

Estudio comparativo del comportamiento de losas de concreto reforzado mediante los análisis elástico y límite

En este artículo se presenta un resumen de la tesis de grado "Estudio Comparativo del Comportamiento de Losas de Concreto Reforzado Mediante los Análisis Elástico y Límite" presentada como requisito parcial para optar el título de Magister Scientiae en Estructuras dirigida por el Ingeniero Jorge Arturo Márquez, y calificada con la distinción Meritoria.

El presente trabajo proporciona fórmulas, tablas y gráficas prácticas para determinar los momentos flectores y el volumen de refuerzo de los tipos de losas estudiados, sometidas a diferentes tipos de carga y analizados mediante la Teoría de la Elasticidad y el Análisis Límite (Líneas de Rotura "Johansen" y Método de las Franjas "Hillerborg"); además se dan recomendaciones tanto para el diseño como para futuras investigaciones en este campo.

JULIO VERGARA GARCIA
Ingeniero civil, M. Sc. en Estructuras U.N.

Todos los que han tenido que enfrentarse con el estudio de losas que trabajan en dos direcciones conocen las dificultades del desarrollo numérico de los métodos de cálculo de estos elementos, especialmente cuando se emplea el Análisis Elástico pues implica la solución de la muy conocida Ecuación de Lagrange $\Delta^4 w = p/D$, pero también es conocida la bondad estructural y reserva de energía inherentes a este tipo de losas debido, especialmente, a su facultad para repartir cargas, al igual que su economía palpable cuando se trata de grandes luces, grandes cargas o ambas.



En este trabajo se analizaron mediante la Teoría Elástica y la Teoría Límite — Líneas de Rotura "Johansen" y Método de las Franjas "Hillerborg", diferentes tipos de losas apoyadas en cuatro, tres y dos bordes, sometidas a cargas tales como: distribuida uniforme y triangularmente, concentradas; con condiciones de borde como: apoyos simples, empotrados y bordes libres y con diferentes relaciones de luces L/KL .

SIMBOLOS Y NOMENCLATURA

Apoyo

- — borde libre
- — borde simplemente apoyado
- ==== — borde empotrado

Líneas de rotura

-  — línea de rotura positiva (tracción abajo)
-  — línea de rotura negativa (tracción arriba)

Fuerzas exteriores

- p — valor de la carga total
- q — valor de la carga uniformemente distribuida.

Dimensiones

- L, KL — dimensiones de las losas
- h — espesor de la losa
- d — altura efectiva del refuerzo por tensión

Otras notaciones

- E_c — módulo de elasticidad del concreto

- E_s — módulo de elasticidad del acero
- ν — módulo de Poisson
- μ — coeficiente de ortotropía
- f_y — esfuerzo del acero a la fluencia nominal
- f'_c — resistencia del concreto a la compresión
- i — coeficiente que relaciona momentos negativos (apoyos) y positivos (luces)
- d' — brazo de palanca interno

ANALISIS POR FLEXION DE LAS LOSAS

A continuación se exponen sólo dos de los casos estudiados para losas apoyadas en cuatro bordes y sometidas a cargas uniformemente distribuidas. Los tipos de losas estudiados fueron:

