 2, 2, 1, podobnie jak wyrażenie $\alpha = \alpha(\nu) = 2, 1, 1, 0$. Przy przyjętych wyżej oznaczeniach proces obliczeń będzie przebiegać następująco

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad & K_\nu(x)_{i-\alpha,j} = B_{i-\alpha,j} \Delta \xi, \\
 & K_\nu(y)_{i-\alpha,j} = E_{i-\alpha,j} \Delta \xi, \\
 & K_\nu(\varphi)_{i-\alpha,j} = C_{i-\alpha,j} \Delta \xi, \\
 & x_{i+2\gamma-2,j} = x_{i-2,j} + M_\nu(x)_{i-\alpha,j}, \\
 & y_{i+2\gamma-2,j} = y_{i-2,j} + M_\nu(y)_{i-\alpha,j}, \\
 & \varphi_{i+2\gamma-2,j} = \varphi_{i-2,j} + M_\nu(\varphi)_{i-\alpha,j}, \\
 & u_{i+2\gamma-2,j} = S_{i+2\gamma-2,j}, \\
 & \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{i-\alpha,j} = L_{i-\alpha,j}, \\
 & K_\nu(p_1)_{i-\alpha,j} = D_{i-\alpha,j} \Delta \xi, \\
 & (p_1)_{i+2\gamma-2,j} = (p_1)_{i-2,j} + M_\nu(p_1)_{i-\alpha,j}, \\
 & (p_2)_{i+2\gamma-2,j} = F_{i+2\gamma-2,j}.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie dla $\nu = 4$ wartości poszukiwanych funkcji w punkcie (ξ_i, τ_j) wyznaczamy ze wzorów

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & x_{ij} = x_{i-2,j} + H(x)_{i-2,j}, \\
 & y_{ij} = y_{i-2,j} + H(y)_{i-2,j}, \\
 & \varphi_{ij} = \varphi_{i-2,j} + H(\varphi)_{i-2,j}, \\
 & u_{ij} = S_{ij}, \\
 & (p_1)_{ij} = (p_1)_{i-2,j} + H(p_1)_{i-2,j}, \\
 & (p_2)_{ij} = F_{ij},
 \end{aligned}$$

po czym przechodzimy do punktów $(\xi_{i+2}, \tau_j), (\xi_{i+4}, \tau_j), \dots, (\xi_{2m}, \tau_j)$, a potem na linii $\tau_{j+1} = \text{const}, \tau_{j+2} = \text{const} \dots, \tau_n = \text{const}$, aż skonstruujemy rozwiązanie w całym obszarze $D(\xi, \tau)$.

Jak widać ze wzorów różnicowych (3.2) i (3.3) do prowadzenia sukcesywnych obliczeń może być potrzebna (przy dokładniejszych wzorach) znajomość wartości poszukiwanych funkcji w kilku początkowych punktach na liniach $\xi = \xi_i = \text{const}$ oraz $\tau = \tau_j = \text{const}$. Wartości te uzyskujemy za pomocą tzw. iteracji wejścia zależnej od przyjętej metody rozwiązywania, zastosowanych wzorów różnicowych i żądanej dokładności obliczeń.

Przytoczone wyżej rozważania dotyczyły, jak to zaznaczyliśmy na wstępie, powłok wykonanych z materiałów izotropowych o charakterystyce fizycznej opisanej równaniem (1.2); łatwo zauważyć, że przyjęcie ortotropii materiału, jak w pracy [15], lub też innego równania fizycznego typu $F(p_1, p_2, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0$ w niczym nie zmienia przedstawionego toku obliczeń.

