

O PROFILACH PRĘDKOŚCI PRZY LAMINARNYCH PRZEPLYWACH POLIMERÓW

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Znajomość możliwie dokładnych profili prędkości dla roztworów i stopionych polimerów przepływających przez rury i kanały o przekroju prostokątnym posiada istotne znaczenie nie tylko dla analizy procesów technologicznych, lecz również dla badania i wyjaśnienia różnych «anomalii» towarzyszących przepływowi (wpływ naprężeń normalnych, redukcja oporów przepływu, poślizgi na ściankach itp.). Metody doświadczalnego wyznaczania krzywych płynięcia (konsystencji) dla cieczy nienewtonowskich, za jakie uważa się większość roztworów i stopionych polimerów, znane są dobrze z literatury podstawowej (por. np. [1, 2, 3, 4, 5]). Krzywe płynięcia pozwalają na analityczne określanie profili prędkości w oparciu o przyjęty idealny model cieczy (równania konstytutywne), co z kolei nie zawsze prowadzi do zadowalającej zgodności z profilami obserwowanymi w rzeczywistości.

Ostatnio podjęto liczne próby bezpośredniego mierzenia profili prędkości, stosując różne urządzenia elektryczne, optyczne itp., zarówno dla roztworów polimerów (por. [6, 7, 8, 9]), jak i dla stopionych polimerów (por. [10, 11, 12]) przepływających z różnymi szybkościami. Niezależnie od różnego stopnia trudności technicznych i niedokładności pomiarów (różne wymiary ziaren znaczących, zaburzenia wywołane obecnością elektrod i innych elementów pomiarowych), wymienieni autorzy różnili się nieraz znacznie w ocenie pewnych zjawisk towarzyszących przepływowi. I tak np. w pracy [11] stwierdzono przy przepływach stopionych polietylenów poślizg na ściankach i uznano go za istotną przyczynę rozrywania stopu (*melt fracture*), podczas gdy przy dokładniejszych pomiarach przedstawionych w [12] zjawiska poślizgu w ogóle nie obserwowano.

Korzyść ze znajomości analitycznych wyrażeń opisujących dokładnie rzeczywiste profile prędkości w cieczach nienewtonowskich jest ogromna, zwłaszcza przy badaniach teoretycznych. Na przykład w zagadnieniu stateczności przepływu i przejścia do przepływu zaburzonego, kształt profilu prędkości odgrywa rolę pierwszoplanową i niejednokrotnie decyduje o samym zjawisku (por. np. [13, 14]).

W niniejszych rozważaniach zwrócono uwagę na możliwość opisu przepływów stopionych polimerów przy małych szybkościach ścinania, za pomocą równań konstytutywnych nieściśliwej cieczy lepkosprężystej stopnia trzeciego (por. [15]). Odpowiednie

analityczne profile prędkości porównano z doświadczalnymi wynikami pracy [12]. Właściwą część rozważań poprzedzono krótkim omówieniem innych równań o charakterze empirycznym, jak prawo potęgowe Ostwalda—de Waele'a (por. [1, 2, 4]), zwracając szczególną uwagę na wady i zalety różnych sposobów podejścia.

2. Krzywe płynięcia i prawo potęgowe

Doświadczalne wyznaczanie krzywych płynięcia cieczy nienewtonowskich przepływających przez cylindryczne kapilary (przepływ Poiseuille'a) bazuje na następujących zależnościach Rabinowitscha—Mooneya (por. [4, 16]):

$$(2.1) \quad q_w = \frac{1}{\pi R^3} \left[3Q + \Delta P \frac{dQ}{d\Delta P} \right] = \frac{D_c}{4} \left[3 + \frac{d(\log D_c)}{d(\log \tau_w)} \right],$$

$$D_c = \frac{4Q}{\pi R^3}, \quad \tau_w = \frac{\Delta P}{l} \frac{R}{2},$$

gdzie q_w jest gradientem szybkości ścinania na ścianie przewodu, τ_w — odpowiadającym mu naprężeniem ścinającym, Q — wydatkiem cieczy, ΔP — spadkiem ciśnienia na długości l przepływu ustalonego, zaś R — promieniem wewnętrznym kapilary. Wielkości D_c i τ_w , z których pierwsza nazywana jest często pozorną szybkością ścinania, są zgodne ze zmiennymi konsystentnymi REINERA [1]. Zupełnie analogiczny wzór dla płaskich przepływów w kanałach (płaski przepływ Poiseuille'a) o grubości $a = 2h$ i szerokości b przybiera postać (por. [12, 4])

$$(2.2) \quad q_w = \frac{1}{2h^2b} \left[2Q + \Delta P \frac{dQ}{d\Delta P} \right] = \frac{D_s}{3} \left[2 + \frac{d(\log D_s)}{d(\log \tau_w)} \right],$$

$$D_s = \frac{3Q}{2h^2b}, \quad \tau_w = \frac{\Delta P}{l} h.$$

Zależności (2.1) i (2.2) dają jednoznaczny związek między τ_w i D_c lub D_s — opisujący własności cieczy w określonej temperaturze. W przypadku przeprowadzenia obliczeń dla ustalonych wartości D_c lub D_s wystarczy dokonać pomiaru w jednym doświadczeniu. Nie wchodząc w techniczne szczegóły samych doświadczeń, wspomnimy tylko, że korzystając z zależności (2.1) lub (2.2) należy uwzględnić odpowiednie poprawki na «efekty wejściowe» warunkujące rozwinięcie profilu prędkości w przepływie ustalonym (por. np. [4, 17]).

