

APROKSYMACJA NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W CIAŁACH WALCOWYCH
I KULISTYCH

JAN T A L E R (KRAKÓW)

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a promień wewnętrzny walca,
 b promień zewnętrzny walca,
 c ciepło właściwe,
 C_0, C_1, C_2 stałe,
 $Fo = \frac{\alpha \cdot t}{a^2}$ liczba Fouriera,
 $J_0(x), J_1(x)$ funkcje Bessela I rodzaju, odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego,
 $k = \frac{b}{a}$ stosunek promienia zewnętrznego walca do wewnętrznego,
 $l = b - \delta(t)$,
 m, n liczby naturalne,
 q strumień cieplny na wewnętrznej powierzchni walca,
 $Q = 2\pi a q$
 r promień,
 $R = \frac{r}{a}$ promień bezwymiarowy,
 S powierzchnia ograniczająca ciało o objętości V ,
 t czas,
 T^* temperatura dokładna,
 T temperatura przybliżona,
 T_0 temperatura początkowa,
 u temperatura zewnętrznej ścianki walca,
 V objętość ciała,
 $w = \frac{\lambda(u - T_0)}{qa}$ bezwymiarowa temperatura zewnętrznej ścianki walca,
 $Y_0(x), Y_1(x)$ funkcje Bessela II rodzaju odpowiednio rzędu zerowego i pierwszego,
 $\delta(t)$ głębokość wnikania ciepła (rys. 1),
 $\eta = 1 + \frac{\delta}{a}$,
 $\theta^* = \frac{\lambda(T^* - T_0)}{qa}$ temperatura bezwymiarowa, dokładna,
 $\theta = \frac{\lambda(T - T_0)}{qa}$ temperatura bezwymiarowa, przybliżona,
 $\alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$ współczynnik wyrównania temperatury,
 λ współczynnik przewodzenia ciepła,
 μ_m dodatnie pierwiastki równania charakterystycznego,
 ρ gęstość materiału walca,

1. Wstęp

Dokładność analitycznych metod przybliżonych w znacznym stopniu zależy od funkcji aproksymującej dokładne pole temperatury. Brak reguł konstruowania rozwiązań przybliżonych utrudnia praktyczne zastosowanie wymienionych metod. Z tych też względów, w ostatnich latach prowadzone są prace nad zasadami wyboru rozwiązań przybliżonych zapewniających dostateczną ich dokładność i eliminujących z obliczeń przypadkowość.

Oryginalne procedury konstruowania rozwiązań przybliżonych w metodzie KANTOROWICZA prezentowane są w pracach KERRA [1] oraz KRAJEWSKIEGO [2,3].

W niniejszej pracy przedstawiono sposób wyboru rozwiązań przybliżonych w metodach wykorzystujących koncepcję głębokości wnikania ciepła [4-8], oparty na metodzie uśredniania funkcjonalnych poprawek [9, 10].

Zwykle funkcja aproksymująca dokładny niestabilny rozkład temperatury jest wielomianem drugiego stopnia współrzędnej r [5, 10, 11] niezależnie od tego czy rozważane ciało jest płaskie, walcowe czy kuliste. Tak prosta funkcja przybliżająca w wielu przypadkach nie zapewnia dostatecznej dokładności rozwiązań, dlatego też w dotychczasowej literaturze znane są metody konstrukcji funkcji przybliżających pozwalających otrzymać rozwiązania bardziej dokładne, szczególnie w przypadku ciał płaskich [4, 12]. Również w przypadku ciał walcowych i kulistych, jak wykazał LARDNER [13, 14], paraboliczny rozkład temperatury wymaga modyfikacji.

Zaproponowana przez LARDNERA modyfikacja, jak wykazano w dalszej części pracy, jest w wielu przypadkach zawodna. Z tych też względów przedmiotem niniejszej pracy jest wybór funkcji przybliżających dokładne, jednowymiarowe, niestabilne pole temperatury w ciałach walcowych i kulistych.

2. Konstrukcja przybliżonego rozkładu temperatury

Przy konstrukcji funkcji przybliżającej dokładny rozkład temperatury wykorzystana zostanie metoda uśredniania funkcjonalnych poprawek [9].

Wymieniona metoda jest stosowana do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych niestabilnego przewodzenia ciepła [10]. Należy jednak podkreślić, że funkcją przybliżającą dokładny rozkład temperatury jest parabola drugiego stopnia niezależnie od kształtu ciała [10], co sprawia, że dokładność otrzymywanych wyników w przypadku ciał walcowych i kulistych nie jest zbyt duża.

W niniejszej pracy równanie przewodzenia ciepła

$$(2.1) \quad \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T^*) = c\varrho \frac{\partial T^*}{\partial t},$$

w oparciu o metodę funkcjonalnych poprawek przybliżono równaniem

$$(2.2) \quad \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c\varrho \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Łatwo zauważyć, że lokalną szybkość zmian temperatury w czasie w równaniu (2.1) zastąpiono w równaniu (2.2) szybkością uśrednioną po całej objętości ciała.