4. Przykład

W charakterze przykładu rozpatrzmy powłokę o kształcie walca kołowego (w stanie nieodkształconym) zakończoną dwoma sztywnymi, swobodnie przesuwными denkami, obciążoną równomiernie rozłożonymarciem wewnętrznym. Ścianka powłoki nieobciążona

zonej ma stałą grubość ($f = 1$). Podstawowy układ równań w świetle teorii płynięcia plastycznego ma wówczas postać (por. [16])

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\cos \varphi}{ux}, & \frac{\partial p_1}{\partial \eta} &= -\frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\cos \varphi}{ux^2} (p_2 - p_1), \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\sin \varphi}{ux}, & u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial \tau} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial \tau} &= 0, \\ \sin \varphi &= \frac{xQ(\tau)}{2p_1 u}, & p_2 &= 1/2 p_1 + \sqrt{\varepsilon_1^{2\mu} - 3/4 p_1^2}, \end{aligned}$$

gdzie η jest osiową współrzędną powłoki (typu Lagrange'a — por. rys. 1), a $Q(\tau)$ dowolną monotonicznie rosnącą funkcją, którą odtąd przyjmować będziemy jako $Q(\tau) = Q_0 + \tau$. Przy założeniu pierwotnej długości powłoki $L_0 = 2$, równania (4.1) mają spełnić następujące warunki brzegowe (por. [14]):

$$(4.2) \quad x(0, \tau) = 1, \quad y(0, \tau) = 0, \quad x(2, \tau) = 1,$$

$$(4.3) \quad p_1(0, \tau) = 2p_2(0, \tau) = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\mu+1} [-\ln u(1, \tau)]^\mu.$$

W obliczeniach zamiast trzeciego z warunków (4.2) z uwagi na symetrię korzystamy z zależności $\varphi(1, \tau) = \pi/2$.

Warunki początkowe dla równań (4.1) stanowi rozwiązanie (przy warunkach brzegowych (4.2) układu równań — por. [16])

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= \frac{\cos \varphi}{ux}, & \frac{du}{d\eta} &= -u \frac{\frac{1}{x} \frac{dx}{d\eta} [1 + D(1 + BT)]}{B(1 + BT) + 2}, \\ \frac{dy}{d\eta} &= \frac{\sin \varphi}{ux}, & \sin \varphi &= \frac{xQ_0}{2p_1 u}, \end{aligned}$$

powłoki walcowej opartych na fizycznych związkach deformacyjnej teorii plastyczności uogólnionej na zakres skończonych odkształceń. W równaniach tych

$$(4.5) \quad T = \frac{2(\mu-1)}{3\varepsilon_1^2}, \quad B = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \quad D = 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

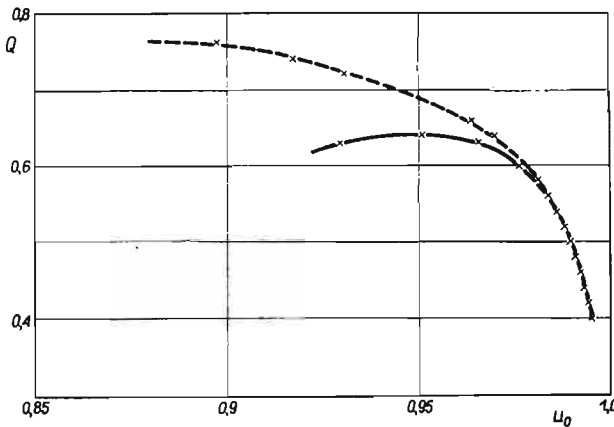
$$\varepsilon_1 = \ln \left(\frac{dx}{d\eta} \frac{1}{\cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln x, \quad \varepsilon_3 = \ln u.$$

Do obliczeń przyjęto $\mu = 1/3$ oraz $Q_0 = 0,4$.