Doświadczalnie zaobserwowany fakt, że przy różnych zakresach szybkości ścinania zależności $\tau_w - D_c$ lub $\tau_w - D_s$ przybierają, w podwójnie logarytmicznej skali, postać bardzo zbliżoną do liniowej, był bezpośrednim powodem szerokiej kariery prawa potęgowego (Ostwalda—de Waele'a) w postaci następującej:

$$(2.3) \quad \tau = k|q|^n, \quad k > 0, \quad n \geq 1 \text{ lub } n \leq 1.$$

Prawo powyższe wiąże naprężenie ścinające τ z odpowiednim gradientem ścinania q za pośrednictwem dwóch stałych: miary konsystencji cieczy k (np. charakteryzującej lepkość przy $q = 1 \text{ sek}^{-1}$), wykładnika zachowania się cieczy n .

Zależności typu (2.3) i inne zostały obszernie omówione w literaturze (por. [1, 2, 4]), toteż obecnie ograniczymy się do przypomnienia, że prowadzą one do profili prędkości w postaci

$$(2.4) \quad v = \frac{Q}{\pi R^2} \frac{3n+1}{n+1} \left[1 - \left| \frac{r}{R} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

dla przepływu przez kapilarę i

$$(2.5) \quad v = \frac{Q}{2hb} \frac{2n+1}{n+1} \left[1 - \left| \frac{y}{h} \right|^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

dla płaskiego przepływu w szczelinie.

W stosunku do prawa potęgowego (2.3) wysuwano cały szereg zastrzeżeń różnej natury (por. REINER [1]). Niektóre z nich, jak zależność wymiaru stałej materiałowej k od wykładnika potęgi n oraz nieobiektywność, mogą być usunięte poprzez wprowadzenie bezwymiarowego gradientu ścinania oraz zapisanie (2.3) w innej postaci, w której pozorna lepkość $\eta = \tau/q$ jest funkcją drugiego niezmiennika szybkości deformacji. Inne, jak np. własność, że dla $q = 0$ pozorna lepkość staje się nieskończoną lub zerową w zależności od tego czy $n < 1$, czy też $n > 1$, nie mogą być ominięte bez zmiany charakteru prawa (2.3). Ostatni fakt posiada istotne znaczenie, gdyż wprowadza zmiany w centralnej części profilu prędkości niezależnie od realnych własności lepkich cieczy przy małych gradientach ścinania.

Z punktu widzenia teoretycznej poprawności i ogólności wzoru (2.3) lista zasadniczych zastrzeżeń może być znacznie dłuższa. I tak np., nie pozwala on na ujmowanie bardziej złożonych przepływów wiskozymetrycznych, nie opisuje własności lepkością cieczy nienewtonowskich, efektów naprężeń normalnych itp. W czasie gdy dysponujemy ogólną teorią cieczy prostych i teorią przepływów wiskozymetrycznych (por. [3, 15]), należy traktować prawo (2.3) jako zależność empiryczną, ułatwiającą obliczenia w określonym zakresie parametrów fizycznych, lecz nie mogącą stanowić podstawy nowoczesnej wiskozymetrii i bardziej zaawansowanych studiów nad przepływami polimerów.

Gwoli sprawiedliwości należy dodać, że o popularności praw potęgowych w reologii zadecydowała stosunkowa prostota obliczeń, łatwość doświadczalnego wyznaczenia stałych k i n oraz możliwość opisu krzywych płynięcia w różnych zakresach szybkości ścinania poprzez właściwy dobór stałych.

3. Profile prędkości przy przepływach cieczy lepkością stopnia trzeciego

Jako kontrpropozycję w stosunku do prawa potęgowego, rozważymy obecnie możliwość zastosowania równań konstytutywnych nieściśliwej cieczy lepkością stopnia trzeciego do wyznaczenia profili prędkości w powolnych przepływach stopionych polimerów przez kapilary i szczeliny. Równania stopnia trzeciego pozwalają na odpowiednią

aproxymację funkcji wiskozymetrycznych dla ustalonych przepływów nieściśliwych cieczy prostych (por. [3, 15]). Należy nadmienić, że teoria funkcji wiskozymetrycznych daje zgodny z rzeczywistością opis licznych rozcieńczonych i skoncentrowanych roztworów polimerów; są to przede wszystkim prace MARKOVITZA i współpracowników [3, 18].

Dla wystarczająco powolnych przepływów nieściśliwych cieczy prostych równania konstytutywne mogą być zapisane w postaci następującej (por. [15]):

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_0(1 + \gamma \operatorname{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1), \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

ponieważ dla ustalonych przepływów wiskozymetrycznych $\mathbf{A}_n = 0$ dla $n \geq 3$. W równaniu powyższym η_0 oznacza lepkość przy zerowym gradiencie ścinania, α_1 , α_2 i β — współczynniki odpowiedzialne za lepkość sprężyste własności cieczy, γ — współczynnik charakteryzujący zmianę lepkości, p — dowolną funkcję skalarną. Kinematyczne tensory Rivlina — Ericksena są zdefiniowane następująco (por. [15]):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T, \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_1 + \nabla \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{A}_1, \end{aligned}$$

gdzie $\nabla \mathbf{v}$ jest gradientem prędkości, zaś wskaźnik T oznacza operację transponowania.