Ponieważ średnia szybkość zmian temperatury ciała nie zależy od współrzędnych ($c\varrho = \text{const}$), więc z (2.2) wynika, że

$$(2.3) \quad \text{div}(\lambda \text{ grad } T) = f(t),$$

gdzie

$$(2.4) \quad f(t) = c\varrho \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

W celu wykazania związku równania (2.2) z metodą bilansu cieplnego [4], równanie (2.3) zostanie scałkowane po objętości

$$(2.5) \quad \int_V \text{div}(\lambda \text{ grad } T) dV = f(t) \int_V dV.$$

Stosując do przekształcenia lewej strony równania (2.5) regułę Gaussa-Ostrogradskiego i uwzględniając w (2.5) zależność (2.4), otrzymuje się równanie bilansu cieplnego dla ciała o objętości V ograniczonego powierzchnią S

$$(2.6) \quad \int_S \mathbf{n}_0 \lambda \text{ grad } T dS = \int_V c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Tak więc równanie (2.6) jest równoważne równaniu (2.2) pod warunkiem, że temperatura przybliżona spełnia równanie (2.3). Przy praktycznym rozwiązywaniu zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła równanie (2.3) pozwala wyznaczyć funkcję przybliżającą dokładny rozkład temperatury, natomiast równanie (2.2) lub (2.6) — funkcję, $f(t)$. Należy podkreślić, że równanie (2.3) może być stosowane do określania temperatury przybliżonej w innych metodach niż omówione wyżej metody uśredniania funkcjonalnych poprawek i bilansu cieplnego.

Z uwagi na fakt, że metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych wykorzystujących głębokość wnikania ciepła stosowane są dotychczas do równań jednowymiarowych, więc równanie (2.3) zapisane dla pola jednowymiarowego przyjmuje postać

$$(2.7) \quad \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(\lambda r^n \frac{dT}{dr} \right) = f(t).$$

Po dwukrotnym scałkowaniu po r (2.7) przy założeniu, że $\lambda = \text{const}$ otrzymuje się przybliżony rozkład temperatury:

$$(2.8) \quad T = \frac{1}{2} C_0 r^2 + C_1 r + C_2, \quad \text{gdy } n = 0 \text{ (ciała płaskie),}$$

$$(2.9) \quad T = \frac{1}{4} C_0 r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad \text{gdy } n = 1 \text{ (ciała walcowe),}$$

$$(2.10) \quad T = \frac{1}{6} C_0 r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2, \quad \text{gdy } n = 2 \text{ (ciała kuliste),}$$

gdzie

$$C_0 = \frac{f(t)}{\lambda}.$$

Równanie (2.2) przyjmuje postać

$$(2.11) \quad \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) = c\varrho \frac{n+1}{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial T}{\partial t} r^n dr,$$

natomiast równanie (2.6)

$$(2.12) \quad \lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_2} - \lambda r^n \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \int_{r_1}^{r_2} c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} r^n dr.$$

3. Przykład obliczeniowy

Zastosowanie przedstawionej procedury zostanie zilustrowane na przykładzie obliczania nieustalonego pola temperatury w nieskończenie długim wydrążonym walcu, którego zewnętrzna ścianka jest izolowana cieplnie, nagrzewany na wewnętrznej powierzchni stałym strumieniem cieplnym. Temperatura początkowa walca jest stała i niezależna od promienia.

Pole temperatury w walcu określone jest równaniem różniczkowym przewodzenia ciepła

$$(3.1) \quad \frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^*}{\partial r} \right),$$

warunkami brzegowymi

$$(3.2) \quad \lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0,$$

$$(3.3) \quad \lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{Q}{2\pi a} = -q,$$

oraz warunkiem początkowym

$$(3.4) \quad T^* \Big|_{t=0} = T_0.$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe określone w wykazie oznaczeń otrzymuje się

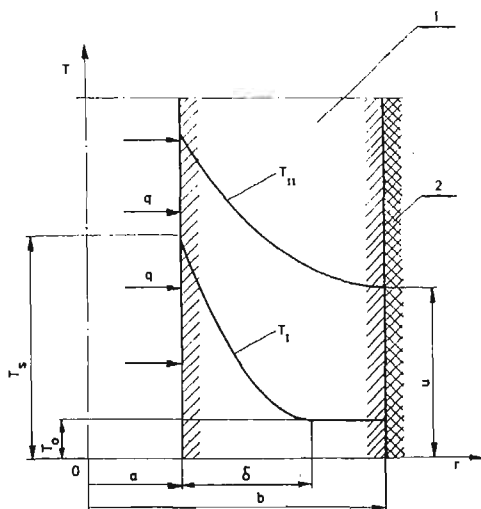
$$(3.5) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial F_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \right),$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \Big|_{R=k} = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial R} \Big|_{R=1} = -1,$$

$$(3.8) \quad \theta^* \Big|_{F_0=0} = 0.$$

Dokładne rozwiązanie sformułowanego problemu można znaleźć w pracach [15, 16] a także łatwo otrzymać je z wyrażenia (5.5.16) pracy [17] wykorzystując zależność (5.5.19). W niniejszej pracy przybliżone pole temperatury określone zostanie za pomocą metody bilansu cieplnego, określonej równaniem (2.12), które jest równoważne równaniu (2.11).