Równania (4.4) obowiązują w danym punkcie powłoki do chwili osiągnięcia przez intensywność rzeczywistych naprężeń p_i granicy plastyczności \bar{p} , za którą w przypadku potęgowego wzmocnienia (1.2) można np. przyjąć tzw. umowną granicę plastyczności. Przy wzroście obciążenia Q od zera do pełnej wielkości — wartość tak czy inaczej zdefiniowanej granicy plastyczności nie jest oczywiście osiągana w całej powłoce jednocześnie, lecz stopniowo w coraz to większej strefie. Wobec tego, w pewnym zakresie obciążeń należałoby w niektórych obszarach powłoki stosować równania (4.1) (dla $p_i(\eta, \tau) > \bar{p}$),

a w pozostałych równania (4.4) (dla $p_i(\eta, \tau) \leq \bar{p}$) tak długo, dopóki w całej powłoce nie będzie spełniony warunek $p_i \geq \bar{p}$. Taki sposób rozwiązywania choć poprawny merytorycznie okazuje się jednak niecelowy praktycznie, gdyż jak wynika z konkretnych obliczeń, różnice między rezultatami osiągniętymi w oparciu o obie rozważane teorie plastyczności są znikomo małe w zakresie odkształceń odpowiadających \bar{p} . Z tego względu w naszym przykładzie poprzestaliśmy na rozwiązaniu układu (4.4) dla jednej ustalonej wartości obciążenia $Q = 0,4$, a otrzymane rezultaty przyjęto jako warunki początkowe dla równań (4.1) od razu w całej powłoce. Przy $Q > 0,4$ obliczenia przeprowadzono już na podstawie równań (4.1); równocześnie jednak, celem porównania obu teorii, scałkowano też układ (4.4) dla szeregu wybranych wartości Q .

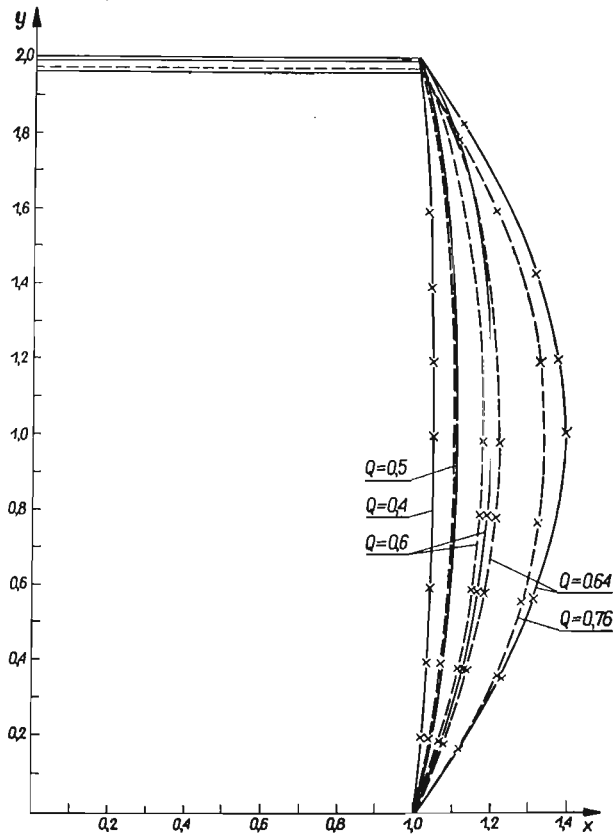
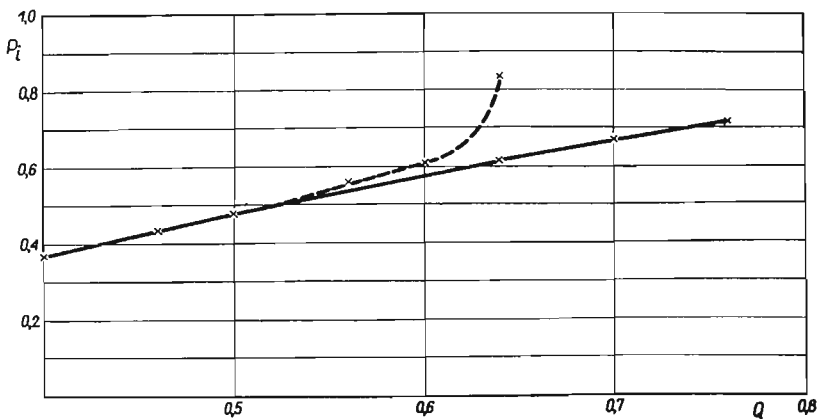
Wyniki przedstawione są na rys. 2-7*. Rysunek 2 pokazuje jakie wartości ostatecznie przybiera — w zależności od zadanego obciążenia Q — parametr u_0 (grubość powłoki przy denku) przyjmowany dodatkowo (drogą prób) przy zamianie problemu brzegowego dla równań (4.1) i (4.4) na problem początkowy. Rysunek ten rzuca również światło na zagadnienie stateczności powłoki; dla teorii odkształceniowej widać wyraźnie maksimum obciążenia $Q = 0,64$, natomiast przy zastosowaniu związków fizycznych teorii płynięcia