Można łatwo pokazać (por. [15, 18]), że stałe materiałowe w (3.1) wiążą się z funkcjami wiskozymetrycznymi w sposób następujący:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \eta(q) &= \eta_0(1 + 2\gamma q^2) + 2\beta q^2 + o(q), \\ \sigma_1(q) &= 2\alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^2 + o(q^4), \\ \sigma_2(q) &= \alpha_2 q^2 + o(q^4), \end{aligned}$$

przy czym η oznacza funkcję lepkości, zaś σ_1 i σ_2 — odpowiednie funkcje naprężeń normalnych. W ogólnym przypadku cieczy prostej obowiązują związki

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \eta_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} \eta(q), \\ \alpha_2 &= \lim_{q \rightarrow 0} [\sigma_2(q)/q^2], \\ \alpha_1 &= \lim_{q \rightarrow 0} [(\sigma_1 - \sigma_2)/2q^2]. \end{aligned}$$

3.1. Płaskie przepływy Poiseuille'a. Dla płaskiego przepływu w kanale lub szczelinie równania (3.1) upraszczają się do postaci (por. [15])

$$(3.1.1.) \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta_0(1 + \eta_1 \operatorname{tr} \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}_1 = 0,$$

a ponieważ w kartezjańskim układzie współrzędnych jedyną niezerową składową prędkości jest prędkość w kierunku przepływu $v(y)$, mamy

$$(3.1.2) \quad [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2q^2 \end{bmatrix}, \quad q = \frac{\partial v}{\partial y}$$

oraz

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p, & \sigma_{22} &= -p + 2\alpha_2 q^2, & \sigma_{33} &= -p, \\ \sigma_{12} &= \eta_0(1 + 2\eta_1 q^2)q. \end{aligned}$$

Podstawiając (3.1.3) do równań równowagi w postaci

$$(3.1.4) \quad \operatorname{div} \sigma = \rho \dot{v} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right),$$

otrzymamy

$$(3.1.5) \quad p = -2\alpha_2 q^2 + fx, \quad \eta_0(1 + 2\eta_1 q^2)q = -fy,$$

gdzie przez $f = \Delta P/l$ oznaczyliśmy gradient ciśnienia w kierunku przepływu.

Ostatnie z równań (3.1.5) zapisane w postaci

$$(3.1.6) \quad \frac{\partial v}{\partial y} + 2\eta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^3 = -\frac{f}{\eta_0} y,$$

można całkować bezpośrednio; wygodniej jest jednak przedstawić wynik całkowania w postaci następującego szeregu (por. [13])

$$(3.1.7) \quad v(y) = \frac{fh^2}{2\eta_0} \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{M}{2} \left(1 - \frac{y^4}{h^4} \right) + M^2 \left(1 - \frac{y^6}{h^6} \right) - \frac{11}{4} M^3 \left(1 - \frac{y^8}{h^8} \right) + \dots \right],$$

gdzie $M = 2\eta_1(fh)^2/\eta_0^2$ jest parametrem charakteryzującym zmianę lepkości ze wzrostem gradientu ścinania. Szereg (3.1.7) jest bezwzględnie zbieżny dla małych $|M|$ ($|M| \leq 0,3$). W praktycznych obliczeniach można z wystarczającym stopniem dokładności ograniczyć się do trzech pierwszych wyrazów szeregu (3.1.7) nawet dla $|M| \leq 0,5$.

Warto nadmienić, że dla ustalonych wartości f , h i η_0 profil prędkości będzie bardziej wydłużony, niż odpowiedni profil paraboliczny, gdy $M < 0$ i spłaszczony, gdy $M > 0$ (por. [13]). Nieco inaczej ma się sprawa, gdy porównujemy profile prędkości dla ustalonego wydatku Q . Mamy wówczas

$$(3.1.8) \quad Q = 2 \int_0^h v(y) b dy = \frac{2fh^3b}{3\eta_0} \left[1 - \frac{3}{5} M + \frac{9}{7} M^2 \right]$$

oraz

$$(3.1.9) \quad v(y) = \frac{3Q}{4hb \left(1 - \frac{3}{5} M + \frac{9}{7} M^2 \right)} \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{M}{2} \left(1 - \frac{y^4}{h^4} \right) + M^2 \left(1 - \frac{y^6}{h^6} \right) \right],$$

a zatem dla małych $M < 0$ profil będzie bardziej spłaszczony, niż w przypadku cieczy newtonowskiej ($M = 0$).

Warto jeszcze dodać, że profil prędkości (3.1.7) lub (3.1.9) nie zależy od parametru α_1 charakteryzującego lepkośćsprężyste własności cieczy, oraz że $M < 0$ ($\eta_1 < 0$) odpowiada zmniejszającej się, wraz z gradientem ścinania, pozornej lepkości cieczy. Ostatni fakt jest najczęściej obserwowany przy ustalonych przepływach roztworów i stopów polimerów (por. [2, 3, 4]).