Rys. 1. Rozkład temperatury w wydrążonym walcu nagrzewanym na wewnętrznej powierzchni stałym strumieniem cieplnym

1 — cylinder, 2 — izolacja cieplna, T_I i T_{II} — temperatura w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła

Podobnie jak w innych metodach stosujących koncepcję głębokości wnikania ciepła proces wnikania ciepła podzielony zostanie na dwie fazy. Rozkład temperatury w I i II fazie wnikania ciepła przedstawiony jest schematycznie na rys. 1. Równanie bilansu cieplnego (2.12) w pierwszej fazie wnikania ciepła, zapisane w formie bezwymiarowej ma postać

$$(3.9) \quad R \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_1^\eta = \frac{d}{dFo} \int_1^\eta \theta R dR.$$

Uwzględniając warunek brzegowy (3.7) oraz warunki wynikające z definicji głębokości wnikania ciepła [5], tj.

$$(3.10) \quad \theta \Big|_{R=\eta} = 0,$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=\eta} = 0,$$

równanie (3.9) ma postać

$$(3.12) \quad \frac{d}{dFo} \int_1^\eta \theta R dR = 1.$$

Przybliżony rozkład temperatury zapisany w formie bezwymiarowej, zgodnie z (2.9) określony jest wyrażeniem

$$(3.13) \quad \theta = \frac{1}{4} C_0 R^2 + C_1 \ln R + C_2.$$

Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunku brzegowego (3.7) oraz warunków (3.10) i (3.11) i ponownym ich podstawieniu do (3.13), przybliżony rozkład temperatury w I fazie wnikania ciepła określony jest wyrażeniem

$$(3.14) \quad \theta = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left(\frac{R^2 - \eta^2}{2\eta^2} + \ln \frac{\eta}{R} \right), \quad 1 \leq R \leq \eta, \\ \theta = 0, \quad \eta \leq R \leq k.$$

Podstawiając (3.14) do (3.12) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$\eta|_{F_0=0} = 1$$

otrzymuje się

$$(3.15) \quad \eta^2 + 1 - \frac{4\eta^2}{\eta^2 - 1} \ln \eta = 8 F_0.$$

Dla większych wartości η , a więc i większych wartości liczby Fouriera, z (3.15) otrzymuje się

$$(3.16) \quad \eta^2 \approx 8 F_0.$$

Temperatura wewnętrznej powierzchni rury θ_s dla większych wartości F_0 wynosi

$$(3.17) \quad \theta_s \approx -\frac{1}{2} + \ln \eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\eta^2}{e} \right)$$

Uwzględniając w (3.17) zależność (3.16) otrzymuje się ostatecznie

$$(3.18) \quad \theta_s = \theta|_{R=1} \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8}{e} F_0 \right) = \frac{1}{2} \ln (2,94 F_0).$$

Rozwiązanie dokładne dla większych wartości F_0 ma postać [18]

$$(3.19) \quad \theta_s = \frac{1}{2} \ln (2,24 F_0).$$

Ponieważ przybliżone określanie pola temperatury w wydrążonym walcu nagrzewanym od wewnątrz w I fazie wnikania ciepła jest identyczne jak w przypadku pustki cylindrycznej, więc jest możliwe porównanie otrzymanych wyników z podanymi przez LARDNERA i POHLE'A w pracy [13]. LARDNER i POHLE stosując przybliżony rozkład temperatury określony wyrażeniem

$$(3.20) \quad T = -\frac{qa}{\lambda} \frac{(\eta - R)^2}{(2 \ln \eta + \eta - 1)(\eta - 1)} \ln \frac{R}{\eta}, \quad 1 \leq R \leq \eta, \\ T = 0, \quad \eta \leq R,$$

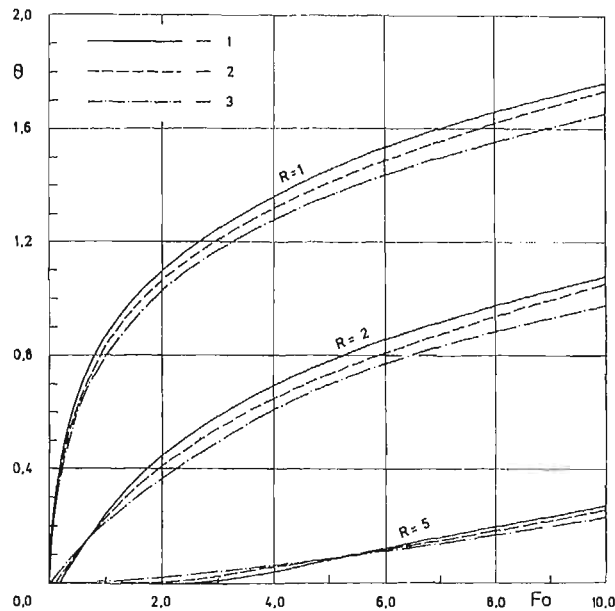
otrzymali następującą zależność dla $Fo(\eta)$

$$(3.21) \quad Fo = -[(72\eta^2 - 96\eta + 36)\ln\eta - 13\eta^4 + 36\eta^2 - 32\eta + 9][144(\eta - 1)(2\ln\eta + \eta - 1)]^{-1}.$$

Dla większych wartości Fo temperatura powierzchni pustki określona jest zależnością

$$(3.22) \quad \theta_s = \frac{1}{2} \ln(3,32 Fo).$$

Z porównania przedstawionych rozwiązań wynika, że rozwiązanie (3.18) otrzymane w niniejszej pracy lepiej aproksymuje rozwiązanie dokładne (3.19) w porównaniu z wynikiem (3.22) otrzymanym przez LARDNERA i POHLE'A. Stwierdzenie to jest słuszne dla większych wartości liczby Fouriera.



Rys. 2. Rozkład temperatury wokół pustki cylindrycznej w zależności od czasu
 1 — niniejsza praca (3.14), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a (3.20), 3 — rozwiązanie dokładne [20]

Porównanie wartości temperatury określonych wzorem (3.14) otrzymanym w niniejszej pracy z rozwiązaniem LARDNERA i POHLE'A (3.20) oraz rozwiązaniem dokładnym [20] dla mniejszych wartości liczby Fouriera Fo , dla różnych wartości promienia R przedstawiono na rys. 2. Z przedstawionego porównania wynika, że dla mniejszych wartości Fo rozwiązanie otrzymane przez LARDNERA i POHLE'A jest dokładniejsze od przedstawionego w niniejszej pracy.