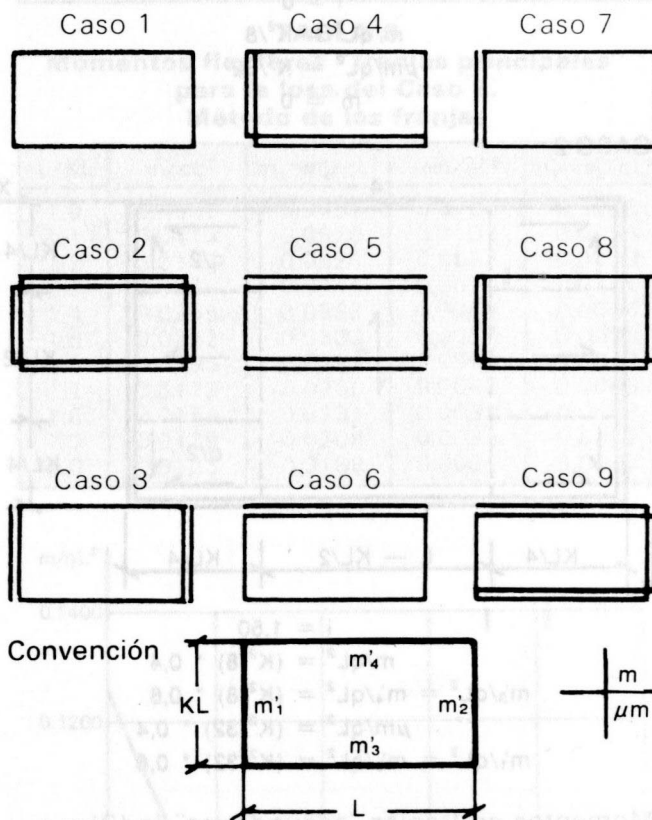


TABLA 1
Momentos flectores para la losa del Caso 1.
Método elástico

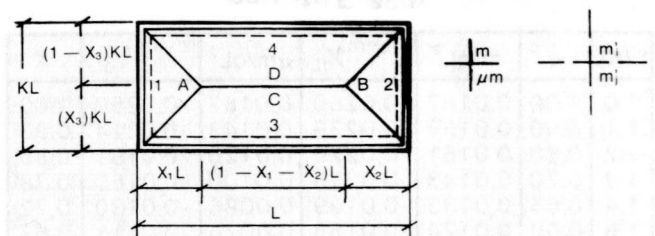
L/KL	m/qL^2	$\mu m/qL^2$
1.0	0.0423	0.0423
1.1	0.0413	0.0353
1.2	0.0399	0.0293
1.3	0.0381	0.0244
1.4	0.0362	0.0204
1.5	0.0343	0.0173
1.6	0.0323	0.0146
1.7	0.0302	0.0124
1.8	0.0283	0.0107
1.9	0.0264	0.0091
2.0	0.0248	0.0079

TABLA 2
Momentos flectores para la losa del Caso 2.
Método elástico

L/KL	m/qL^2	$m_3 = m_4/qL^2$	$\mu m/qL^2$	$m_1 = m_2/qL^2$
1.0	0.0202	-0.0515	0.0202	-0.0515
1.1	0.0200	-0.0483	0.0164	-0.0449
1.2	0.0199	-0.0447	0.0131	-0.0388
1.3	0.0181	-0.0408	0.0105	-0.0336
1.4	0.0169	-0.0371	0.0084	-0.0291
1.5	0.0157	-0.0336	0.0066	-0.0254
1.6	0.0144	-0.0304	0.0053	-0.0223
1.7	0.0133	-0.0276	0.0049	-0.0198
1.8	0.0121	-0.0251	0.0035	-0.0176
1.9	0.0110	-0.0228	0.0028	-0.0158
2.0	0.0101	-0.0208	0.0024	-0.0143

Método de las líneas de rotura "Johansen"

El caso general de rotura de este tipo de losas se presenta a continuación:



$$\gamma_{12} = \sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_2} ; \gamma_{34} = \sqrt{1 + i_3} + \sqrt{1 + i_4}$$

$$\frac{\sqrt{\mu} k \sqrt{1 + i_2}}{\gamma_{34}} \left[\sqrt{3 + \mu \left[\frac{K\gamma_{12}}{\gamma_{34}} \right]} - \sqrt{\mu} \frac{K\gamma_{12}}{\gamma_{34}} \right]$$

$$X_1 = X_2 \frac{\sqrt{1 + i_2}}{\sqrt{1 + i_2}} \frac{\sqrt{1 + i_3}}{\gamma_{34}}$$

$$m = \frac{7K^2L^2}{6\gamma_{34}^2} \left[\sqrt{3 + \mu \left[\frac{K\gamma_{12}}{\gamma_{34}} \right]} - \sqrt{\mu} \frac{K\gamma_{12}}{\gamma_{34}} \right]$$

Si $(X_1 + X_2) \leq 1$ (Ecuación 1)

$$|m_1| = |i_1 \mu m| ; |m_2| = |i_2 \mu m| ; |m_3| = |i_3 m| ; |m_4| = |i_4 m|$$

A continuación se presentan los resultados obtenidos de los casos 1 y 2.

Método elástico

Los momentos flectores se obtienen por diferentes métodos tales como:

- a. Solución por medio de series trigonométricas dobles, o solución de Navier.
- b. Solución por medio de series trigonométricas simples:
 - b.1. a partir de la solución de Navier.
 - b.2. solución de Nadai.
- c. Solución de las diferencias finitas.

Si $X = X_1 + X_2 > 1$ deberá girarse la losa 90° y colocar la misma nomenclatura según la nueva posición para aplicar la ecuación 1.

En general se escogen valores de i más bajos que los elásticos para que no causen fisuraciones precoces (indeseables) en las luces. Los porcentajes máximos de redistribución de momentos para este tipo de carga, no superaron el 25%.

Los valores del factor de ortotropía están entre 0.3 y 1.0 y se obtuvieron siguiendo recomendaciones de autores como: Kerpel y Jiménez Montoya.