Wprowadzając pojęcie gradientu (szybkości) ścinania na ścianie kanału $q_w = |\partial v / \partial y|_{y=h}$, można, na podstawie (3.1.8) i (3.1.9), stwierdzić, że

$$(3.1.10) \quad Q = \frac{2}{3} q_w b h^2 \frac{1 - 0,6M + 1,29M^2}{1 - M + 3M^2},$$

$$(3.1.11) \quad v_{\max} = v(0) = \frac{q_w h}{2} \frac{1 - 0,5M + M^2}{1 - M + 3M^2}.$$

3.2. Przepływy Poiseuille'a. Rozumując analogicznie i uwzględniając równania konstytutywne w pełnej postaci (3.1) dochodzimy, dla przepływu przez cylindryczne kapilary, do zależności następujących:

$$(3.2.1) \quad [\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} 2q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = q;$$

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + (2\alpha_1 + \alpha_2)q^2, & \sigma_{22} &= -p, \\ \sigma_{33} &= -p + \alpha_2 q^2, & \sigma_{13} &= \eta_0 \left[1 + \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) q^2 \right] q \end{aligned}$$

uzyskanych w założeniu, że w walcowym układzie współrzędnych kierunek przepływu pokrywa się z osią z , a jedyną niezerową składową prędkości jest $v(r)$. Podstawiając (3.2.2) do równań równowagi (3.1.4) otrzymamy

$$(3.2.3) \quad q + \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) q^3 = -\frac{f}{2\eta_0} r,$$

a po scałkowaniu i uwzględnieniu, że $v(R) = 0$,

$$(3.2.4) \quad v(r) = \frac{fR^2}{4\eta_0} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{N}{8} \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{N^2}{16} \left(1 - \frac{r^6}{R^6} \right) \right],$$

gdzie

$$(3.2.5) \quad N = \frac{(fR)^2}{\eta_0^2} \left(2\gamma + \frac{2\beta}{\eta_0} \right) = \frac{(fR)^2}{\eta_0^2} 2\eta_1.$$

Ponieważ

$$(3.2.6) \quad Q = 2 \int_0^R \pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4 f}{8\eta_0} \left[1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2 \right],$$

mamy

$$(3.2.7) \quad v(r) = \frac{2Q}{\pi R^2 \left(1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2 \right)} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{N}{8} \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) + \frac{N}{16} \left(1 - \frac{r^6}{R^6} \right) \right];$$

a także

$$(3.2.8) \quad Q = \frac{\pi R^3}{4} q_w \frac{1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32} N^2}{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16} N^2},$$

$$(3.2.9) \quad v_{\max} = v(0) = \frac{q_w R}{2} \frac{1 - \frac{N}{8} + \frac{N^2}{16}}{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16} N^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że nawet dla jednakowych wartości η_0 , γ i β parametry M i N nie są identyczne; zależą one od gradientu ciśnienia f oraz grubości $2h$ i promienia R . Dopiero dla tych samych cieczy przepływających przy tym samym gradiencie ciśnienia przez kapilarę i szczelinę, której grubość równa jest średnicy wewnętrznej kapilary, mamy $M \equiv N$.

3.3. Płaskie przepływy z warstwą przyścienną. Rozważmy obecnie płaski przepływ przez kanał, w którym obserwuje się zjawisko efektywnego poślizgu na ściankach. Jeśli warstwa przyścienna cieczy posiada, np. na skutek wpływu dużego gradientu ścinania w pobliżu ścianki, lepkość mniejszą niż reszta cieczy, znaczna część ścinania realizuje się w warstwie przyściennej. Zjawisko takie obserwowane w przepływach zawiesin (np. [8]), roztworów (np. [6]) i stopionych polimerów (np. [10, 11]) ma istotny wpływ na kształt profilu prędkości.

Zakładając, że ciecz opisana jest równaniem (3.1.1), a bardzo cienka warstwa przyścienna podobnym równaniem ze stałą lepkością η_{02} , otrzymamy (por. [19])

$$(3.3.1) \quad v_1(y) = \frac{fh^2}{2\eta_{01}} \left[\frac{1}{m} - \frac{y^2}{h^2} + \delta^2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) - \frac{M}{2} \left(\delta^4 - \frac{y^4}{h^4} \right) + \right. \\ \left. + M^2 \left(\delta^6 - \frac{y^6}{h^6} \right) \right], \quad 0 \leq y \leq h_1,$$

$$v_2(y) = \frac{fh^2}{2\eta_{01}} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad h_1 \leq y \leq h,$$

gdzie

$$(3.3.2) \quad m = \frac{\eta_{02}}{\eta_{01}}, \quad \delta = \frac{h_1}{h}, \quad M = \frac{2\eta_1(fh)^2}{\eta_{01}^2},$$

zaś wskaźnikami 1 i 2 oznaczono wielkości odnoszące się odpowiednio do rdzenia i warstwy przyściennej.

Biorąc pod uwagę, że

$$(3.3.3) \quad Q = 2 \int_0^{h_1} bv_1(y) dy + 2 \int_{h_1}^h bv_2(y) dy = \\ = \frac{2fh^3b}{3\eta_0} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \delta (1 - \delta^2) - \frac{3}{5} M \delta^5 + \frac{9}{7} M^2 \delta^7 \right],$$

mamy

$$(3.3.4) \quad Q = \frac{2}{3} bh^2 q_w \left[m + \frac{3}{2} (1-m) \delta (1 - \delta^2) - \frac{3}{5} M \delta^5 m + \frac{9}{7} M^2 \delta^7 m \right],$$

$$(3.3.5) \quad v_{\max} = v_1(0) = \frac{q_w h}{2} \left[(1 - \delta^2) + \delta^2 m - \frac{M}{2} \delta^4 m + M^2 \delta^6 m \right],$$

gdzie q_w tak jak poprzednio oznacza gradient ścinania na ściance.

