

AUTOGENICZNA METODA KSZTAŁTOWANIA PŁYT NA NAJWIĘKSZĄ SZTYWNOŚĆ

JÓZEF KAPLANEK

GABRIEL WRÓBEL

Politechnika Śląska, Gliwice

Praca zawiera kontynuację tematyki kształtowania ustrojów nośnych rozwijanej w pracach [1,2]. Dotychczasowe prace autorów dotyczyły kształtowania na największą sztywność i obejmowały płaskie oraz osiowo-symetryczne ustroje nośne [9,10,11,18]. Problematyka ta jest rozszerzona obecnie na modele płytowe [3]. Wykorzystanie modelu obliczeniowego złożonego z elementów skończonych umożliwia zastosowanie metody elementów skończonych do kształtowania w zakresie nowej klasy zagadnień. Zwrócić należy uwagę, że podobnie jak w przypadku wcześniej opracowanych procedur, kształtowanie odbywa się w sposób iteracyjny. Różnice dotyczą bądź realizacji numerycznej (zmiana grubości lub gęstości elementów skończonych), bądź sfery interpretacji (zmienną gęstość tworzywa można zredukować do stałej konstrukcyjnej gęstości zmieniając odpowiednio grubość elementów) [2]. Rozkład tworzywa – "kształt" ustroju, będący wynikiem kolejnego kroku optymalizacji, wyznaczony jest zmieniającym się w procesie poszukiwania stanem obciążeń wewnętrznych. Zachowanie układu samo determinuje zatem dalszy kierunek poszukiwania i stąd określenie "autogeniczna" przyjęte dla opisywanej metody.

Uogólniona metoda kształtowania autogenicznego na największą sztywność może spełniać rolę narzędzia wspomagającego intuicję konstruktora w zakresie optymalnego projektowania konstrukcji.

1. Wstęp

Model płyty przyjęty do rozważań z uwagi na kierunek optymalizacji powinien uwzględniać zmienność parametrów kształtu. Kształtowanie oparte jest na teorii płyt ciekich i dotyczy płyt o dowolnych konturach, wykonanych z tworzyw podlegających prawu Hooke'a, izotropowych i jednorodnych. Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej płyty z założenia przyjmuje się jako małe w stosunku do jej grubości.

Przedmiotem rozważań są płyty, których sztywność na zginanie jest funkcją

współrzędnych (x_1, x_2) . Na zmiany sztywności płytowej:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.1)$$

wpływają zarówno czynniki geometryczne – grubość płyty, jak i materiałowe – zmienny moduł sprężystości związany ze zmienną gęstością tworzywa. Najczęściej spotykanym w praktyce jest model, w którym grubość h płyty jest funkcją współrzędnych (x_1, x_2) .

Zastosowanie obowiązującego w tym przypadku różniczkowego opisu modelu [3] w sformułowaniu zagadnień optymalizacyjnych prowadzi do silnie nieliniowych układów równań całkowo-różniczkowych, których złożoność praktycznie wyklucza możliwość rozwiązywania zadań optymalnego kształtowania w zamkniętej postaci.

Szczególnym, ważnym technicznie przypadkiem jest płyta trójwarstwowa, w której całkowita grubość pozostaje stała, a zmianom podlegają tylko grubości warstw zewnętrznych. Z punktu widzenia formułowanego zadania jest to jednak zagadnienie zawężone, pozwalające na redukcję płyty do modelu tarczowego reprezentującego nośne warstwy zewnętrzne.

2. Przegląd literaturowy problemu optymalizacji płyt

Najczęstsze kryteria kształtowania optymalnego to:

- wyrównany stan wyężenia,
- największa sztywność ze względu na stan obciążenia,
- największa sztywność ze względu na częstość drgań własnych,
- najmniejszy ciężar,
- najmniejszy koszt.