TABLA 3

Momentos flectores para la losa del Caso 1. Método de las líneas de rotura

$$i_1=i_2=i_3=i_4=0$$

L/KL	μ	m/qL^2	$\mu m/qL^2$	X
1.0	1.00	0.0417	0.0417	1.00
1.1	0.90	0.0396	0.0356	0.92
1.2	0.80	0.0376	0.0301	0.85
1.3	0.70	0.0357	0.0250	0.78
1.4	0.65	0.0332	0.0216	0.72
1.5	0.60	0.0308	0.0185	0.67
1.6	0.55	0.0288	0.0158	0.62
1.7	0.50	0.0269	0.0134	0.57
1.8	0.45	0.0252	0.0113	0.52
1.9	0.40	0.0236	0.0094	0.48
2.0	0.30	0.0228	0.0069	0.41

TABLA 4

Momentos flectores para la losa del Caso 2. Método de las líneas de rotura

$$i_1=i_2=i_3=i_4=1,50$$

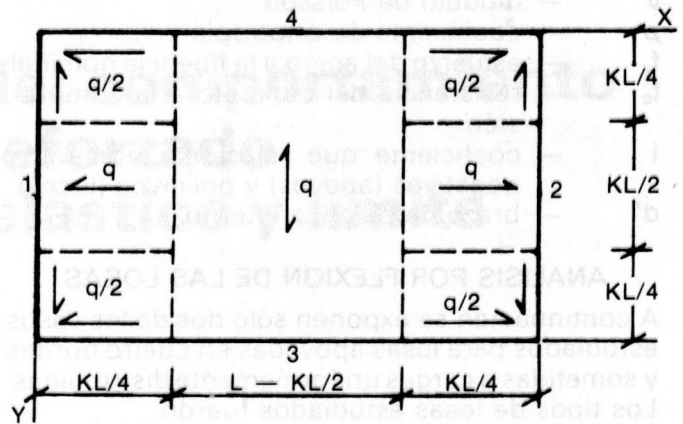
L/KL	μ	m/qL^2	$m_3=m_4/qL^2$	$\mu m/qL^2$	$m_1=m_2/qL^2$	X
1.0	1.00	0.0167	-0.0250	0.0167	-0.0250	1.00
1.1	0.90	0.0159	-0.0238	0.0143	-0.0214	0.92
1.2	0.80	0.0151	-0.0226	0.0120	-0.0181	0.85
1.3	0.70	0.0143	-0.0215	0.0100	-0.0150	0.78
1.4	0.65	0.0133	-0.0199	0.0086	-0.0130	0.72
1.5	0.60	0.0124	-0.0185	0.0074	-0.0111	0.67
1.6	0.55	0.0115	-0.0173	0.0063	-0.0095	0.62
1.7	0.50	0.0108	-0.0161	0.0054	-0.0081	0.57
1.8	0.45	0.0101	-0.0151	0.0045	-0.0068	0.52
1.9	0.40	0.0094	-0.0142	0.0038	-0.0057	0.48
2.0	0.30	0.0091	-0.0137	0.0027	-0.0041	0.41

Método de las franjas "Hillerborg"

Momentos en franjas "principales" (q).

Los momentos aquí obtenidos se emplean tanto para el análisis comparativo de momentos así como para el análisis económico de las losas.

CASO 1



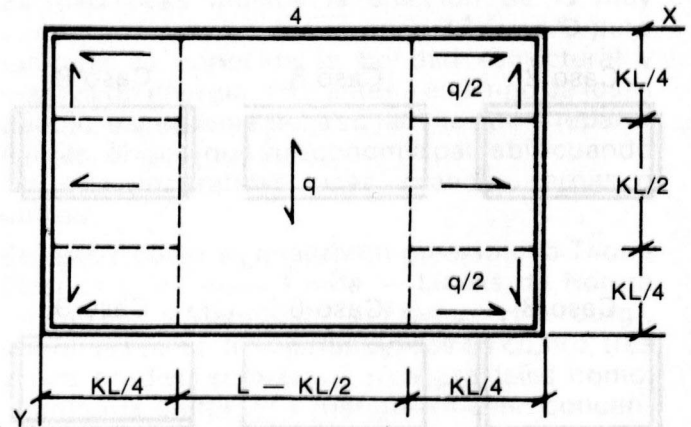
$$i = 0$$

$$m/qL^2 = K^2/8$$

$$\mu m/qL^2 = K^2/32$$

$$m' = 0$$

CASO 2



$$i = 1,50$$

$$m/qL^2 = (K^2/8) * 0,4$$

$$m_3/qL^2 = m_4/qL^2 = (K^2/8) * 0,6$$

$$\mu m/qL^2 = (K^2/32) * 0,4$$

$$m_1/qL^2 = m_2/qL^2 = (K^2/32) * 0,6$$

Momentos en franjas "secundarias" (q/2)

CASO 1

$$m/qL^2 = K^2/64$$

$$\mu m/qL^2 = K^2/64$$

$$m' = 0$$

CASO 2

$$m/qL^2 = (K^2/64) * 0,4$$

$$m_3/qL^2 = m_4/qL^2 = (K^2/64) * 0,6$$

$$\mu m/qL^2 = (K^2/64) * 0,4$$

$$m_1/qL^2 = m_2/qL^2 = (K^2/64) * 0,6$$

TABLA 5
Momentos flectores "franjas principales"
para la losa del Caso 1.
Método de las franjas.