Jeśli założyć, że warstwa przyścienna jest bardzo cienka ($\delta \approx 1$, $\delta^2 \approx 1$, itp.) i mniej lepka przy małych gradientach ścinania ($m < 1$), to zależności (3.3.4) i (3.3.5) upraszczają się do postaci

$$(3.3.6) \quad Q = \frac{2}{3} q_w b h^2 m (1 - 0,6M + 1,29M^2),$$

$$(3.3.7) \quad v_{\max} = \frac{1}{2} q_w h m (1 - 0,5M + M^2).$$

3.4. Zmiana lepkości a krzywe płynięcia. Dotychczasowe rozważania dotyczyły zależności pozwalających opisać profile prędkości w powolnych przepływach przez kanały i kapilary. Niezależnym zagadnieniem jest określenie parametrów M i N na podstawie znajomości doświadczalnych krzywych płynięcia (konsystencji) $\tau_w - D_s$ lub $\tau_w - D_c$.

Wykorzystując, na przykład, zależności (3.1.9) i (3.2.7) oraz przyrównując odpowiednie gradienty ścinania na ściankach do wartości wynikających z wzorów Rabinowitscha-Mooneya (2.1)₂, (2.2)₂, otrzymamy

$$(3.4.1) \quad \frac{1}{3} \left[2 + \frac{d(\log D_s)}{d(\log \tau_w)} \right] = \frac{1 - M + 3M^2}{1 - \frac{3}{5}M + \frac{9}{7}M^2},$$

$$(3.4.2) \quad \frac{1}{4} \left[3 + \frac{d(\log D_c)}{d(\log \tau_w)} \right] = \frac{1 - \frac{N}{4} + \frac{3}{16}N^2}{1 - \frac{N}{6} + \frac{3}{32}N^2}.$$

Jeżeli w zakresie małych gradientów ścinania krzywe płynięcia uzyskane w podwójnie logarytmicznej skali są zbliżone do linii prostych (por. [1, 4]), to wyrażenia z lewej strony (3.4.1) i (3.4.2) przybierają wartości stałe — związane ze współczynnikami nachylenia prostych $\log D_s - \log \tau_w$ lub $\log D_c - \log \tau_w$. Wystarczy teraz rozwiązać odpowiednie równania drugiego stopnia na M lub N .

Oczywiście możliwe są inne sposoby określania parametrów M , N , np. na podstawie doświadczalnie uzyskanego przebiegu funkcji viskozymetrycznych $\eta(q)$, $\sigma_1(q)$, $\sigma_2(q)$ (por. [3]).

4. Porównanie z wynikami doświadczeń dla stopionych polimerów

Niedawno den OTTER, WALES i SCHIJF, [12], przeprowadzili bardzo dokładne próby bezpośredniego pomiaru profili prędkości dla stopionych polimerów przepływających z małymi szybkościami ścinania przez szczelinę o głębokości $2h = 0,83$ mm i szerokości $b = 10$ mm (stosunek głębokości do szerokości 1:12). Badaniom poddano: dwa polietyleny o dużej gęstości Marlex 6002 i Marlex 6050, jeden polietylen o małej gęstości Stamytan 1700 oraz polidwumetyl siloxan Siloprene RS, z tym, że dla dwu ostatnich polimerów badania przeprowadzono również dla szybkości przepływu przewyższających wartości charakterystyczne dla zjawiska rozrywania stopu. Pomiaru prędkości przeprowadzano metodami optycznymi wykorzystując naturalne zanieczyszczenia polimerów dostępnych w handlu; odpowiedni opis aparatury i metod pomiaru podano w cytowanej już pracy [12].

Zmierzone profile prędkości porównywano z profilami obliczonymi na podstawie krzywych płynięcia, stosując prawo potęgowe [wzory (2.3) i (2.4)]. Gradient ścinania na ścianie q_w obliczano w myśl (2.1), zaś wykładnik potęgi n określano na podstawie pomiarów przeprowadzonych dla przepływów w kapilarach. Już poprzednio w innej pracy [20] stwierdzono dobrą zgodność krzywych płynięcia wyznaczonych z przepływów przez kapilary i szczeliny.

Niektóre wyniki badań autorów pracy [12] przedstawiono na rys. 1, 2 i 3, a potrzebne dane liczbowe zebrano w tablicy 1. Na rysunkach powyższych krzywe ciągłe opisują profile prędkości dla prawa potęgowego (2.3).

Tablica 1

Polimer	Temperatura przepływu °C	Indeks stopu	Wykładnik potęgi n	Doświadczalna wartość q_w sek ⁻¹	Obliczone v_{max} mm/sek	Obliczone Q mm ³ /sek
SILOPRENE RS	20	—	0,62	6,2	0,98	5,9
MARLEX 6002	190	0,25	0,455	7,1	0,92*)	5,8
MARLEX 6050	170	5,0	0,62	6,2	0,98	5,9

*) W przeciwieństwie do pozostałych wyników, wartość powyższa jest nieco mniejsza niż wartość (0,96) wynikająca z wykresu w pracy [12].