Należy jednak podkreślić, że w miarę upływu czasu bardziej dokładne staje się rozwiązanie prezentowane w pracy. Zarówno rozwiązanie (3.14) jak i (3.20) znacznie lepiej aproksymują rozwiązanie dokładne w porównaniu z wynikami otrzymanymi przy założeniu parabolicznego rozkładu temperatury, o czym świadczy porównanie przeprowadzone

w pracy [13]. Widać to również z rys. 3, gdzie porównano wartości temperatury obliczone według wzorów (3.14) i (3.20) z temperaturą określoną parabolą drugiego stopnia [13]

$$(3.23) \quad \theta = \frac{1}{2(\eta-1)}(\eta-R)^2, \quad 1 \leq R \leq \eta, \\ \theta = 0, \quad \eta \leq R,$$

gdzie η określone jest równaniem [13]

$$(3.24) \quad 24 Fo = (\eta-1)^3 + 4(\eta-1)^2.$$

Następnie rozważona zostanie druga faza wnikania ciepła (rys. 1), która rozpoczyna się z chwilą gdy głębokość wnikania ciepła staje się równa grubości ścianki walca, tj. gdy $\eta = k$.

Czas, po upływie którego następuje druga faza wnikania ciepła oznaczmy przez t_1 , a odpowiadającą mu liczbę Fouriera przez Fo_1 . Wartości Fo_1 łatwo wyznaczyć w każdym z rozważanych przypadków podstawiając $\eta = k$ w równaniach (3.15), (3.21) i (3.24). Równanie bilansu cieplnego otrzymuje się z równania (2.12) po uwzględnieniu, że $r_1 = a$, $r_2 = b$ oraz warunku brzegowego (3.2). Przekształcając otrzymane tak równanie do postaci bezwymiarowej otrzymuje się

$$(3.25) \quad \frac{d}{dFo} \int_1^k \theta R dR = 1, \quad Fo \geq Fo_1.$$

Podobnie jak w pierwszej fazie wnikania ciepła rozkład temperatury w II fazie przybliżony zostanie funkcją (3.13). Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.6) i (3.7) oraz z warunku (rys. 1)

$$(3.26) \quad \theta|_{R=k} = \frac{\lambda(u-T_0)}{qa} = w$$

i ponownym ich podstawieniu do (3.13), rozkład temperatury określony jest wyrażeniem:

$$(3.27) \quad \theta = \frac{1}{2} \frac{1}{k^2-1} R^2 - \frac{k^2}{k^2-1} \ln R + w + \frac{k^2 \ln k}{k^2-1} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k^2-1} \\ Fo \geq Fo_1, \quad 1 \leq R \leq k.$$

Podstawiając (3.27) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$w|_{Fo= Fo_1} = 0$$

otrzymuje się

$$(3.28) \quad w = \frac{2(Fo - Fo_1)}{k^2 - 1}, \quad Fo \geq Fo_1,$$

gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.15) po podstawieniu $\eta = k$ wynosi

$$(3.29) \quad Fo_1 = \frac{1}{8}(k^2 + 1) - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k^2 - 1} \ln k.$$

Po podstawieniu (3.28) do (3.27) z uwzględnieniem (3.29) pole temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła określone jest wyrażeniem

$$(3.30) \quad \theta = \frac{k^2}{k^2-1} \ln\left(\frac{k}{R}\right) + \frac{k^2}{(k^2-1)^2} \ln k - \frac{k^2-R^2}{2(k^2-1)} - \frac{1}{4} \frac{k^2+1}{k^2-1} + \frac{2F_0}{k^2-1},$$

$$Fo \geq Fo_1.$$

Dokładne rozwiązanie rozważanego zagadnienia ma postać [15, 16]

$$(3.31) \quad \theta^* = \theta_q + \theta_n,$$

gdzie

$$(3.32) \quad \theta_q = \frac{k^2}{k^2-1} \ln\left(\frac{k}{R}\right) + \frac{k^2}{(k^2-1)^2} \ln k - \frac{k^2-R^2}{2(k^2-1)} - \frac{k^2+1}{4(k^2-1)} + \frac{2}{k^2-1} Fo;$$

$$(3.33) \quad \theta_n = -\pi \sum_{m=1}^{\infty} C_m(k) [J_0(\mu_m R) Y_1(\mu_m k) - J_1(\mu_m k) Y_0(\mu_m R)] \exp(-\mu_m^2 Fo),$$

gdzie

$$C_m(k) = \frac{J_1(\mu_m) J_1(\mu_m k)}{\mu_m [J_1^2(\mu_m k) - J_1^2(\mu_m)]},$$

a μ_m są dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego

$$J_1(\mu k) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_1(\mu k) = 0.$$