Z uwagi na koncepcję opracowania interesujący jest stan zaawansowania prac dotyczących problemu maksymalizacji sztywności. W zakresie tym w literaturze wylaniają się kierunki dotyczące:

- matematycznych podstaw kształtowania,
- aplikacji technicznych (zadania szczególne),
- kształtowania ze względu na wyrównanie potencjału płytowego – jednostkowej energii sprężystej zginania,
- kształtowanie ze względu na wyrównanie potencjału powierzchniowego płyt.

Do pierwszego nurtu należą prace Wasiutyńskiego, a w szczególności [16], w których sformułowane zostały warunki konieczne optymalnego kształtowania na największą sztywność. Warunki te zostały rozszerzone o warunki dostateczne w pracy Mroza [3]. Syntetyczne opracowanie tych zagadnień znaleźć można w pracach Brandta [12,13], z wykorzystaniem prac Dzieniszewskiego, Gierlińskiego,

Marksa i innych. Interesującą pozycję stanowi praca Olchoffa [17], będąca zbiorem publikacji autora z zakresu kształtowania na największą sztywność, głównie jednak w zagadnieniach dynamicznych. W zakresie aplikacji technicznych najczęściej stawianym problemem jest poszukiwanie parametrów (wysokości) uźebrowania płyty, dla znanego jego rozmieszczenia. Innym zagadnieniem wykorzystującym kryterium kształtowania na największą sztywność przy stałej objętości tworzywa jest kształtowanie warstw zewnętrznych płyt trójwarstwowych. Problem ten sprowadzony do zagadnień tarczowych tych warstw posiada jednoznaczne rozwiązanie, a warunki konieczne i dostateczne optymalności sformułowane są w pracy [12]. Dla zagadnień optymalnego kształtowania płyt na największą sztywność minimum globalne energii sprężystej może nie istnieć z uwagi na niemożność spełnienia dostatecznych warunków optymalności.

W tego typu zagadnieniach kształtowania optymalnego jako miarę odkształcalności płyty przyjmuje się energię odkształceń sprężystych. Energia sprężysta właściwa płyty Ψ jest to całka po grubości płyty z energii sprężystej Φ :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (2.1)$$

i dla klasycznej teorii płyt wynosi:

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^T \varepsilon dx_3, \quad (2.2)$$

lub

$$\Psi = \frac{1}{2} M^T \kappa, \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\kappa = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \right]. \quad (2.4)$$

Formuła (2.3) może być zapisana w przemieszczeniach:

$$\Psi = \frac{1}{2} \kappa^T D \kappa, \quad (2.5)$$

bać za pomocą sił wewnętrznych:

$$\Psi = \frac{1}{2} M^T D^{-1} M, \quad (2.6)$$

gdzie:

$$D^{-1} = \frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Po rozpisaniu formy te przybierają postać:

$$\Psi = \frac{1}{2} D [(\kappa_{x_1} + \kappa_{x_2})^2 - 2(1 - \nu)(\kappa_{x_1} \kappa_{x_2} - \kappa_{x_1 x_2}^2)], \quad (2.8)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.9)$$

lub

$$\Psi = \frac{1}{D(1 - \nu^2)} \left[\frac{1}{2} M_{x_1}^2 - \nu M_{x_1} M_{x_2} + \frac{1}{2} M_{x_2}^2 + (1 + \nu) M_{x_1 x_2}^2 \right]. \quad (2.10)$$

Wprowadzając ograniczenia na grubość maksymalną i minimalną płyty kryterium optymalności, spełnione w obszarze, w którym założone ograniczenia nie są aktywne, może być sformułowane w postaci [17]:

$$h^{-4} \left[(1 + \nu)(M_{x_1}^2 + 2M_{x_1 x_2}^2 + M_{x_2}^2) - \nu(M_{x_1} + M_{x_2})^2 \right] = \text{const.} \quad (2.11)$$

Zadanie kształtowania optymalnego z wykorzystaniem powyższego kryterium optymalności, dla stałej objętości i ograniczeń na minimalną i maksymalną grubość płyty rozwiązała Cheng Keng - Tung i Olchoff w [8].