L/KL	$\mu m/qL^2$	$\mu m/qL^2$
1.0	0.1250	0.0313
1.1	0.1033	0.0258
1.2	0.0868	0.0217
1.3	0.0740	0.0185
1.4	0.0638	0.0159
1.5	0.0556	0.0139
1.6	0.0488	0.0122
1.7	0.0433	0.0108
1.8	0.0386	0.0096
1.9	0.0346	0.0087
2.0	0.0313	0.0078

TABLA 7
Momentos flectores "franjas secundarias"
para la losa del Caso 1.
Método de las franjas

L/KL	$m = \mu m/qL^2$
1.0	0.0156
1.1	0.0129
1.2	0.0109
1.3	0.0092
1.4	0.0080
1.5	0.0069
1.6	0.0061
1.7	0.0054
1.8	0.0048
1.9	0.0043
2.0	0.0039

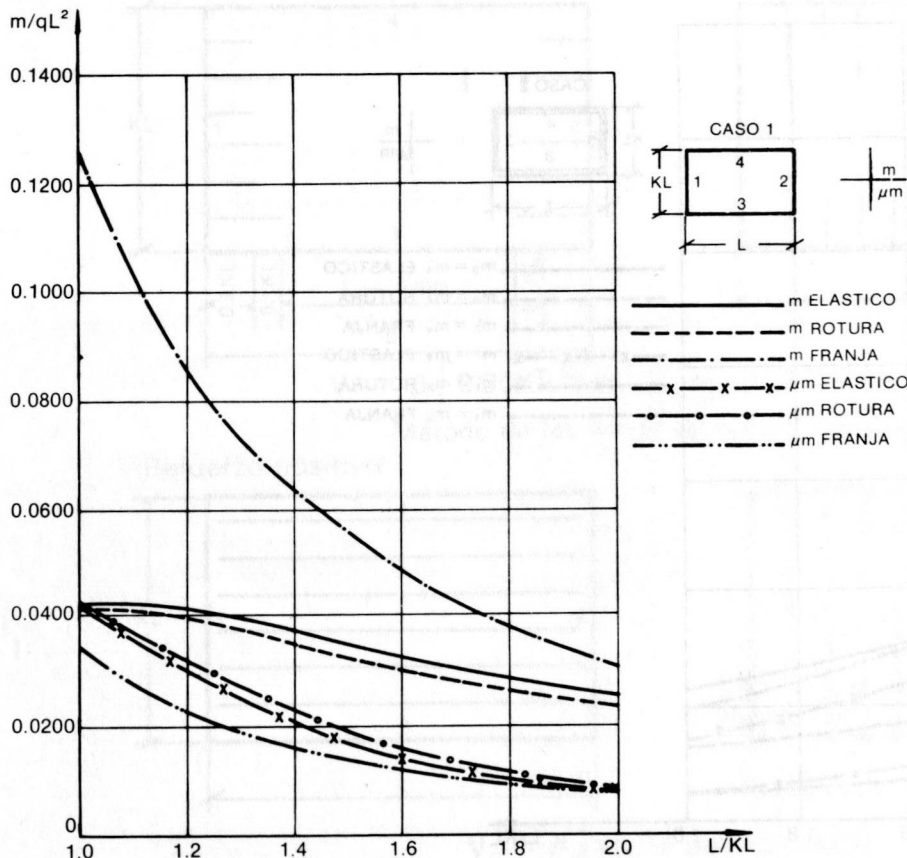
TABLA 6
Momentos flectores "franjas principales"
para la losa del Caso 2.
Método de las franjas