Przy dokładnym porównaniu profili prędkości z profilami wynikającymi z naszych poprzednich rozważań, istotną trudność stanowi brak wszystkich danych pozwalających odtworzyć odpowiednie krzywe płynięcia. W związku z tym zastosowano procedurę następującą:

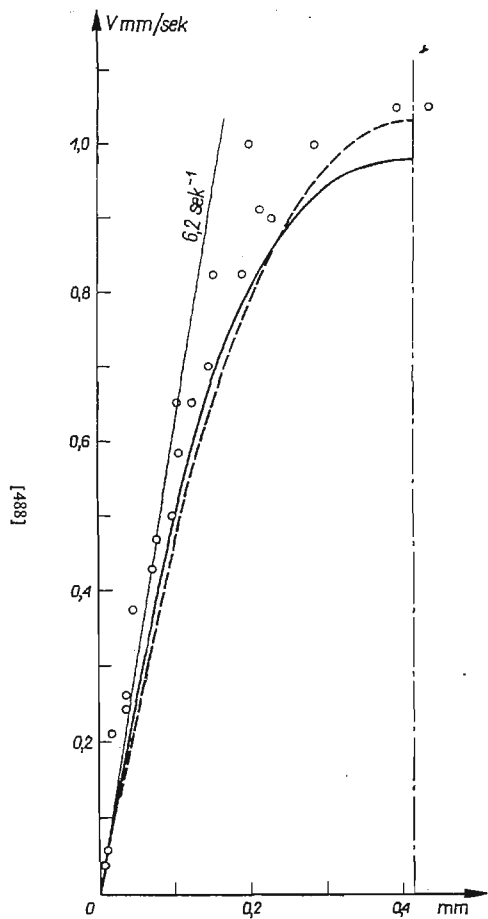
Na podstawie (2.5) otrzymano zależność

$$(4.1) \quad |q_w| = \frac{Q}{2h^2b} \frac{2n+1}{n},$$

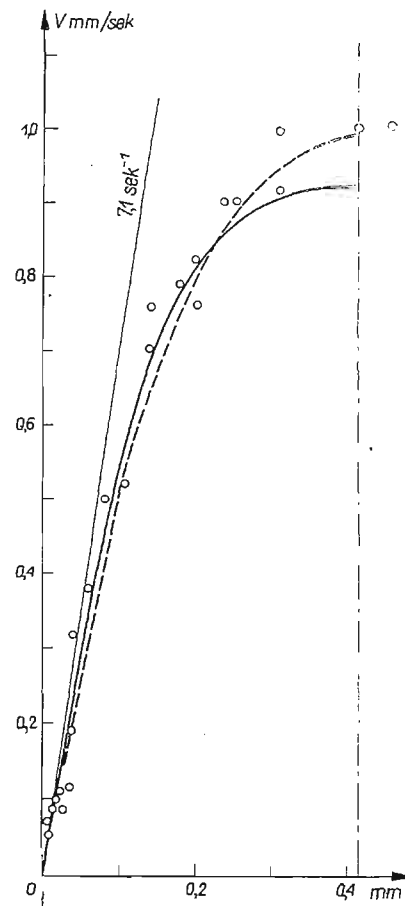
z której, znając wartości q_w podane w pracy [12] oraz wykładnik potęgi n , można obliczyć wydatek Q równy w przybliżeniu wartości zmierzonej. Następnie rozwiązano równanie (3.1.10) wyznaczając odpowiednie (ujemne) wartości M . Znajomość przybliżonego parametru M pozwoliła obliczyć v_{max} w myśl (3.1.11) oraz wyznaczyć cały profil prędkości (3.1.8).

Powyższy sposób podejścia zastosowano do przypadków przedstawionych na rys. 1 i 2, uzyskując: $Q = 5,9$ mm³/sek, $M \approx -0,29$ i $v_{max} = 1,035$ mm/sek dla Siloprenu RS oraz $Q = 5,8$ mm³/sek, $M \approx -0,5$ i $v_{max} = 0,995$ mm/sek dla Marlexu 6002. Profile prędkości przedstawiono na rys. 1 i 2 liniami przerywanymi.

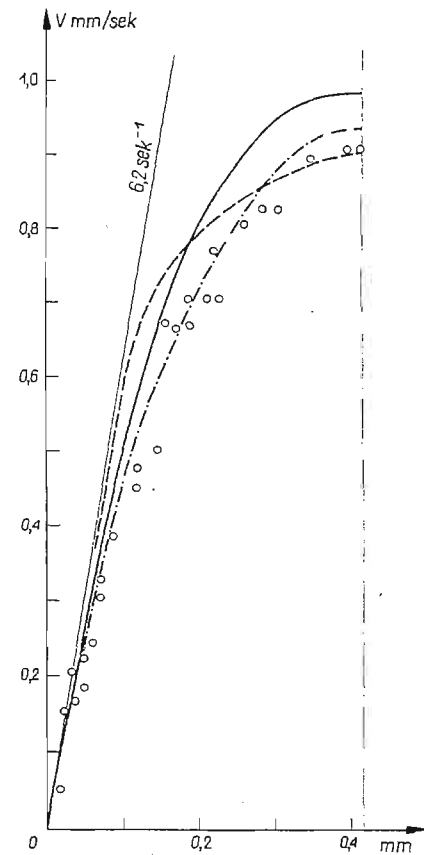
Identyczna procedura zawodzi dla przypadku przepływu Marlexu 6050, dla którego, jak widać z rys. 3, profil prędkości obliczony na podstawie prawa potęgowego (linia ciągła) leży znacznie powyżej profilu utworzonego z punktów pomiarowych. Nawet ewentualne przyjęcie $M > 0$, co jest sprzeczne z doświadczalnie stwierdzonym zmniejszaniem się lepkości wraz ze wzrostem gradientu ścinania, niewiele pomaga. W celu uzyskania profilu prędkości możliwie zgodnego z przebiegiem pomiarów, należy przyjąć