3. Teoretyczne podstawy kształtowania płyt ze względu na największą sztywność

Problem kształtowania płyty jako zadanie optymalizacyjne sformułowane jest w sposób następujący:

zminimalizować energię U odkształcenia sprężystego kształtowanego obszaru Ω płyty w postaci funkcjonału rozkładu grubości płyty $h(x)$, $x \in A \subset R^2$

$$U[h(x)] \Rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Płyta poddana jest danemu układowi obciążeń zewnętrznych czynnych oraz podparta w sposób uniemożliwiający jej ruch jako bryły sztywnej. Poddana jest ponadto ograniczeniu równościowemu stałej objętości:

$$V[h(x)] = \text{const.}, \quad (3.2)$$

oraz ograniczeniom nierównościowym lokalnej grubości:

$$a \leq h(x) \leq b, \quad x \in A_1. \quad (3.3)$$

Rozwiązanie zadania metodami rachunku wariacyjnego nie jest na ogół możliwe ze względu na trudności z uzyskaniem jawnej postaci funkcjonału (3.1). W przypadku ogólnym kształtowanego ustroju nośnego poszukiwania rozwiązania zadania optymalizacyjnego mogą być prowadzone z wykorzystaniem warunku optymalności sformułowanego w literaturze [12, 16] w postaci twierdzenia o wyrównanej jednostkowej energii sprężystej Φ :

$$\Phi(x) = \text{const}, \quad x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Płyty jednorodne i pełne są przykładem ustrojów, w których równość potencjału nie może być osiągnięta. Analiza problemu dla tej klasy obiektów doprowadziła do sformułowania warunku optymalności o wyrównaniu potencjału powierzchniowego ciała [13]:

$$\Xi(x) = \text{const}, \quad x \in S_0. \quad (3.5)$$

gdzie S_0 jest powierzchnią zewnętrzną kształtowanego ciała. Jednocześnie zwrócono uwagę na to, że warunek (3.5) jest jedynie warunkiem koniecznym. W pracach [3, 13] sformułowany został warunek wystarczający, który można przedstawić w postaci:

$$\text{grad}\Phi(x) \leq 0, \quad x \in S_0. \quad (3.6)$$

Oznacza on, że kryterium wyrównania potencjału powierzchniowego odkształcenia można uznać za kryterium wystarczające optymalności układu jedynie w przypadku, gdy potencjał odkształcenia w danym ustroju w bezpośredniej bliskości brzegu wzrasta w kierunku wnętrza obszaru. Takie zawężenie użyteczności kryterium (3.5) praktycznie dyskwalifikuje płyty jako obiekt optymalizacji metodami wykorzystującymi to kryterium. W pracy [13] zwrócono uwagę na przypadek w sposób statycznie wyznaczalny walcowo zginanych pasm płytowych o stałej szerokości, jako szczególnie zagadnienie płytowe, w którym warunek (3.5) jest warunkiem wystarczającym ekstremum energii odkształcenia mimo niespełnienia warunku (3.6).

W dalszym ciągu pracy wykorzystana zostanie możliwość rozszerzenia użyteczności kryterium potencjału powierzchniowego na wszystkie przypadki płyt statycznie wyznaczalnych, to znaczy takich, w których rozkład zredukowanych do powierzchni środkowej składowych sił wewnętrznych nie zależy od rozkładu grubości płyty.

Z uwagi na numeryczną realizację zadania optymalizacji dokonana zostanie dyskretyzacja polegająca na podziale zbioru A na skończoną liczbę spójnych podzbiorów $A^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, w których grubość płyty jest stała:

$$h(x) = h^{(i)} = \text{const} \quad \text{dla } x \in A^{(i)}. \quad (3.7)$$

Podział taki generuje podział obszaru Ω płyty na elementy płytowe o skończonych obszarach $\Omega^{(i)}$. W takim ujęciu funkcjonal (3.1) można traktować jako funkcję wektora $\langle h^{(i)} \rangle = \mathbf{h} \in R^n$.