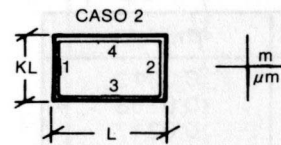
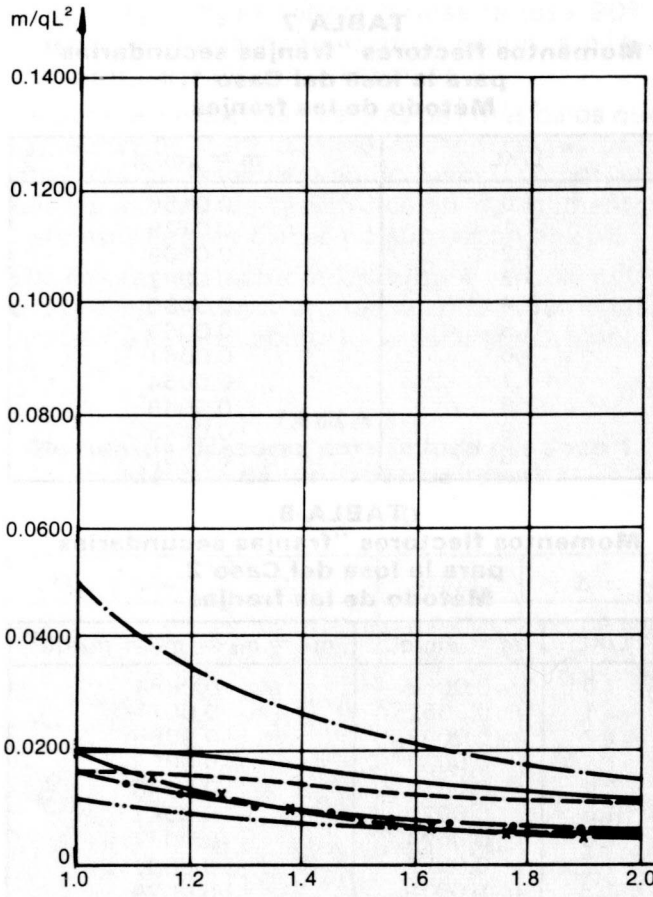
L/KL	m/qL^2	$m_3=m'_4/qL^2$	$\mu m/qL^2$	$m'_1=m'_2/qL^2$
1.0	0.0500	-0.0750	0.0125	-0.0188
1.1	0.0413	-0.0620	0.0103	-0.0155
1.2	0.0347	-0.0521	0.0087	-0.0130
1.3	0.0296	-0.0444	0.0074	-0.0111
1.4	0.0255	-0.0383	0.0064	-0.0096
1.5	0.0222	-0.0333	0.0056	-0.0083
1.6	0.0195	-0.0293	0.0049	-0.0073
1.7	0.0173	-0.0260	0.0043	-0.0065
1.8	0.0154	-0.0231	0.0039	-0.0058
1.9	0.0139	-0.0208	0.0035	-0.0052
2.0	0.0125	-0.0188	0.0031	-0.0047

TABLA 8
Momentos flectores "franjas secundarias"
para la losa del Caso 2.
Método de las franjas

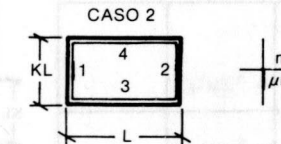
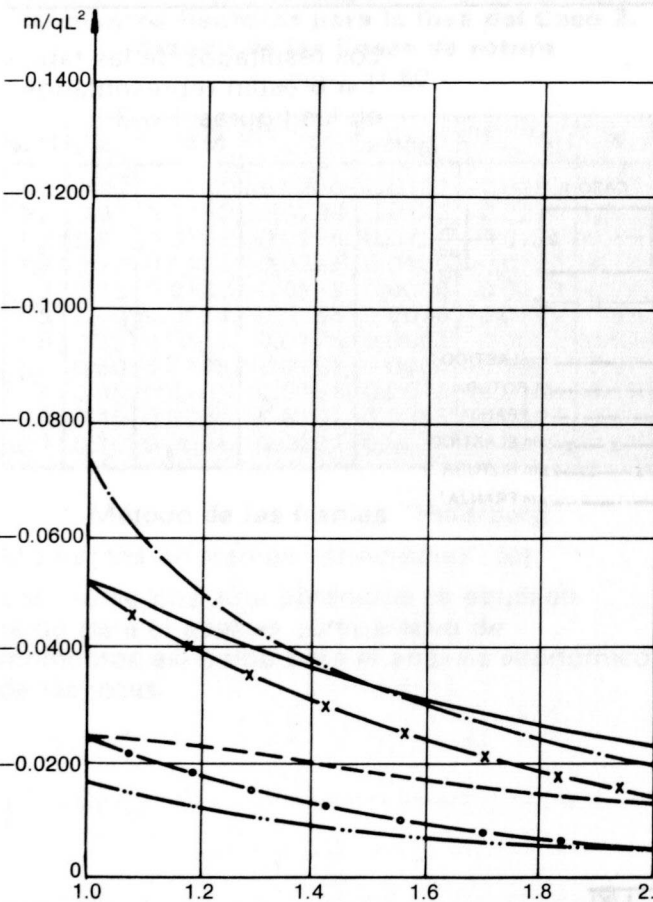
L/KL	$m = \mu m/qL^2$	$m'_1 = m'_2 = m'_3 = m'_4/qL^2$
1.0	0.0063	-0.0094
1.1	0.0052	-0.0077
1.2	0.0043	-0.0065
1.3	0.0037	-0.0055
1.4	0.0032	-0.0048
1.5	0.0028	-0.0042
1.6	0.0024	-0.0037
1.7	0.0022	-0.0032
1.8	0.0019	-0.0029
1.9	0.0017	-0.0026
2.0	0.0016	-0.0023

