

## PRIMERA PARTE

# Algunas Aplicaciones de las Calculadoras Programables en el Análisis Estructural

Las calculadoras programables permiten la solución de un amplio grupo de problemas de análisis estructural, comprendidos entre los que requieren el uso del computador y los que pueden tratarse por métodos manuales.

En muchos casos se requiere la presentación del problema de análisis en una forma especial que permita la utilización más eficiente de las características operativas de la calculadora.

En este trabajo se presentan algunos algoritmos que pueden programarse fácilmente en una calculadora y que pueden utilizarse en el análisis de estructuras a flexión y en problemas del tipo antes mencionado.

**Alfonso Ramírez Rivera**  
Ingeniero Civil, MSc. Ph.D., D.I.C.  
Profesor de Estructuras

1. Las calculadoras programables de que hoy se dispone permiten resolver eficientemente ciertos problemas de análisis estructural cuyo tamaño y complejidad no se prestan para un tratamiento conveniente por métodos manuales o mediante la computadora.

2. En el análisis de estructuras planas de barras a flexión se presentan muchos ejemplos de los problemas antes mencionados. Consideremos inicialmente el caso de una de estas estructuras con nudos interiores en conexión topológica simple, o sea si los nudos se designan ordenadamente con la serie de los números naturales  $1:n$ , un nudo  $i$  está directamente conectado sólo con los nudos  $i-1$  e  $i+1$  ( $n > i > 1$ ), como la estructura mostrada en la Figura 1.

3. Los métodos de análisis de estas estructuras hacen uso de los siguientes conceptos:

**3.1. Coeficiente de rigidez.** El coeficiente de rigidez en un punto y en una dirección dada de una estructura sometida a condiciones determinadas de borde, se define como la acción (fuerza o momento) en dicho punto y dirección que produce un desplazamiento unitario correspondiente (translación para fuerza, rotación para momento) en el mismo punto.

### Ejemplo 1

El coeficiente de rigidez ( $K$ ) en un extremo articulado (A) de una barra prismática de sección transversal con un eje de simetría, de un

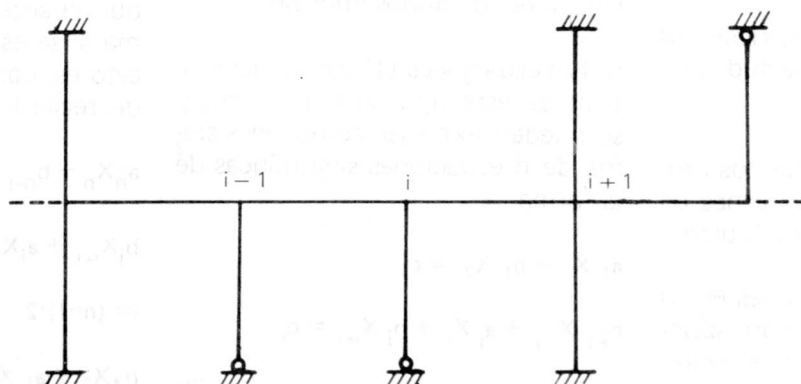


Figura 1

material elástico con módulo  $E$ , correspondiente a un momento flector  $M$  normal al eje de simetría, tiene un valor de  $4 EI/L$  cuando el otro extremo está empotrado, y de  $3 EI/L$  cuando dicho extremo está articulado. Es el correspondiente momento de inercia geométrico de la sección y  $L$  la longitud de la barra. (Fig. 2).

concurrer en el nudo  $i$ , y a momentos  $t_{ij} K_{ij} \Theta_i$  en el otro extremo.  $K$  y  $t$  son los coeficientes de rigidez y de translación respectivamente.

4.4. Cálculo de las rotaciones  $\Theta_i$  que corresponden al equilibrio de momentos en los nudos  $i$ , mediante las ecuaciones

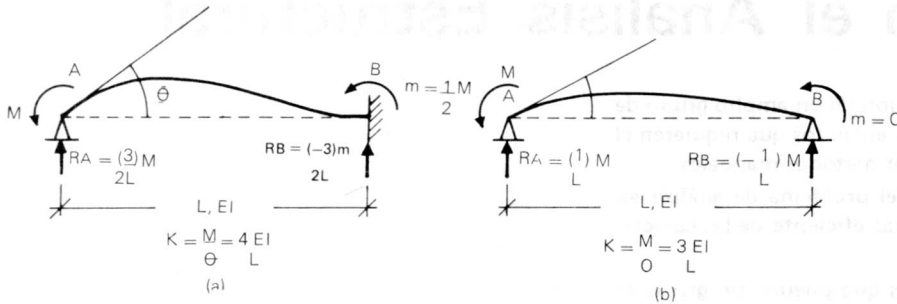


Figura 2

3.2. **Coefficiente de transmisión.** El coeficiente de transmisión entre un punto y en una dirección dada, y otro punto y otra dirección de una estructura sometida a condiciones determinadas de borde se define como el efecto (fuerza o momento) producido en el segundo punto por una acción unitaria (fuerza o momento) aplicada en el primero.