Rys. 2. Wykresy funkcji $Q = f(u_0)$

plastycznego obciążenie nie może przekroczyć (czego nie da się już stwierdzić bezpośrednio na wykresie) wartości $Q = 0,77$. Rysunek 3 ilustruje zmianę formy powłoki w procesie obciążenia. W miarę wzrostu obciążenia różnice w kształcie powłoki obliczanej w myśl równań (4.1) i (4.4) wyraźnie się pogłębiają. Podobny wniosek nasuwa analiza rys. 4 i 5, gdzie przedstawione są krzywe opisujące zmianę intensywności naprężeń $p_i = p_i(Q)$ oraz odkształceń $\varepsilon_i = \varepsilon_i(Q)$ wybranego punktu w środku długości powłoki ($\eta = 1$) w zależności od obciążenia Q . Na rys. 6 i 7 pokazano rozkład naprężeń i odkształceń w powłoce dla $Q = 0,64$, tj. wówczas, gdy różnice między wynikami obu teorii (w zakresie statecznym dla teorii odkształceniowej) są największe.

*Linia przerywana odpowiada teorii płynięcia na rys. 2, 3, 6, 7 oraz teorii deformacyjnej na rys. 4 i 5.

Rys. 3. Forma odkształconej powłoki dla różnych warstw obciążenia Q Rys. 4. Intensywność rzeczywistych naprężeń p_l w środku długości powłoki jako funkcja obciążenia Q

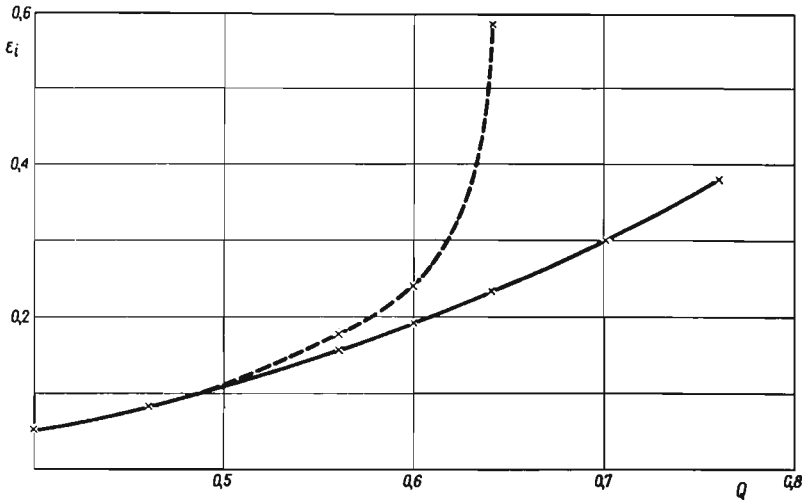
Z przytoczonych tu porównań wynikają następujące spostrzeżenia:

- 1) zgodność obu teorii jest dobra przy stosunkowo niewielkich odkształceniach;
- 2) w miarę wzrostu obciążeń zgodność ta się psuje i powstają istotne różnice ilościowe i jakościowe;

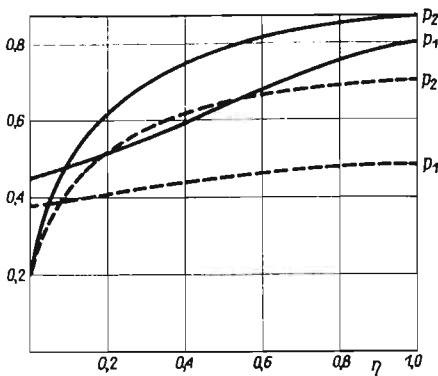
3) w całym zakresie obciążeń teoria płynięcia plastycznego daje niższe wartości naprężeń i odkształceń w powłoce niż teoria odkształceniowa;

4) powłoka traci stateczność przy niższej wartości obciążenia dla teorii odkształceniowej.

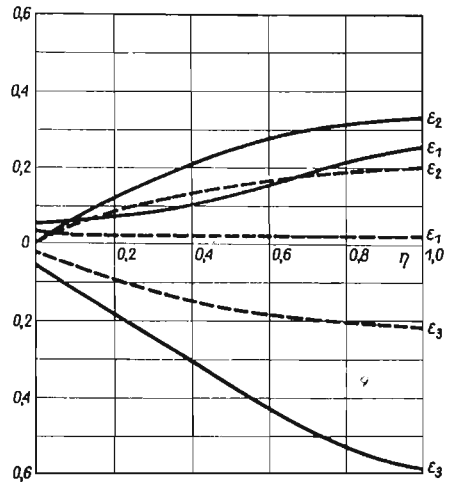
Całkowanie zwyczajnych równań różniczkowych (4.4) odbywało się metodą Rungego-Kutty. Obliczenia przeprowadzono sposobem półdwrotnym, przy czym program przewidywał automatyczną korektę danych wyjściowych (u_0) aż do spełnienia z żadaną dokładnością warunku $\varphi(1, \tau) = \pi/2$ na drugim brzegu ($\eta = 1$). Schemat blokowy obliczeń pokazuje tablica 2.



Rys. 5. Intensywność odkształceń ϵ_i w środku długości powłoki jako funkcja obciążenia Q