Rys. 1. Profile prędkości dla Siloprenu RS przy 20°C . Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]



Rys. 2. Profile prędkości dla Marlexu 6002 przy 190°C . Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]



Rys. 3. Profile prędkości dla Marlexu 6050 przy 170°C . Kółkami oznaczono prędkości zmierzone w pracy [12]

albo występowanie efektywnego poślizgu w cienkiej warstwie przyściennej, albo też założyć, że obliczony w myśl (4.1) wydatek cieczy jest zbyt duży w porównaniu z wydatkiem rzeczywistym.

Chociaż możliwość występowania efektywnego poślizgu na ściankach nie została jednoznacznie udowodniona (por. Wstęp), zjawisko to wydaje się bardziej prawdopodobne dla Marlexu 6050 niż dla Marlexu 6002, jeśli przyjąć, że większy indeks stopu odpowiada mniejszym bocznym rozgałęzieniom polimeru, co z kolei sprzyjałoby większemu wpływowi ścianki na orientację struktury. Stwierdzono także w pracy [20], że dla Marlexu 6050 odpowiedni współczynnik charakteryzujący poprawkę na «efekty wejściowe» (por. [17]) w kapilarach jest dla małych naprężeń ścinających wyraźnie mniejszy niż dla Marlexu 6002 i bardziej zbliżony do stałej Couette'a dla przepływów cieczy newtonowskich. Oznacza to, że dla Marlexu 6050 ustalony profil przepływu jest osiągany na krótszej części przewodu, czemu sprzyjałoby niewątpliwie istnienie efektywnego poślizgu na ściankach.

Wykorzystując (3.3.6) i (3.3.7) oraz obliczone $Q = 5,9 \text{ mm}^3/\text{sek}$ i wzięte z pomiarów $v_{\max} = 0,9 \text{ mm}/\text{sek}$ (por. rys. 3), otrzymamy $m \approx 0,28$ i $M \approx -1$. Chociaż ostatnia wartość wychodzi znacznie poza dopuszczalny zakres $|M|$, przy którym można korzystać z rozwinięcia w szereg (3.1.7), odpowiedni profil prędkości dla porównania zaznaczono na rys. 3 linią przerywaną.

Założenie mniejszego, niż obliczony na podstawie (4.1), wydatku cieczy, np. $Q = 5,5 \text{ mm}^3/\text{sek}$, daje w myśl (3.1.9) i (3.1.10) wartości następujące: $M \approx -0,4$, $v_{\max} = 0,93 \text{ mm}/\text{sek}$. Odpowiadający im profil prędkości, oznaczony na rys. 3 linią kropka-kreska, dość dobrze opisuje układ punktów doświadczalnych. Warto również dodać, że dla jeszcze mniejszych wartości $Q = 5,1 \text{ mm}^3/\text{sek}$ z jednoczesnym uwzględnieniem zjawiska poślizgu otrzymamy dla $v_{\max} = 0,92 \text{ mm}/\text{sek}$ wartości $M \approx 0,71$ i $M \approx 0(!)$, również właściwie opisujące rzeczywisty profil prędkości. Rozważania powyższe dobrze ilustrują znaczenie znajomości możliwie dokładnego wydatku cieczy; mając dane dla przepływu Q i v_{\max} , jesteśmy w stanie jednoznacznie określić wszystkie pozostałe parametry cieczy.

Zaznaczmy jeszcze, że znajomość parametru cieczy M określonego na podstawie przepływu przez szczelinę pozwala porównać gradienty ścinania na ściance q_w i maksymalne prędkości v_{\max} obliczone na podstawie prawa potęgowego (2.3) i równań konstytutywnych (3.1) dla przepływów przez cylindryczne kapilary. I tak dla Siloprenu RS, przy ustalonym wydatku oraz tak dobranych wymiarach szczeliny i kapilary, żeby $M = N$ (por. p. 3.2), q_w wynikające z prawa potęgowego będzie o 11% większe, niż ta sama wielkość wynikająca z równań cieczy stopnia trzeciego, zaś v_{\max} odpowiednio mniejsze o 10%. Odchylenia powyższych wielkości dla Marlexu 6002 wyniosą 18–19%.

5. Krótkie wnioski

Reasumując dotychczasowe rozważania można stwierdzić, że:

1) równania konstytutywne nieściśliwej cieczy lepkosprężystej stopnia trzeciego pozwalają na opis profili prędkości i krzywych płynięcia dla stopionych polimerów (Siloprene RS, Marlex 6002) przepływających z małymi szybkościami przez kanały lub kapilary;

2) równania powyższe dają na ogół mniejsze spłaszczenie profili prędkości na osi przepływu niż prawa potęgowe; fakt ten wynika przede wszystkim z istnienia skończonej lepkości przy zerowym gradiencie ścinania;

3) proponowane równania konstytutywne mogą być stosowane do opisu bardziej złożonych przepływów wiskozymetrycznych umożliwiając uwzględnianie własności lepko-sprężystych, efektów naprężeń normalnych itp.;

4) parametry odpowiedzialne za zmiany pozornej lepkości cieczy wraz ze wzrostem gradientu ścinania zależą istotnie od doświadczalnych parametrów krzywych płynięcia, a zwłaszcza od wydatku cieczy;

5) niewielka modyfikacja rozważanych zależności umożliwia uwzględnienie zjawiska efektywnego poślizgu na ściankach przewodu; występowanie tego zjawiska ma istotny wpływ na kształt obliczonego profilu prędkości.