### Ejemplo 2

Con referencia al caso de la figura 2 a), el coeficiente de transmisión entre el punto A en la dirección del momento flector  $M$  y el punto B vale  $1/2$  para momento flector ( $m$ ) y  $-3/2L$  para la fuerza  $R_B$ .

4. El análisis de una estructura como la descrita en 2, en el caso de nudos interiores con restricción de translación, se puede llevar a cabo en los siguientes pasos:

4.1. Introducción de restricciones ficticias de rotación en los nudos interiores  $i$ .

4.2. Cálculo de los momentos producidos por las cargas externas en los extremos de cada barra (Momentos de empotramiento).

4.3. Aplicación de rotaciones  $\Theta_i$  en cada nudo  $i$ , las cuales corresponden a momentos  $K_{ij} \Theta_i$  en el extremo  $i$  de cada una de las barras  $j$  que

concurrer en  $i$ , y  $M_{ij}$  el momento de empotramiento en el extremo  $i$  de la barra  $ij$ .

4.5. Cálculo de los momentos finales. El momento en el extremo  $g$  de una barra  $gh$  vale

$$m_{gh} = M_{gh} + K_{gh} \Theta_g + t_{hg} K_{hg} \Theta_h \quad (2)$$

en donde  $M_{gh}$  es el momento de empotramiento, y  $\Theta_g$  y  $\Theta_h$  tienen significado sólo si corresponden a rotaciones de nudos interiores.

5. Las ecuaciones (1) son características de este tipo de estructuras, y se pueden expresar como un sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas de la forma

$$a_1 X_1 + b_1 X_2 = c_1$$

$$b_{i-1} X_{i-1} + a_i X_i + b_i X_{i+1} = c_i$$

$$i=2:(n-1)$$

(3)

$$b_{n-1} X_{n-1} + a_n X_n = c_n$$

cuya solución se puede obtener mediante el siguiente algoritmo, fácilmente programable en una calculadora:

5.1. Iterando la eliminación de una incógnita entre las primeras dos ecuaciones, se llega a un sistema de la forma

$$a'_i X_i + b_i X_{i+1} = c'_i \quad i=1:(n-1) \quad (4)$$

$$a'_n X_n = c'_n$$

en donde

$$a'_i = a_i + a'_i \quad i=1:n \quad (5)$$

$$c'_i = c_i + c'_i$$

$$a'_1 = 0$$

$$c'_1 = 0$$

$$a'_{i+1} = -b_i (b_i/a'_i) \quad i=1:(n-1) \quad (6)$$

$$c'_{i+1} = -c'_i (b_i/a'_i)$$

5.2. El sistema (4) permite el cálculo de la incógnita  $X_n$  como

$$X_n = c'_n/a'_n$$

5.3. Una vez conocida la incógnita  $X_n$ , las otras incógnitas pueden calcularse del sistema (3) mediante sustituciones sucesivas de atrás hacia adelante,

$$X_{n-1} = (c_n - a_n X_n)/b_{n-1}$$

$$X_{i-1} = (c_i - b_i X_{i+1} - a_i X_i)/b_{i-1}$$

$i=(n-1):2$

5.4. Alternativa y más conveniente se puede usar de nuevo el procedimiento indicado en 5.1, observando que el sistema (3) mantiene su forma si se escribe en sentido inverso, esto es, con las incógnitas en orden decreciente.

$$a_n X_n + b_{n-1} X_{n-1} = c_n$$

$$b_i X_{i+1} + a_i X_i + b_{i-1} X_{i-1} = c_i$$

$$i=(n-1):2 \quad (7)$$

$$b_1 X_2 + a_1 X_1 = c_1$$

Este sistema se transforma entonces en

$$X_{i-1} = (c_i^* - a_i^* X_i) / b_{i-1}$$

$$a_i^* X_i + b_{i-1} X_{i-1} = c_i^* \quad i = n:2 \quad (8)$$

y como comprobación,  $X_1$  también puede calcularse de (9),

$$a_1^* X_1 = c_1^* \quad (9)$$

$$X_1 = c_1^* / a_1^*$$

con la notación indicada en (5) y (6) con los correspondientes cambios en los índices.