Warunki ograniczające przyjmują postać:

$$V(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n h^{(i)} S^{(i)} = \text{const}, \quad (3.8)$$

$$a^{(ij)} \leq h^{(ij)} \leq b^{(ij)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad m \leq n,$$

gdzie $S^{(i)}$ oznacza pole obszaru $A^{(i)}$.

Zadanie powyższe jest zadaniem programowania nieliniowego ze względu na nieliniowość funkcji energii odkształcenia $U(\mathbf{h})$ z ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi. Przestrzenią optymalizacji jest przestrzeń R^n parametrów grubości. Kształtowanie optymalne polegać ma na poszukiwaniu wektora \mathbf{h}_{opt} , dla którego zachodzi:

$$U(\mathbf{h}_{\text{opt}}) = \min. \quad (3.1')$$

Jednostkowa energia sprężysta zginania w podobzdarze $\Omega^{(i)}$ wyraża się przez składowe zredukowanych momentów zginających (pominięto składowe tarczowe stanu obciążenia oraz wpływ sił poprzecznych) następująco:

$$\Psi^{(i)} = \frac{12}{Eh^{(i)3} \left[\frac{1}{2} M_{x_1}^2 - \nu M_{x_1} M_{x_2} + \frac{1}{2} M_{x_2}^2 + (1 + \nu) M_{x_1 x_2}^2 \right]}, \quad (3.9)$$

gdzie E, ν to parametry sprężyste ośrodka.

Potencjał powierzchniowy dla tego podobzdarza wyrażony jest zależnością:

$$\Xi^{(i)} = \frac{36}{Eh^{(i)4} \left[\frac{1}{2} M_{x_1}^2 - \nu M_{x_1} M_{x_2} + \frac{1}{2} M_{x_2}^2 + (1 + \nu) M_{x_1 x_2}^2 \right]}, \quad (3.10)$$

a stąd:

$$\Psi^{(i)} = \frac{1}{3} h^{(i)} \Xi^{(i)}. \quad (3.11)$$

Wobec zróżnicowanych grubości poszczególnych podobzdarów płyty z zależności powyższej wynika, że wymienione wcześniej kryteria kształtowania wyrównanego potencjału odkształcenia płytowego Ψ oraz wyrównanego potencjału powierzchniowego Ξ dla obszaru płyty nie są równoważne. Zróżnicowanie potencjału powierzchniowego w płycie o wyrównanym potencjale płytowym dowodzi, wobec twierdzeń o wpływie zmiany kształtu na energię odkształcenia ustroju [2,13] nieoptymalności takiego rozwiązania. Płyta o wyrównanym potencjale powierzchniowym czyni zadość warunkowi koniecznemu optymalności jednak nie spełnia warunku wystarczającego (3.6).

Ograniczając przestrzeń optymalizacji do obszaru K^{n-1} wynikającego z nieujemności parametrów $h^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ oraz warunku stałej objętości i przedstawiając pozostałe warunki ograniczające (3.8) w postaci:

$$\begin{aligned} g^{(k_j)} &= a^{(k_j)} - h^{(k_j)} \leq 0, & k_j &= 1, 2, \dots, m, \\ g^{(l_j)} &= h^{(l_j)} - b^{(l_j)} \leq 0, & l_j &= m + 1, \dots, 2m, \end{aligned} \quad (3.12)$$

warunki optymalności zadania można sformułować następująco:

- funkcje $U(\mathbf{h})$ oraz $g(\mathbf{h})$ mają ciągle pochodne,
- funkcje $U(\mathbf{h})$ oraz $g(\mathbf{h})$ są funkcjami wypukłymi,
- w punkcie \mathbf{h}_{opt} spełnione są warunki Kuhna – Tuckera.

W analizowanym zadaniu warunek a) jest spełniony. Spełnienie warunku c), jak to pokazano w pracach [2, 10], w metodach kształtowania przy kryterium wyrównanego potencjału układów z więzami typu (3.12) jest równoważne spełnieniu warunku wyrównania potencjału (w przypadku płyt – powierzchniowego). Funkcje $g(\mathbf{h})$ o postaci (3.12) są ponadto wypukłe. Pozostaje określenie klasy układów, dla których warunek (3.6) spełniony jest również przez funkcję $U(\mathbf{h})$. Sformułujemy następujące twierdzenie dotyczące płyt statycznie wyznaczalnych.