Los resultados de las tablas 1 a 6 están representados en las figuras 1 a 3.





- CONVENCIONES
- m ELASTICO
 - - - m ROTURA
 - · - m FRANJA
 - x - x - μm ELASTICO
 - · - · - μm ROTURA
 - · - · - μm FRANJA



- $m_3 = m_4$ ELASTICO
- - - $m_3 = m_4$ ROTURA
- · - $m_3 = m_4$ FRANJA
- x - x - $m_1 = m_2$ ELASTICO
- · - · - $m_1 = m_2$ ROTURA
- · - · - $m_1 = m_2$ FRANJA

ANALISIS ECONOMICO

El siguiente análisis económico del volumen de refuerzo de las losas analizadas es basado sólo en los momentos de análisis, es decir, no se ha considerado: longitud de desarrollo, refuerzo negativo en apoyos simples, refuerzo por torsión en esquinas simplemente apoyadas. El área de refuerzo requerido por unidad de ancho es proporcional al momento de diseño por unidad de ancho. Si el brazo de palanca para los momentos se considera el mismo para ambas direcciones, entonces, el volumen de refuerzo en la losa es proporcional al "Volumen de Momento", dado por:

$$V_m = \iint (m_{ux} + m_{uy}) dx dy$$

Para nuestro caso: $V = \beta(m + \mu m + \lambda m') L_x L_y$
(Ecuación 2)

Donde:

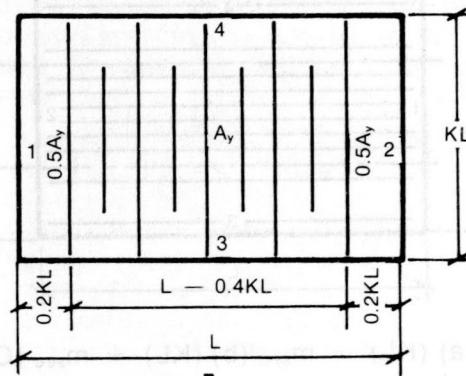
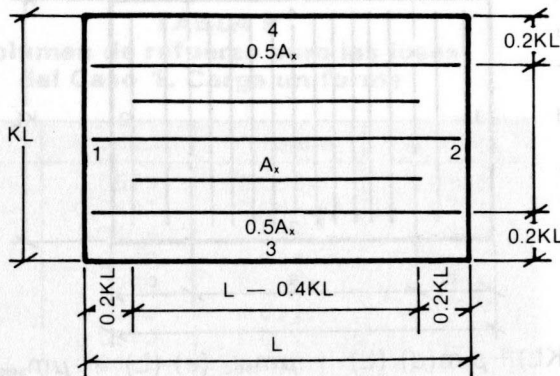
$$\beta = 1/F_y \cdot d'$$

λ = Extensión del esfuerzo superior (punto teórico de corte).

A continuación se presenta la colocación del refuerzo recomendable, en términos generales, para las diferentes losas y métodos estudiados.

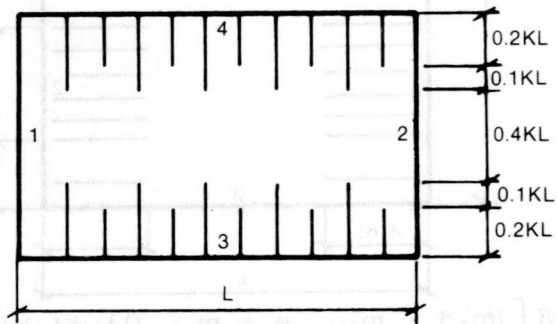
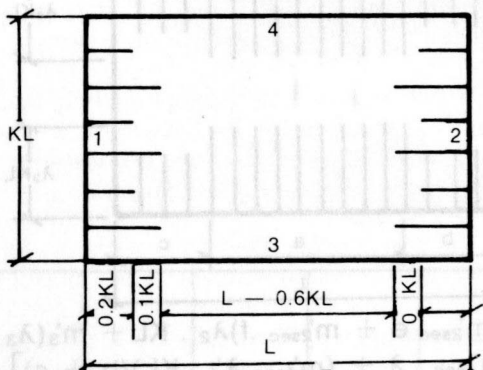
Método elástico