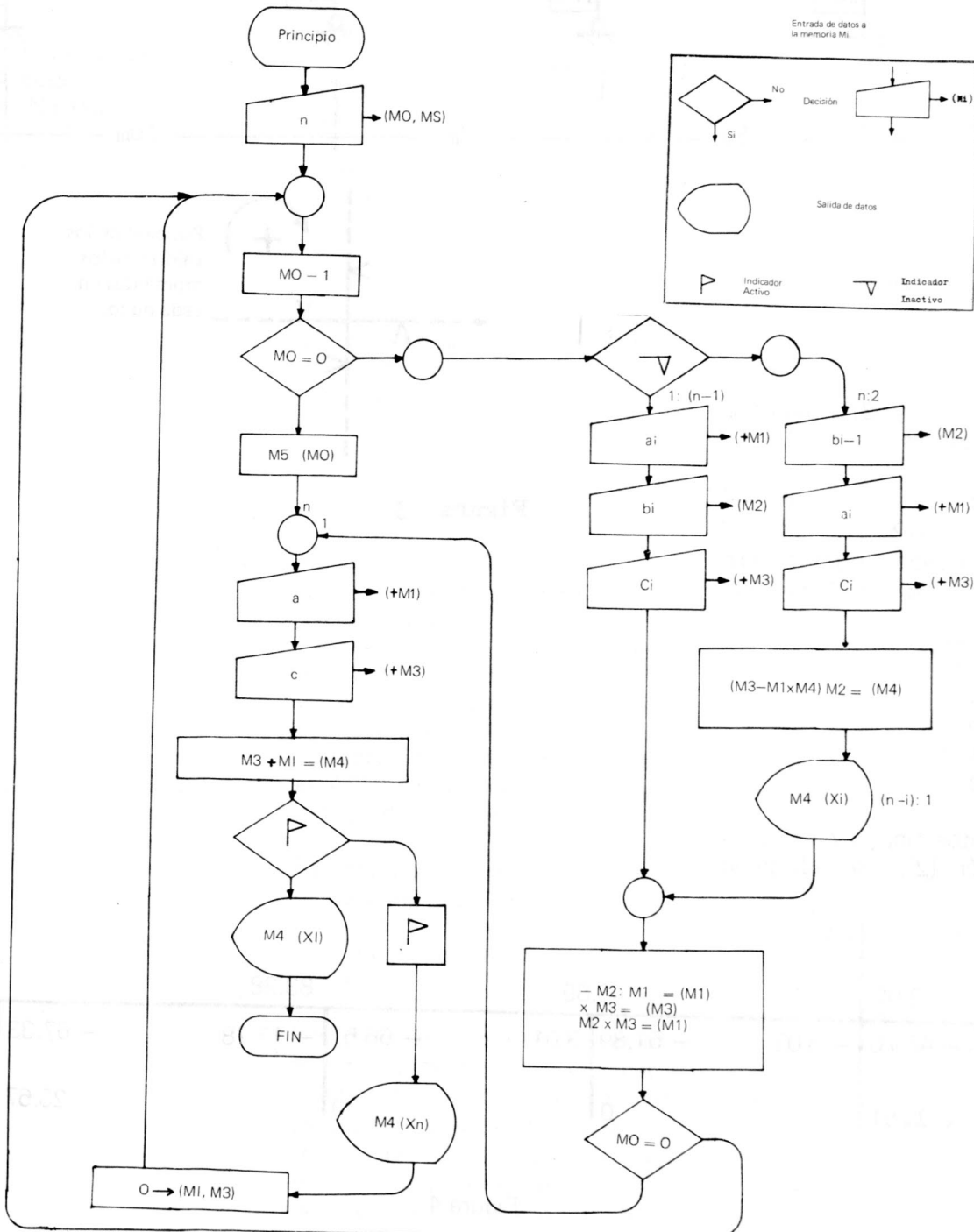
5.5. Conociendo las rotaciones, los momentos en los extremos de las barras se obtienen de las ecuaciones (2).

Las incógnitas  $X_{i-1}$ ,  $i = n:2$ , se calculan de (8),

6. La programación puede hacerse almacenando todos los coeficientes

$a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  para ser utilizados de nuevo en el proceso de sustitución una vez calculada la incógnita  $X_n$ , pero esto al tamaño del sistema que se puede resolver según la capacidad de memoria de la calculadora.