Funkcja energii odkształcenia $U(\mathbf{h})$ płyty podpartej w sposób statycznie wyznaczalny jest funkcją wypukłą.

Dowód:

W celu przeprowadzenia dowodu powyższego twierdzenia weźmy pod uwagę dwie płyty odpowiadające parze bliskich wektorów $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \subset R^n$, przy czym jedyną różną od zera współrzędną różnicy:

$$\mathbf{h}_\delta = \mathbf{h}' - \mathbf{h}$$

jest współrzędną:

$$h_\delta^{(j)} = \delta, \quad \delta \ll h^{(j)}. \quad (3.13)$$

Niech składowe powierzchniowego stanu naprężenia dla podobzaru o grubości $h^{(j)}$ płyty są równe:

$$\sigma_{rs} = \frac{6}{h^{(j)2}} M_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \quad (3.14)$$

gdzie M_{rs} to składowe zredukowanych do płaszczyzny środkowej płyty sił wewnętrznych płytowego stanu obciążenia. Statyczna wyznaczalność układu oznacza niezależność tych składowych obciążenia od rozkładu grubości płyty. Składowe σ_{rs} dla elementu płyty o zmodyfikowanej grubości $h^{(j)'} = h^{(j)} + \delta$ wynoszą zatem

$$\sigma_{rs}(h^{(j)} + \delta) = \frac{6}{h^{(j)2}} M_{rs} \left(1 - \frac{2\delta}{h^{(j)}} \right). \quad (3.15)$$

Stan naprężenia w warstwie oddalonej o $(h^{(j)}/2)$ od powierzchni środkowej płyty w zmodyfikowanym elemencie wynosi:

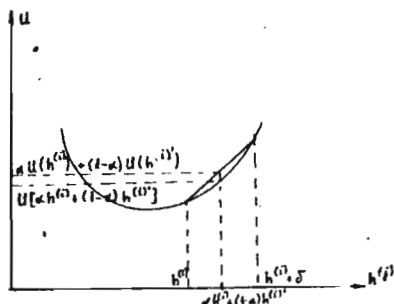
$$\sigma_{rs}(h^{(j)}) = \frac{6}{h^{(j)2} M_{rs}} \frac{h^{(j)} - 2\delta}{h^{(j)} + \delta}. \quad (3.16)$$

Średnie wartości składowych stanu naprężenia w "dodanej" warstwie wynoszą zatem:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rs} &= \frac{1}{2} [\sigma_{rs}(h^{(j)} + \delta) + \sigma_{rs}(h^{(j)})] = \\ &= \frac{6}{h^{(j)2} M_{rs}} \left[1 - \frac{5\delta}{2(h^{(j)} + \delta)} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

a energia odkształcenia dodanej warstwy wynosi:

$$U_0 = \frac{\delta}{E} \bar{\sigma}_{rs} = \frac{\delta}{E} \frac{6}{h^{(j)2} M_{rs}} \left[1 - \frac{5\delta}{2(h^{(j)} + \delta)} \right]. \quad (3.18)$$



Rys. 1. Zależność energii odkształcenia płyty U od grubości h^j

Na rys.1 przedstawiona jest przykładowa zależność funkcji energii odkształcenia płyty od grubości $h^{(j)}$ z wyróżnioną parą punktów odpowiadających w sposób dowolny przyjętej wartości $h^{(j)}$ oraz jej wartości zmodyfikowanej $h^{(j)'}$. Warunek wypukłości funkcji ma postać:

$$\alpha U(h^{(j)}) + (1 - \alpha)U(h^{(j)'}) \geq U[\alpha h^{(j)} + (1 - \alpha)h^{(j)'}], \quad (3.19)$$

gdzie $0 < \alpha < 1$.