Refuerzo positivo



$$V_+ = \beta [(m + \mu m) (0.8KL) (L - 0.15KL)] \quad \text{(ecuación 3)}$$

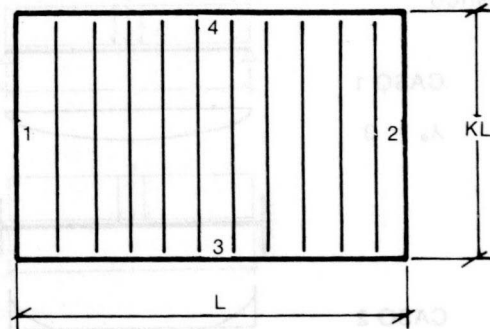
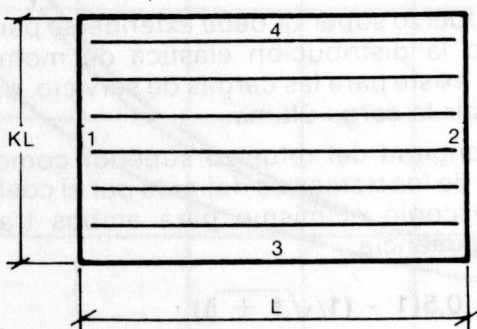
Refuerzo negativo



$$V_- = \beta [0.25K^2L^2(m'_1 + m'_2) + 0.25KL^2(m'_3 + m'_4)] \quad \text{(ecuación 4)}$$

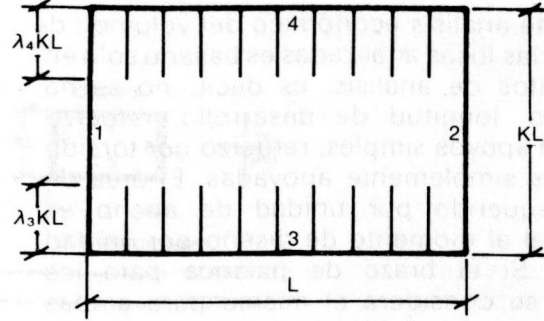
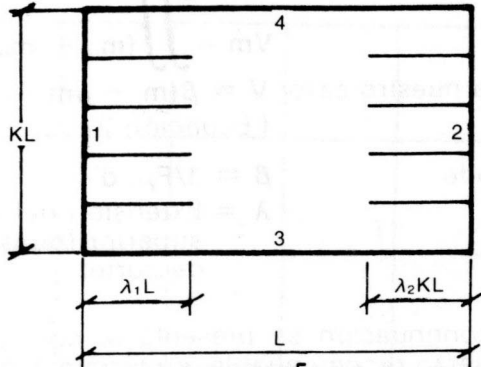
Método de las líneas de rotura "Johansen"

Refuerzo positivo



$$V_+ = \beta [(m + \mu m) (L) (KL)] \quad \text{(ecuación 5)}$$

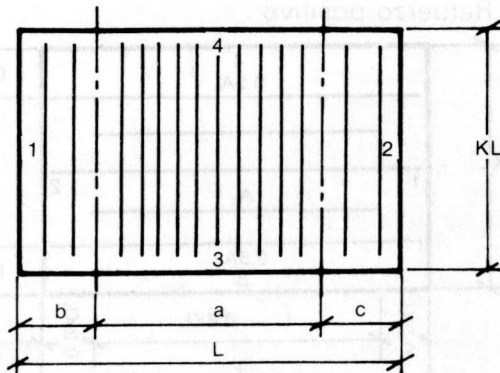
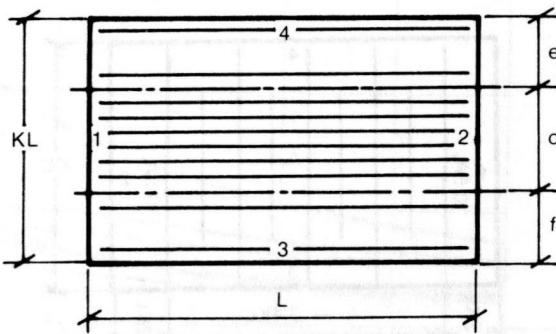
Refuerzo negativo



$$V_- = \beta [(m'_1 \lambda_1 + m'_2 \lambda_2 + m'_3 \lambda_3 + m'_4 \lambda_4) (KL) (L)] \quad \text{(ecuación 6)}$$