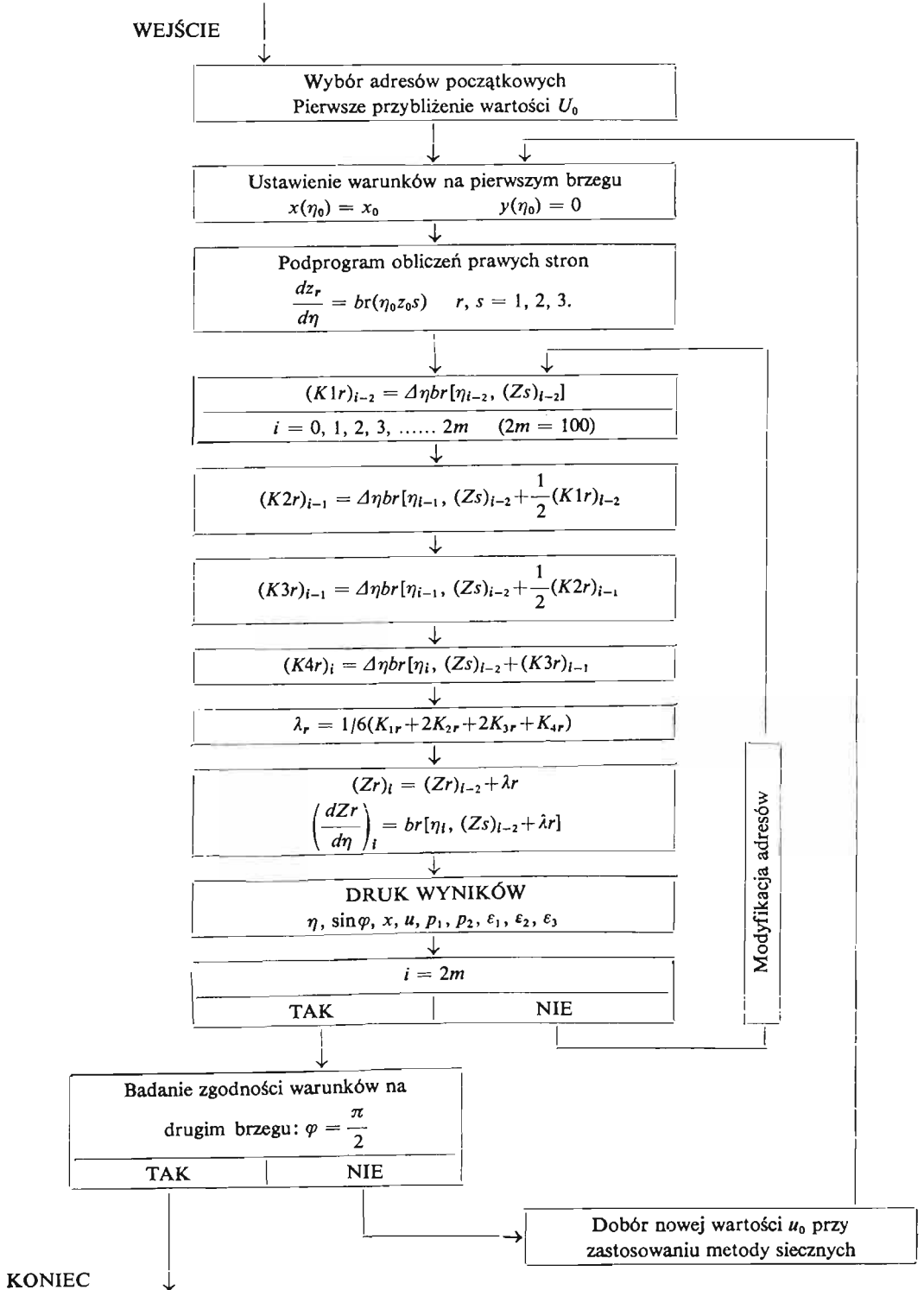


Rys. 6. Rozkład rzeczywistych naprężeń głównych wzdłuż długości powłoki dla obciążenia $Q = 0,64$