Korzystając z twierdzenia Wasiutyńskiego [16] można wobec warunku (3.13) wyrazić energię odkształcenia płyty dla wszystkich wartości $h^{(j)'}$ bliskich wartości $h^{(j)}$ poprzez energię odkształcenia w stanie początkowym:

$$\Delta U = U(h^{(j)} + \varepsilon) - U(h^{(j)}) = -U_0, \quad \varepsilon \ll h^{(j)}. \quad (3.20)$$

Wykorzystując tę zależność w wyrażeniu (3.19) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \alpha U(h^{(j)}) + (1 - \alpha) \left[U(h^{(j)}) - \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2\delta}{h^{(j)}} \right) \delta \right] &\geq \\ &\geq U \left[\alpha h^{(j)} - \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{2(1 - \alpha)\delta}{h^{(j)}} \right) (1 - \alpha) \delta \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie:

$$\sigma = \frac{6}{h^{(i)2}} \left[\frac{1}{2} M_{x_1}^2 - \nu M_{x_1} M_{x_2} + \frac{1}{2} M_{x_2}^2 + (1 + \nu) M_{x_1 x_2}^2 \right].$$

Dokonując uproszczeń otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \left(1 - \frac{2\delta}{h^{(j)}} \right) \delta &\leq \left(1 - \frac{2(1 - \alpha)\delta}{h^{(j)}} \right) (1 - \alpha) \delta, \\ \frac{2\delta}{h^{(j)}} &\geq \frac{2(1 - \alpha)\delta}{h^{(j)}}, \quad \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

co dowodzi prawdziwości relacji (3.21), a wobec dowolności wyboru parametru $h^{(j)}$ oraz jego wartości początkowej – spełnienia przez funkcję U kryterium wypukłości, co kończy dowód.

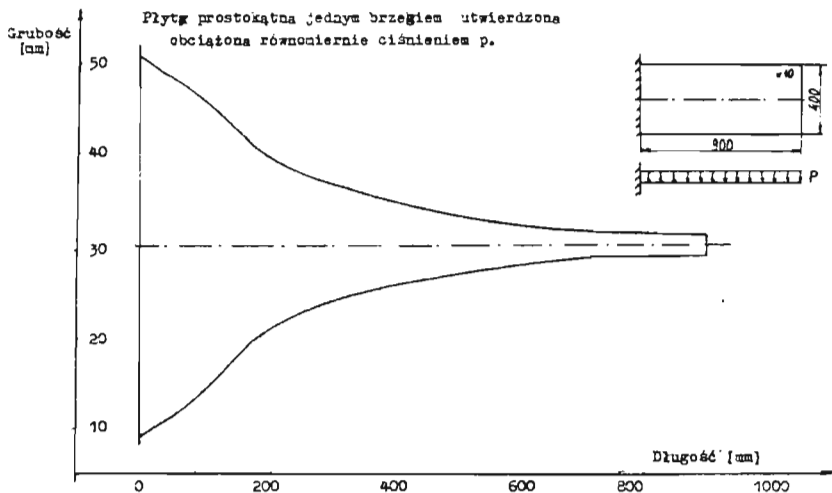
Na mocy powyższego twierdzenia warunki wystarczające optymalności kształtowania płyt statycznie wyznaczalnych są spełnione. Uzasadniona została tym samym efektywność procesu kształtowania z wykorzystaniem kryterium wyrównanego potencjału powierzchniowego w stosunku do płyt statycznie wyznaczalnych, dla których stan zredukowanych obciążeń wewnętrznych nie zmienia się w trakcie procesu kształtowania.