Z porównania (3.30) z (3.31) wynika, że rozwiązanie przybliżone w drugiej fazie wnikania ciepła jest identyczne z rozwiązaniem dokładnym θ_q określającym pole temperatury w stanie quasi-stacjonarnym. Błąd spowodowany pominięciem szeregu nieskończonego θ_n w rozwiązaniu (3.31) dla różnych wartości liczb Fouriera i stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego walca można wyznaczyć z rys. 5 pracy [15]. W przypadku rury o stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego równym $k = 5/3$, maksymalna wartość $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right)\Big|_{R=1}$ wynosi $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right)\Big|_{R=1} \approx 0,085$ zgodnie z pracą [15] i występuje na początku drugiej fazy wnikania ciepła, tj. dla $Fo = 0,073$. Wartość $\left(-\frac{\theta_n}{\theta_q}\right)\Big|_{R=1}$ szybko jednak maleje i dla $Fo = 0,2$ jest praktycznie równa zero, czyli od tego momentu w ścianie rury ustala się quasi-stacjonarne pole temperatury. Dla porównania rozważmy drugą fazę wnikania ciepła przy aproksymacji pola temperatury wielomianem drugiego stopnia od r i według metody LARDNERA. W pierwszym przypadku pole temperatury przybliżone zostanie wielomianem

$$(3.34) \quad \theta = C_0 R^2 + C_1 R + C_2.$$

Po wyznaczeniu stałych C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.6), (3.7) i (3.26) i ponownym ich podstawieniu do (3.34) otrzymuje się

$$(3.35) \quad \theta = \frac{1}{2(k-1)} (k-R)^2 + w.$$

Podstawiając (3.35) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym

$$w|_{Fo= Fo_1} = 0$$

otrzymuje się

$$(3.36) \quad w = \frac{2(Fo - Fo_1)}{k^2 - 1}, \quad Fo \geq Fo_1$$

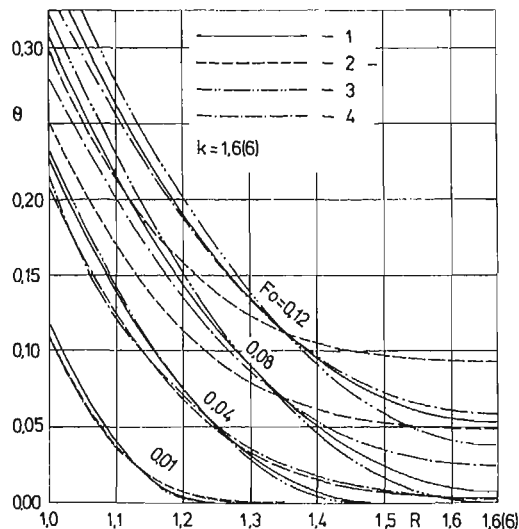
gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.24), po uwzględnieniu, że $\eta = k$, wynosi

$$(3.37) \quad Fo_1 = \frac{1}{24} [(k-1)^3 + 4(k-1)^2].$$

Uwzględniając (3.36) w (3.35) pole temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła określone jest wyrażeniem

$$(3.38) \quad \theta = \frac{1}{2(k-1)} (k-R)^2 + \frac{2Fo}{k^2-1} - \frac{1}{12} \frac{(k-1)^2 + 4(k-1)}{k+1},$$

$$Fo \geq Fo_1.$$



Rys. 3. Rozkład temperatury w wydrążonym walcu w pierwszej i drugiej fazie wnikania ciepła dla różnych liczb Fouriera

1 — niniejsza praca (3.14) i (3.30), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a (3.20) i (3.43), 3 — paraboliczny rozkład temperatury (3.23) i (3.38), 4 — rozwiązanie dokładne (3.31)

W drugim przypadku przybliżone pole temperatury zgodnie z metodą LARDNERA ma postać

$$(3.39) \quad \theta = C_0(k-R)^2 \ln \left(\frac{R}{k} \right) + C_1.$$

Po wyznaczeniu stałych z warunków brzegowych (3.7) i (3.26) i ponownym ich podstawieniu do (3.39) otrzymuje się

$$(3.40) \quad \theta = \frac{1}{(1-k)(2\ln k + k - 1)} (k-R)^2 \ln\left(\frac{R}{k}\right) + w.$$

Podstawiając (3.40) do (3.25) i całkując otrzymane równanie różniczkowe przy warunku początkowym $w|_{Fo= Fo_1} = 0$ otrzymuje się

$$(3.31) \quad w = \frac{2(Fo - Fo_1)}{k^2 - 1}, \quad Fo \geq Fo_1,$$

gdzie Fo_1 wyznaczone z (3.21), po podstawieniu $\eta = k$, wynosi

$$(3.42) \quad Fo_1 = [(72k^2 - 96k + 36)\ln k - 13k^4 + 36k^2 - 32k + 9] \times \\ \times [144(1-k)(2\ln k + k - 1)]^{-1}.$$