Literatura cytowana w tekście

1. M. REINER, *Deformation and Flow*, London 1949.
2. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids*, London-Oxford-New York-Paris 1960.
3. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1960.
4. D. M. MCKELVEY, *Polymer Processing*, New York 1962.
5. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York-London-Sydney 1967.
6. B. A. TOMS, *Detection of a wall effect in laminar flow of solutions of a linear polymer*, J. Colloid Sci., **4** (1949), 511-521.
7. V. C. PATEL, M. R. HEAD, *Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows*, J. Fluid Mech., **38** (1969), 181-201.
8. S. L. SOO, *Pipe flows of suspensions*, Appl. Sci. Res., **21** (1969), 68-84.
9. G. J. REUSSWIG, F. F. LING, *A reassessment of the wall effect of non-Newtonian flow of polymer solutions*, App. Sci. Res., **21** (1969), 260-283.
10. J. J. BENBOW, R. V. CHARLEY, P. LAMB, *Unstable flow of molten polymers*, Nature, **192** (1961), 223-225.
11. B. MAXWELL, J. C. GALT, *Velocity profiles for polyethylene melt in tubes*, J. Polymer Sci., **62** (1962), S50-S53.
12. J. L. den OTTER, J. L. S. WALES, J. SCHIJF, *The velocity profiles of molten polymers during laminar flow*, Rheolog. Acta, **6** (1967), 205-209.
13. S. ZAHORSKI, *Instability depending on elastic properties of fluids in plane steady shearing flows*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 145-166.
14. S. ZAHORSKI, *Effect of diffusion of viscoelastic properties on instability of plane, free-surface flows*, Arch. Mech. Stos., **22** (1970), 213-231.
15. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Encycl. of Physics, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
16. B. RABINOWITSCH, *Über die Viskosität und Elastizität von Solen*, Z. Phys. Chem., A **145** (1929), 1-26.
17. E. G. BAGLEY, *End corrections in the capillary flow of polyethylene*, J. Appl. Phys., **28** (1957), 624-627.
18. H. MARKOWITZ, *Normal stress measurements on polymer solutions*, Proc. IVth Inter. Congress Rheol., part 1, New York-London-Sydney 1965.
19. S. ZAHORSKI, *Role of elasticity stratification in two-layer flows down an inclined plane*, Arch. Mech. Stos., **21** (1969), 571-583.
20. J. L. S. WALES, J. L. den OTTER, H. JANESCHITZ-KRIEGL, *Comparison between slit viscometry and cylindrical capillary viscometry*, Rheol. Acta, **4** (1965), 146-152.

Р е з ю м е

О ПРОФИЛЯХ СКОРОСТИ ПРИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПОЛИМЕРОВ

Точные по возможности сведения о профилях скорости для растворов и расплавов полимеров протекающих по трубам и каналам весьма существенны с точки зрения технологических процессов ровно как из точки зрения анализа более сложных явлений (аномальное течение, неустойчивость и др.). Существует много экспериментальных методов определения кривых течения, на основе которых получают аналитические профили скорости для различных уравнений состояния. Одной из наиболее широко применяемых моделей является модель жидкости со степенным законом вязкости, против которой можно однако выдвинуть много доводов (ср. [1]). В последнее время предприняты попытки определения профилей скорости с помощью прямых измерений (ср. [9, 11, 12]).

В настоящей работе предложены уравнения состояния вязко-упругой жидкости третьего порядка для описания медленных, ламинарных течений расплавов полимеров через щели и цилиндрические капилляры. Эти уравнения не только более общи по своей природе но и вытекающие из них зависимости могут легко модифицироваться для случая „эффективного скольжения” вдоль стенок. Для иллюстрации, полученные путем теоретических рассуждений профили, сравниваются с экспериментами других авторов проведенными для течения сквозь щели (ср. [12, 20]).

S u m m a r y

ON VELOCITY PROFILES IN LAMINAR FLOWS OF POLYMERS

A knowledge of possibly exact velocity profiles for polymer solutions and melts in pipe and channel flows is of great importance for technological processes as well as for more advanced analysis of flows (anomalous effects, instability etc.). There exist numerous methods of experimental determination of flow curves, on the basis of which analytical velocity profiles are obtained for various constitutive equations. One of the most widely used models is that of so-called *power law fluid* against which, however, many objections can be formulated (cf. [1]). More recently, attempts have been made to determine velocity profiles by means of direct measurements (cf. [9, 11, 12]).

In the present paper the constitutive equations of a visco-elastic fluid of third grade are proposed for description of slow laminar flows of molten polymers in slits and cylindrical capillaries. These equations are not only of more general nature (an approximation for simple fluids) but also the resultant relations can be easily modified for the case of *effective slip* at the walls. For further illustration, the velocity profiles resulting from our theoretical considerations have been compared with the slit flow experiments of other authors (cf. [12, 20]).

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 marca 1970 r.