4. Przykłady

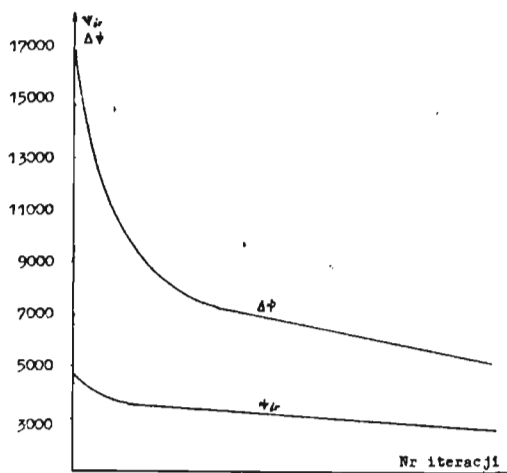
Przykład 1

Płyta prostokątna o wymiarach 400 × 900 mm i początkowej grubości 10 mm jest na jednym krótszym boku utwierdzona (rys.2). Płytę poddano zginaniu walcowemu obciążając równomiernym ciśnieniem $p = 100 \text{ N/mm}^2$. Model płyty stanowi 36 elementów skończonych prostokątnych rozpiętych na 50-ciu węzłach. Na podstawie otrzymanych grubości elementów po 14-tu iteracjach narysowano przekrój poprzeczny płyty przedstawiony na rys.2.

Na rys.3 pokazano spadek potencjału średniego i różnicy ekstremalnych potencjałów sprężystych w zależności od numeru iteracji. Potencjał średni zmalał z wartości 4629.8 N/mm^2 do 1956.3 N/mm^2 .



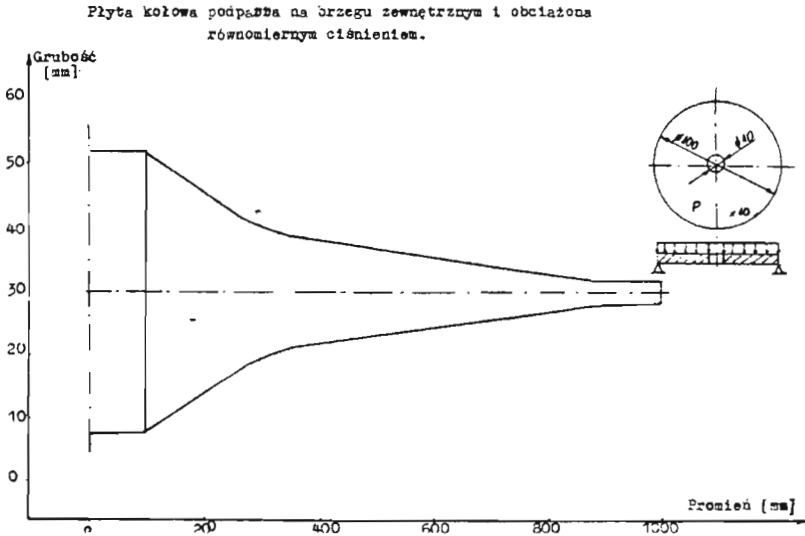
Rys. 2. Zarys przekroju poprzecznego płyty



Rys. 3. Zależność potencjału średniego i różnicy ekstremalnych potencjałów od numeru iteracji

Należy zwrócić uwagę, że kontur przekroju płyty narysowany jest linią łamaną wynikającą z liniowej interpolacji wartości grubości w węzłach modelu. Grubości te przyjęto jako średnie z wartości grubości odpowiednich elementów, do których węzeł przynależy.

Przykład 2

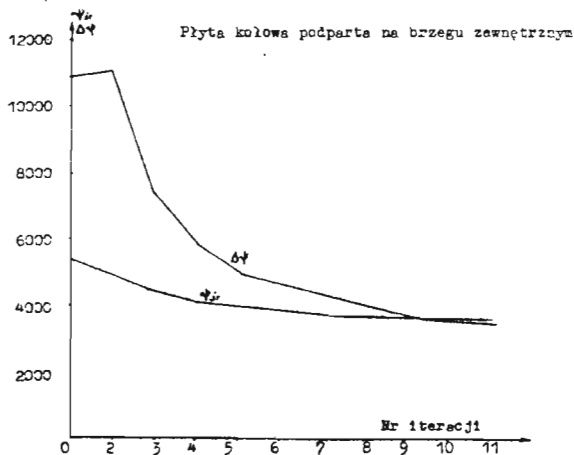


Rys. 4. Zarys przekroju poprzecznego płyty po kształtowaniu

Płyta kołowa o promieniu zewnętrznym 100 mm posiada w środku otwór o promieniu 10 mm. Grubość płyty jest początkowo stała i wynosi 10 mm. Płytę podparto na konturze otworu i obciążono równomiernie ciśnieniem o wartości $p = 100$ N/mm² (rys.4).