Podstawiając (3.41) do (3.40) i uwzględniając (3.42) otrzymuje się

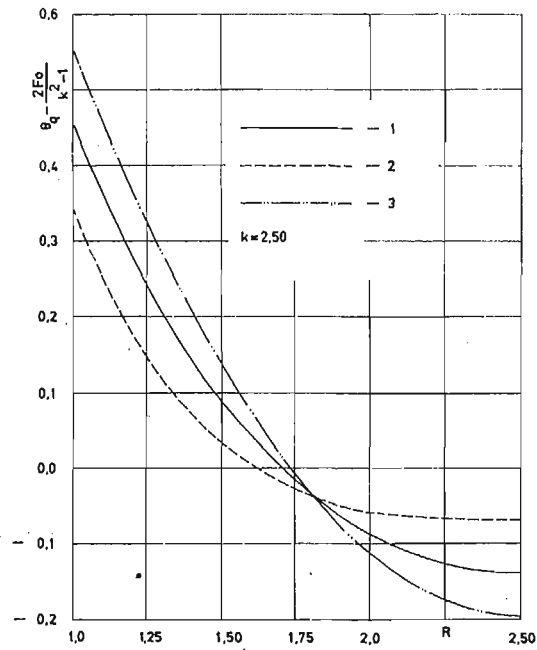
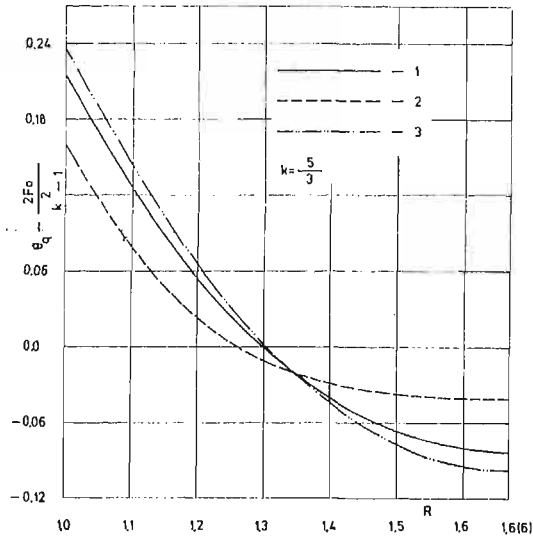
$$(3.43) \quad \theta = \frac{1}{(1-k)(2\ln k + k - 1)} (k-R)^2 \ln\left(\frac{R}{k}\right) + \frac{2Fo}{k^2 - 1} - [(72k^2 - 96k + 36)\ln k - \\ - 13k^4 + 36k^2 - 32k + 9] [72(k^2 - 1)(1-k) \times (2\ln k + k - 1)]^{-1}, \\ Fo \geq Fo_1.$$

Na rys. 3 przedstawiono pole temperatury w wydrążonym walcu o stosunku promienia zewnętrznego do wewnętrznego $k = 5/3$. Czas bezwymiarowy Fo_1 , po którym następuje druga faza wnikania ciepła zależy od funkcji przybliżającej; dokładny rozkład temperatury i obliczony według wzorów (3.29), (3.37) i (3.42) dla $k = 5/3$ wynosi odpowiednio $Fo_1 = 0,0730$, $Fo_1 = 0,0864$ i $Fo_1 = 0,0358$. Z porównania przedstawionego na rys. 3 wynika że w drugiej fazie wnikania ciepła rozwiązanie przedstawione w niniejszej pracy najlepiej aproksymuje rozwiązanie dokładne. Najmniej dokładny jest rozkład temperatury wyznaczony wg metody LARDNERA.

Na rys. 4 i 5 przedstawiono porównanie funkcji $\theta_q - \frac{2Fo}{k^2 - 1}$ obliczonej dla drugiej fazy wnikania ciepła według wzorów (3.30), (3.38) i (3.43) z funkcją $\theta_q - \frac{2Fo}{k^2 - 1}$ obliczoną według wzoru (3.32).

Z przedstawionych rysunków wynika, że sposób aproksymacji pola temperatury zaproponowany w niniejszej pracy zapewnia największą dokładność, gdyż w stanie quasi-stacjonarnym przybliżony i dokładny rozkład temperatury są identyczne. Należy podkreślić, że jest to cecha bardziej ogólna przedstawionego w pracy sposobu aproksymacji dokładnego pola temperatury. Identyczność przybliżonego pola temperatury określonego wg (2.3) i dokładnego wynika stąd, że w stanie stacjonarnym funkcja $f(t)$ jest równa zeru i rozwiązanie przybliżone określone według (2.3) i dokładne w stanie stacjonarnym są identyczne.

Powyższe uwagi nie dotyczą innych sposobów aproksymacji pola temperatury omówionych w niniejszej pracy.



Rys. 4 i 5. Zmiany funkcji $\theta_c \frac{2Fo}{k^2-1}$ w zależności od promienia

1 — niniejsza praca według (3.30) i rozwiązanie dokładne (według (3.32), 2 — metoda Lardnera i Pohle'a według (3.43), 3 — paraboliczny rozkład temperatury według (3.38)

4. Omówienie innych prac

Sposób wyboru funkcji aproksymującej nieustalony rozkład temperatury w ciałach walcowych i kulistych przedstawił LARDNER i POHLE [13, 14].

W wymienionych pracach przybliżony profil temperatury zaleca się wybierać w postaci

$$(4.1) \quad T(r, t) = W(r) \ln r$$

w przypadku ciał walcowych oraz postaci

$$(4.2) \quad T(r, t) = W(r) \cdot \frac{1}{r},$$

w przypadku ciał kulistych, gdzie $W(r)$ jest wielomianem współrzędnej r .

O ile w przypadku ciał kulistych sposób ten nie budzi zastrzeżeń, to w przypadku ciał walcowych nasuwają się pewne wątpliwości.

LARDNER i POHLE [13] analizując pole temperatury wokół pustki cylindrycznej nagrzewanej stałym strumieniem cieplnym, aproksymowali rozkład temperatury wyrażeniem

$$(4.3) \quad T = \frac{-\frac{qa}{\lambda} \left(\frac{\delta+a-r}{a} \right)^2}{\frac{\delta}{a} \left(2 \ln \frac{\delta+a}{a} + \frac{\delta}{a} \right)} \ln \frac{r}{a+\delta},$$

$$a \leq r \leq (a+\delta), \quad T = 0, \quad (a+\delta) \leq r.$$

Łatwo sprawdzić, że wybierając profil temperatury w postaci (4.1) z uwzględnieniem, że

$$W(r) = C_0 + C_1 r + C_2 r^2$$

i określając współczynniki C_0 , C_1 i C_2 z warunków brzegowych (3.3) oraz (3.10) i (3.11) zapisanych w postaci wymiarowej nie otrzyma się wyrażenia (4.3). Łatwo natomiast je uzyskać, określając rozkład temperatury wyrażeniem:

$$(4.4) \quad T = C \left(1 - \frac{r-a}{\delta} \right)^2 \ln \frac{r}{a+\delta}, \quad a \leq r \leq (a+\delta);$$

$$T = 0, \quad (a+\delta) \leq r$$

i określając stałą C z warunku brzegowego (3.3).