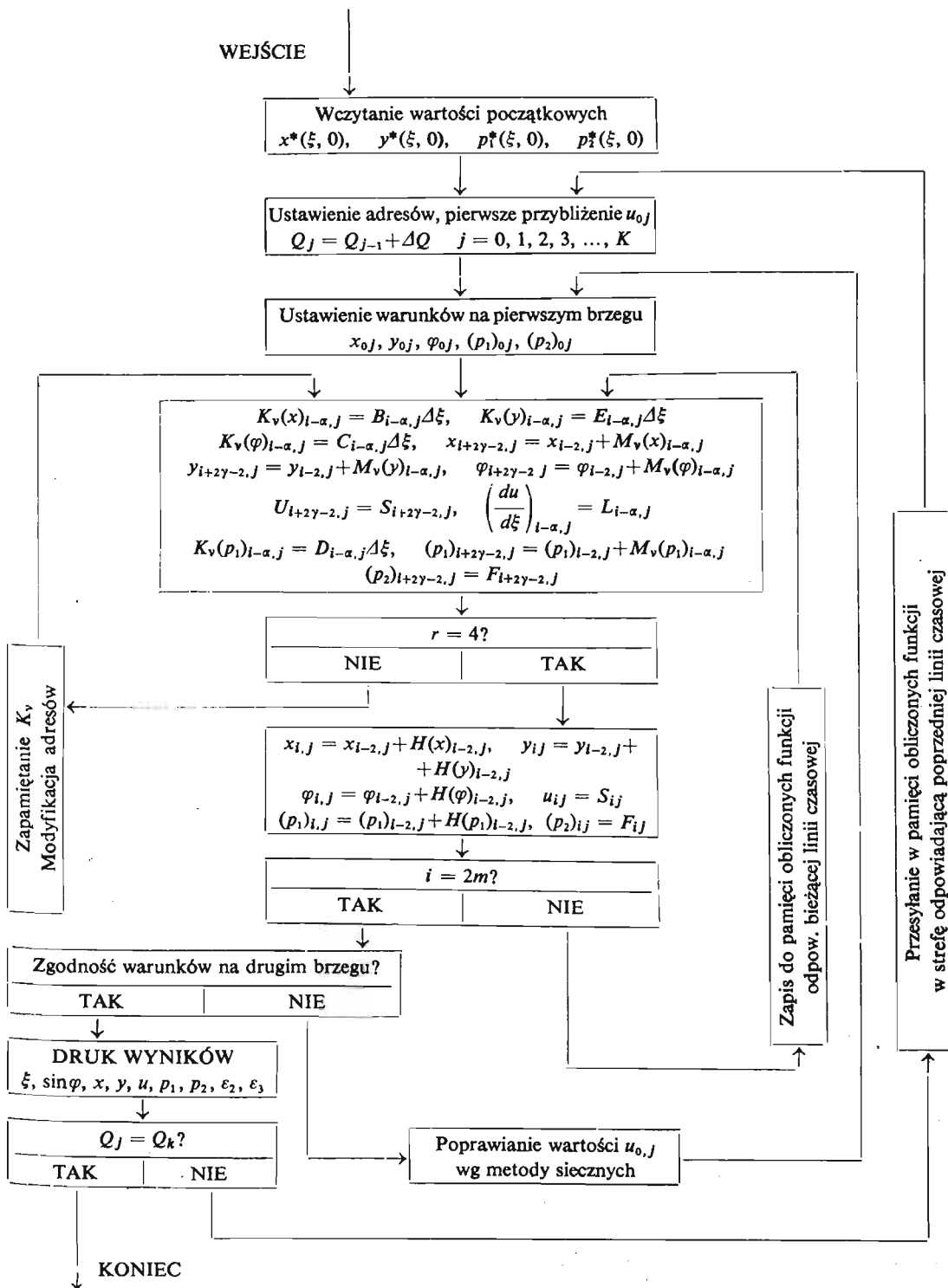


Rys. 7. Rozkład odkształceń głównych wzdłuż długości powłoki dla obciążenia $Q = 0,64$

Tablica 2. Schemat blokowy algorytmu obliczeń układu równań (4.4)



Tablica 3. Schemat blokowy algorytmu obliczeń układów równań (1.1) i (4.1)



Celem numerycznego całkowania równań (1.1) dla dowolnej obrotowo-symetrycznej powłoki w oparciu o algorytm (3.7), (3.8) opracowany został schemat blokowy, którego wersję przeznaczoną również dla powłoki walcowej przedstawia tablica 3. Sporządzono także odpowiedni [słuszny zarówno dla równań (4.1) jak i ogólnego układu (1.1)] program obliczeń na elektroniczną maszynę cyfrową ODRA-1013 gwarantujący pełną automatyzację rachunków. Program jest opracowany w języku wewnętrznym maszyny, wszystkie operacje matematyczne (za wyjątkiem rozkazów organizacyjnych) są wykonywane w pamięci ferrytowej. Zapewnia to maksymalną szybkość obliczeń możliwą do uzyskania na maszynie cyfrowej ODRA-1013. Pomimo to otrzymanie kompletnych wyników liczbowych rozwiązanej powłoki wymagało kilkudziesięciu godzin nieprzerwanej pracy maszyny. Program jest obecnie przechowywany w Ośrodku Maszyn Cyfrowych przy Katedrze Mechaniki Teoretycznej Politechniki Krakowskiej, gdzie wykonane były wszystkie obliczenia.