Symetryczną ćwiartkę płyty zamodelowano 81 elementami czworokątnymi rozpiętymi na 100 węzłach. Płytę kształtowano na największą sztywność z zachowaniem symetrii osiowej w 10-ciu iteracjach.

Na rys.5 pokazano zależność potencjału średniego i różnicy ekstremalnych potencjałów sprężystych od numeru iteracji. Różnica ta spadła z wartości 23650.0 N/mm² do wartości 3975.0 N/mm² przy równoczesnym obniżeniu potencjału średniego z 3850.0 N/mm² do 890.0 N/mm². Kształt przekroju promieniowego płyty po 10-ciu iteracjach pokazano na rys.4 .



Rys. 5. Zależność potencjału średniego i różnicy ekstremalnych potencjałów sprężystych od numeru iteracji

5. Literatura

1. JAKUBOWICZ A., JOHN A., HAREŹŁAK K., KAPLANEK J., WRÓBEL G., *Optymalizacja postaci ustrojów nośnych ze względu na największą sztywność*, Praca naukowo-badawcza IMiPKM Pol.Śl., Gliwice 1986
2. JAKUBOWICZ A., JOHN A., KAPLANEK J., WRÓBEL G., *Optymalizacja postaci ustrojów nośnych ze względu na największą sztywność*, Praca naukowo-badawcza IMiPKM Pol.Śl., Gliwice 1987
3. MRÓZ Z., *Multi-parametr optimal design of plates and shells*, J. Struct. Mech., z.1, 1973
4. LURIE K.A., CZERKAJEV A.B., *O primienieni teoriiu Pragera k zadaczi optimalnogo projektirowanija tonkich plastin*, Izd.A.N. ZSRR, MTT Nr 6, 1976
5. SIMITSES G.J., *Optimal vs. stiffenet circural plate*, AIAA J., z.11, 1973
6. ARMAND J.L., *Numerical solutions in optimization of structural elements*, Proc. Ist. Internat. Conf. on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Austin, Texas, USA 1974
7. ARMAND J.L., LODIER B., *Optimal design of bending elements*, International J. Numer. Meth. Engn. z.13, 1978
8. CHENG KENG-TUNG, OLCHOFF N., *On investigation concerning optimal design of solids elastics plates*, Preprint Pergamon Press, 1980
9. KAPLANEK J., *Kształtowanie płaskich ustrojów nośnych o największej sztywności*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana z.2-3, 21, Warszawa 1983
10. JAKUBOWICZ A., KAPLANEK J., WRÓBEL G., *Optymalne kształtowanie elementów nośnych maszyn z uwzględnieniem warunków lokalnej sztywności*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana z.3, Warszawa 1989

11. JAKUBOWICZ A., KAPLANEK J., LENART M., *Projektowanie rovinnych nosnych konstrukcji wysokiej tuhosti*, Naradie, Nove Zamky z.3, 1988
12. BRANDT A.N., *Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych*, PWN, Warszawa 1978
13. BRANDT A.N., *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, PWN, Warszawa 1977
14. KĄCZKOWSKI Z., *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980
15. TIMOSZENKO S., WOJNOWSKY-KRIEGER S., *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962
16. WASIUTYŃSKI Z., *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akad.Nauk Techn. , Warszawa 1939
17. OLCHOFF N., *Optimalnoje projektowanie konstrukcji*, Izd. Mir, Moskwa 1981

Summary

In this paper, the formation of statically determinated plates considering a stiffness maximum for any boundary conditions is presented. The plates for the mass conservation condition are formed. The finite elements method was adopted, equalizing elastic potential on unbounded surfaces of plates.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 lutego 1989 roku