Zauważmy, że wybór mnożnika logarytmicznego w (4.4) nie jest jednoznaczny. W miejsce $\ln \frac{r}{a+\delta}$ można wybrać np. $\ln \frac{r}{b}$ lub $\ln \frac{r}{p(a+\delta)}$, gdzie $p \geq 1$ i warunki brzegowe wynikające z definicji głębokości wnikania ciepła, tj. (3.10) i (3.11) będą nadal spełnione.

Ponadto zachodzi pytanie, jak wybrać przybliżony rozkład temperatury w drugiej fazie wnikania ciepła, gdy warunki brzegowe na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni są niejednorodne»

Omówione tu trudności potwierdza częściowo sposób w jaki uwzględnione zostały zalecenia LARDNERA i POHLE'A w pracy [19]. Poza tym dokładność aproksymacji pola temperatury w II fazie wnikania ciepła jest niedostateczna.

Problemy wyboru funkcji aproksymującej w przypadku ciał walcowych porusza również VUJANOVIĆ w pracy [7]. Autor stwierdza, że przedstawiona przez niego metoda przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych nieustalonego przewodzenia zapewnia dostateczną dokładność przy aproksymacji pola temperatury wielomianem II stopnia, niezależnie od kształtu ciała i demonstrowa to określając nieustalone pole temperatury w pełnym walcu ogrzewanym na powierzchni stałym strumieniem ciepłym. Na podstawie rozwiązania tego samego problemu zostanie wykazane, że stwierdzenie to jest nieprawdziwe.

Pole temperatury w walcu określone jest przez równanie różniczkowe (3.1), warunki brzegowe

$$(4.3) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} = q,$$

$$(4.4) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

gdzie b oznacza promień zewnętrzny walca, i warunek początkowy

$$(4.5) \quad T|_{t=0} = 0.$$

Równanie bilansu cieplnego (2.12) w I fazie wnikania ciepła, uwzględniając że w rozważanym przypadku $r_1 = b - \delta(t)$ i $r_2 = b$, ma postać

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b c\rho r T(r, t) dr = bq.$$

Wybierając podobnie, jak VUJANOVIĆ [7] paraboliczny rozkład temperatury

$$(4.9) \quad T = \frac{q}{2\lambda(b-l)} (r-l)^2 \equiv \frac{q\delta}{2\lambda} \left(1 - \frac{b-r}{\delta}\right)^2, \quad (b-\delta) \leq r \leq b,$$

$$T = 0, \quad 0 \leq r \leq (b-\delta),$$

gdzie $l = b - \delta$, podstawiając (4.9) do (4.8) i uwzględniając, że $\delta|_{t=0} = 0$, otrzymuje się

$$(4.10) \quad \frac{\pi t}{b^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3.$$

VUJANOVIĆ [7] otrzymał natomiast następującą zależność dla określenia głębokości wnikania ciepła $\delta(t)$:

$$(4.11) \quad 20 \frac{\pi \cdot t}{b^2} = 5 \left[1 - \left(\frac{b-\delta}{b}\right)^2 \right] + 62 \left(\frac{\delta}{b}\right) + 288 \ln \frac{4}{4 + \frac{\delta}{b}}.$$

W drugiej fazie wnikania ciepła równanie bilansu cieplnego (2.12) przyjmuje postać

$$(4.12) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b c\rho r T(r, t) dr = bq.$$

Przyjmując rozkład temperatury

$$(4.13) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 + u(t) \right],$$

i wyznaczając $u(t)$ z równania (4.12) przy warunku początkowym $u(t)|_{t=t_1} = 0$ po ponownym podstawieniu do (4.13) otrzymuje się

$$(4.14) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\frac{\kappa t}{b^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 - 0,125 \right],$$

$$0 \leq r \leq b, \quad t \geq t_1.$$

Czas t_1 , po którym rozpoczyna się druga faza wnikania ciepła wyznacza się z (4.10) po podstawieniu $\delta = b$. W danym przypadku

$$(4.15) \quad t_1 = 0,125 \frac{b^2}{\kappa}.$$

Rozwiązanie VUJANOVIĆA ma postać

$$(4.16) \quad T = \frac{2qb}{\lambda} \left[\frac{\kappa t}{b^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{b} \right)^2 - 0,137 \right], \quad 0 \leq r \leq b, \quad t \geq 0,137 \frac{b^2}{\kappa}.$$

Rozwiązanie dokładne [18] dla większych wartości czasu określone jest wyrażeniem (4.14), a więc pokrywa się z rozwiązaniem przybliżonym otrzymanym za pomocą metody bilansu cieplnego.

Porównanie rozwiązań przybliżonych ze ściśłym [20] również wskazuje, że bardziej dokładne jest rozwiązanie otrzymane za pomocą metody bilansu cieplnego, tak więc i w przypadku metody VUJANOWICA [7], należy zastosować zmodyfikowany profil temperatury w ciałach walcowych i kulistych, aby otrzymać dobrą dokładność.