Alternativamente, los coeficientes pueden ser leídos dos veces, utilizando cada vez sólo tres memorias, y en tal caso el programa permite resolver cualquier número de ecuaciones. El diagrama de flujo de un programa para esta alternativa se indica a continuación. ▶

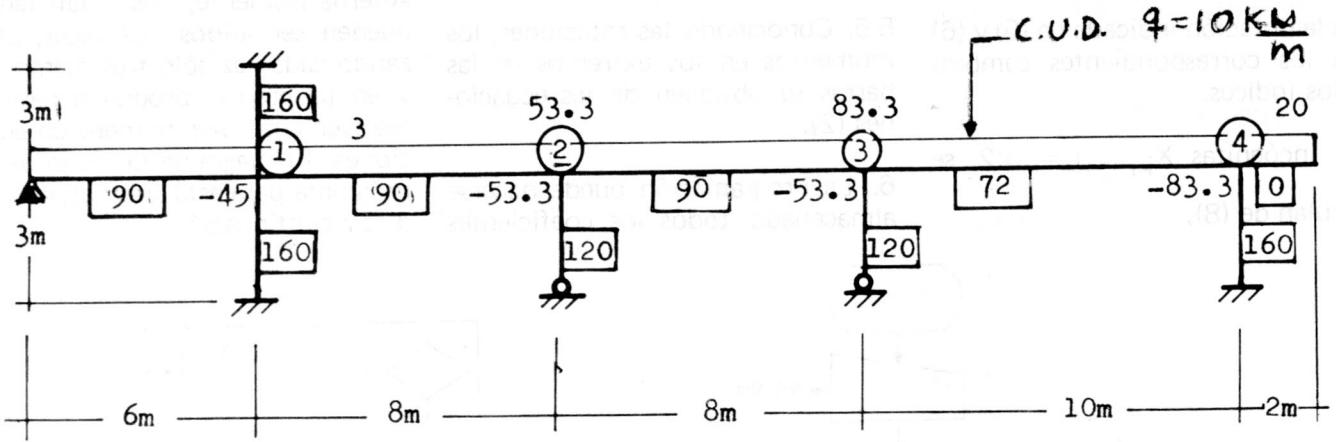


UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
BIBLIOTECA

### Ejemplo 3

Analizar el pórtico mostrado en la

Fig. 3, en donde se dan además de los datos del problema, los momentos de empotramiento en los extremos de cada barra y las rigideces.



Vigas  $EI = 180$   
Columnas  $EI = 120$

Las ecuaciones (1) y (3) de las rotaciones son entonces

$$\begin{aligned} 500X_1 + 45X_2 &= -8.3 \\ 45X_1 + 300X_2 + 45X_3 &= 0.0 \\ 45X_2 + 282X_3 + 36X_4 &= 30.0 \\ 36X_3 + 232X_4 &= 63.3 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} X_1 &= 0.018854 \\ X_2 &= 0.025050 \\ X_3 &= -0.148146 \\ X_4 &= 0.295833 \end{aligned}$$

y los momentos finales se obtienen de la ecuación (2), y se indican en la Fig. 4 ■

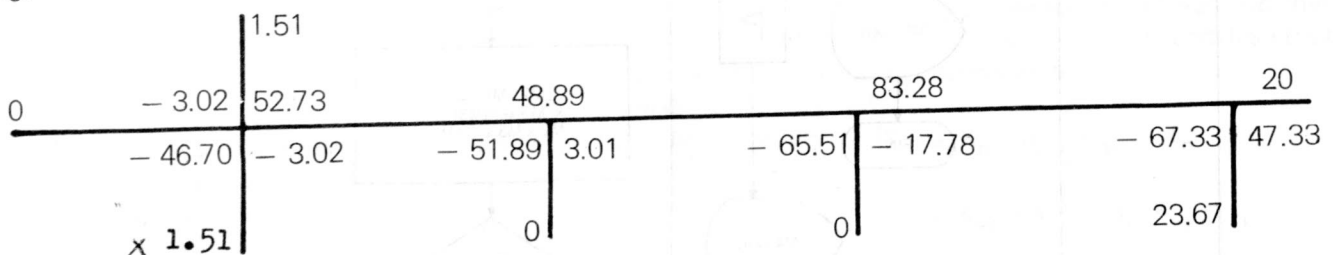


Figura 4