Literatura cytowana w tekście

1. Я. С. БЕРЕЗИН, Н. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*, Физматгиз., Т. 2, Москва 1962.
2. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
3. A. S. GRIGORIEV, *The Stress State and the Carrying Capacity of Flexible Plates and Shells at Large Deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam; PWN Warszawa 1964, repr. *Non-Classical Shell Problems*, Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.
4. R. HILL, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. A 193 (1948), 281-297.
5. R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1950.
6. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw-Hill Book Co, 1953.
7. А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, ГГТИ, Москва 1948.
8. И. А. КИЙКО, *Безконтактная штамповка оболочки вращения*, Вестник МГУ, Сер. мат., 5, 1957.
9. Н. Н. МАЛИНИН, *Волочение труб через конические матрицы*, Изв. АН СССР, Механика, 5, 1965.
10. Z. MARCINIAK, *Mechanika procesów tłoczenia blach*, PWNT, Warszawa 1961.
11. R. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press INC, New York 1958.
12. Praca zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
13. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie błonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inż. 4, 13 (1965), Streszczenie ang.: Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., 1, 15 (1967), 31-40.
14. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok w świetle teorii płynięcia plastycznego*, Mech. Teoret. i Stos. 4, 5 (1967).
15. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia niesprężystych wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok ortotropowych*, Rozpr. Inż., 4, 15 (1967).
16. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 11, Kraków 1968.
17. E. ROSS, W. PRAGER, *On the theory of the bulge test*, Quart. Appl. Math. 1, 12 (1954).
18. H. W. SWIFT, *Stresses and strains in tube-drawing*, Phil. Mag., 40 (1949), 883-902.
19. W. SZCZEPIŃSKI, *The method of successive approximations of some strain-hardening solutions*, Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech., Pergamon Press, 1962.

20. W. SZCZEPIŃSKI, *Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body*, Arch. Mech Stos., 5, 15 (1963).
21. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
22. А. Д. Томленов, *Пластические напряженное состояние и устойчивость процесса вытяжки деталей сложной формы*, Вопросы обработки металлов давлением, Изд. АН СССР, Москва 1958.
23. А. Д. Томленов, *Механика процессов обработки металлов давлением*, Машгиз., Москва 1963.
24. ТРАН ЛЬУ ЧИОНГ, *Жестко-пластический анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Маш., 4, 1965.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В работе рассматривается разработанный авторами метод численного интегрирования системы (1.1), квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка, (выведенных в работе [14]), описывающих форму, напряжения и деформации гибких вращательно-симметрических оболочек, с точки зрения теории пластического течения, обобщенной на область конечных деформаций. На основе, представленной в работе блок-схемы, составлено программу вычислений на электронной счетной машине ОДРА-1013, с помощью которой решается, с большой точностью, конкретный случай гибкой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением. Результаты этих расчетов, сравниваются с решением аналогичной задачи обобщенной деформационной теории пластичности, при разных величинах нагрузки.

Summary

NUMERICAL CALCULATION OF FLEXIBLE SHELLS OF REVOLUTION SUBJECTED TO PLASTIC FLOW AT FINITE STRAINS

The paper is concerned with a method of numerical integration of the system (1.1) of quasi-linear hyperbolic partial differential equations that has been derived by the authors in [14]. These equations describe the form, the stresses, and the deformations of flexible shells in the light of the theory of plastic flow, generalized for finite strains. On the basis of a block scheme (presented in the paper), a program for the electronic computer ODRA-1013 has been established and a particular case of a thin cylindrical shell under uniform internal pressure has been solved with great accuracy. The results of calculations have been compared with a solutions of an analogous problem on the basis of physical relations in the generalized deformational plastic theory at different intensities of load.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1968 r.