Wydaje się, że kształt paraboli drugiego stopnia i krzywej przedstawiającej dokładny rozkład temperatury w przypadku ciał kulistych i cylindrycznych znacznie się różnią, w związku z czym niezależnie od zastosowanej metody należy zmodyfikować przybliżony rozkład temperatury.

5. Wnioski

Zaproponowany sposób konstrukcji funkcji przybliżającej jednowymiarowe, niestalone pole temperatury uwzględnia kształt rozważanego ciała.

Wykazano również, że aproksymacja dokładnego pola temperatury wielomianem drugiego stopnia w przypadku ciał walcowych i kulistych prowadzi do znacznych błędów. W porównaniu z metodą wyboru rozwiązania przybliżonego przedstawioną przez LARDNERA i POHLE'A [13] sposób prezentowany w niniejszej pracy zapewnia większą dokładność obliczeń w drugiej fazie wnikania ciepła i jest łatwy w zastosowaniu, szczególnie przy niejednorodnych warunkach brzegowych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. D. KERR, *An extension of the Kantorovich method*, Quart. Appl. Math., 2, **26** (1968) 219—229.
2. B. KRAJEWSKI, *Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer, 16 (1973) 469—483.
3. B. KRAJEWSKI, *Modyfikacja metody Kantorowicza*, Archiwum Termodynamiki i Spalania, 4, **7** (1976) 545—556.
4. T. R. GOODMAN, *Application of integral methods to transient non-linear heat transfer*, Advances in Heat Transfer, **1**, New York 1964.
5. M. A. BИOT, *Variational principles in heat transfer*, Oxford 1970.
6. B. VUJANOVIĆ, *An approach to linear and nonlinear heat transfer problems using a Lagrangian*, AIAA Journal, 1, **9** (1971) 131—134.
7. B. VUJANOVIĆ, *On one variational principle for irreversible phenomena*, Acta Mechanica, 3—4, **19**, (1974) 259—275.
8. J. TALER, *Zastosowanie zasady Gaussa do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych przewodzenia ciepła*, Rozpr. Inż., 2, **25** (1977) 349—368.
9. Ю. Д. Соколов, *О методе осреднения функциональных поправок*, Украинский Математический Журнал, 1, **9** (1957) 82—99.
10. Ю. С. Постольник, *Нагрев цилиндра излучением*, Прикладная Механика, 6, **1** (1965) 14—20.
11. А. И. Золотарев, Ю. С. Постольник, В. М. Губа, *Расчёт температуры и напряжений в цилиндре при переменном тепловом потоке*, Известия ВУЗов, Чёрная Металлургия, 2, **20** (1977) 144—147.
12. B. E. LAUNDER, *An improved Pohlhausen type method of calculating the two-dimensional laminar boundary layer in a pressure gradient*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 3, **86** (1964) 360—364.
13. T. J. LARDNER, F. V. POHLE, *Application of the heat balance integral to problems of cylindrical geometry*, Transact. of the ASME, J. Appl. Mech. **28** (1961) 310.
14. T. J. LARDNER, *Approximate heat conduction solutions for nonplanar geometries*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 3, **32** (1965) 423.
15. S. BRUIN, W. A. BEVERLOO, *Transient temperature distributions in cylindrical shells*, Int. J. Heat Mass Transfer, **11** (1968) 1653—1656.
16. Л. Е. Белоусова, *Нестационарные температурные напряжения в полом цилиндре при действии потока тепла на внутреннюю поверхность*, Инженерно-физический Журнал, 2, **27** (1974).
17. A. V. LUIKOV, *Analytical heat diffusion theory*, New York 1968.
18. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1959.
19. I. S. HADIV, *Solidification of semitransparent cylindrical medium by conduction and radiation*, Transact. of the ASME, J. Heat Transfer, 1, **95** (1973).
20. А. И. Пехович, В. М. Жидких, *Расчёты теплового режима твердых тел*, Ленинград 1968.

Резюме

АППРОКСИМАЦИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

В работе предложен метод подбора приближенного неустойчившегося распределения температуры в цилиндрических и сферических телах. Этот метод применим для приближенного решения уравнений тепло- и массопереноса с помощью методов, использующих понятие глубины проникания тепла. В качестве примера применения метода рассчитано распределение температуры в полом цилиндре для случая постоянного теплового потока к внутренней стенке и теплоизолированной внешней стенке. Использован интегральный метод теплового баланса. На основе сопоставления приближенных решений с точным установлено, что предлагаемый метод более точен, чем метод Ларднера и Пола [13], особенно для больших значений времени. Доказано, что в случае цилиндрических тел вариационный метод Вуяновича [7], как и другие методы, требует модификации параболического распределения температуры.

S u m m a r y

APPROXIMATION OF THE TRANSIENT TEMPERATURE FIELD IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL BODIES

The paper presents a method for the choice of the approximate temperature distribution in the bodies of cylindrical and spherical geometry. The method is appropriate for solving any problem governed by diffusion — type equation with the aid of the methods using the concept of thermal boundary layer. Particular cases considered in this paper include the transient temperature distributions in a hollow cylinder in the case of heat being transferred at a constant rate to the inner wall surface, while the outer wall surface is insulated against heat losses. It is found that, for problems involving polar or spherical symmetry, Lardner's and Pohle's methods are inappropriate because the solution does not tend to the proper form of the steady — state solution in the limit for large time (in the second phase of heat penetration). It is shown that Vujanovic's variational method [7] cannot be improved to produce better results with parabolic temperature distribution in a cylindrical body.

INSTYTUT APARATURY PRZEMYSŁOWEJ
I ENERGETYKI POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 października 1977 r.