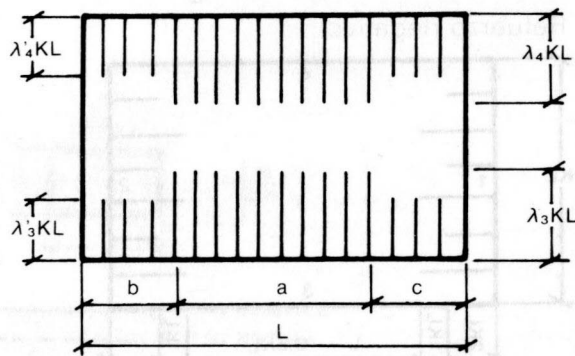
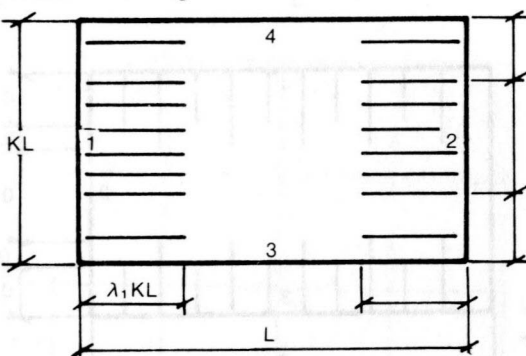
Método de las franjas "Hillerborg"

Refuerzo positivo



$$V_+ = [m(a) (KL) + m_{sec} (b) (KL) + m_{sec} (c) (KL) + \mu m(d) (L) + \mu m_{sec} (e) (L) + \mu m_{sec} (f) (L)] \quad \text{(ecuación 7)}$$

Refuerzo negativo



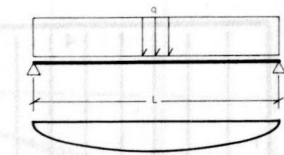
$$V_- = \beta [(m'_1 d + m'_{1sec} \cdot e + m'_{1sec} f) \lambda_1 \cdot KL + (m'_2 d + m'_{2sec} e + m'_{2sec} \cdot f) \lambda_2 \cdot KL + m'_3 (\lambda_3 \cdot KL) a + (m'_{3sec} \cdot \lambda_3 \cdot KL) (b + c) + m'_4 (\lambda_4 \cdot KL) a + (m'_{4sec} \cdot \lambda_4 + (m'_{4sec} \lambda_4 \cdot KL) (b + c)] \quad \text{(ecuación 8)}$$

DETERMINACION DE λ

Método elástico

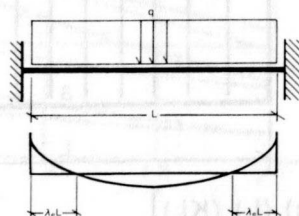
CASO 1

$$\lambda_e = 0$$



CASO 2

$$\lambda_e = 0,2113$$



Método de las líneas de rotura "Johansen"

El refuerzo superior debe extenderse para resistir, tanto la distribución elástica de momentos, la cual existe para las cargas de servicio, como para resistir la carga última.

La longitud del refuerzo superior como proporción de los tramos es definida por el coeficiente λ, se escogió el mismo para ambos tramos por conveniencia.

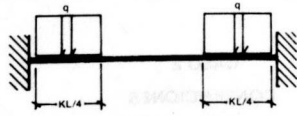
$$\lambda = 0,5(1 - (1/\sqrt{1 + i}))$$

Caso 1 λ_r = 0; Caso 2 λ_r = 0,1838

Método de las franjas "Hilleborg"

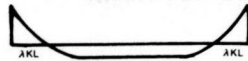
Caso 1

$\lambda_e = 0,2113$
 $\lambda_f = 0,1838$



Caso 2

$\lambda_e = 0,1500$
 $\lambda_f = 0,1000$



El punto de corte será el mayor entre los valores

λ_e y λ_f

Las tablas 9 y 10 presentan los volúmenes de refuerzo para los casos estudiados.

TABLA 9
Volumen de refuerzo para las losas del Caso 1. Carga uniforme

L/KL	Vt.elást	Vt.rotura	Vt.franja
1.0	0.0575	0.0834	0.0938
1.1	0.0481	0.0684	0.0741
1.2	0.0404	0.0564	0.0596
1.3	0.0340	0.0467	0.0484
1.4	0.0289	0.0391	0.0399
1.5	0.0248	0.0329	0.0332
1.6	0.0213	0.0279	0.0279
1.7	0.0183	0.0237	0.0237
1.8	0.0159	0.0203	0.0202
1.9	0.0138	0.0174	0.0174
2.0	0.0121	0.0149	0.0152

TABLA 10

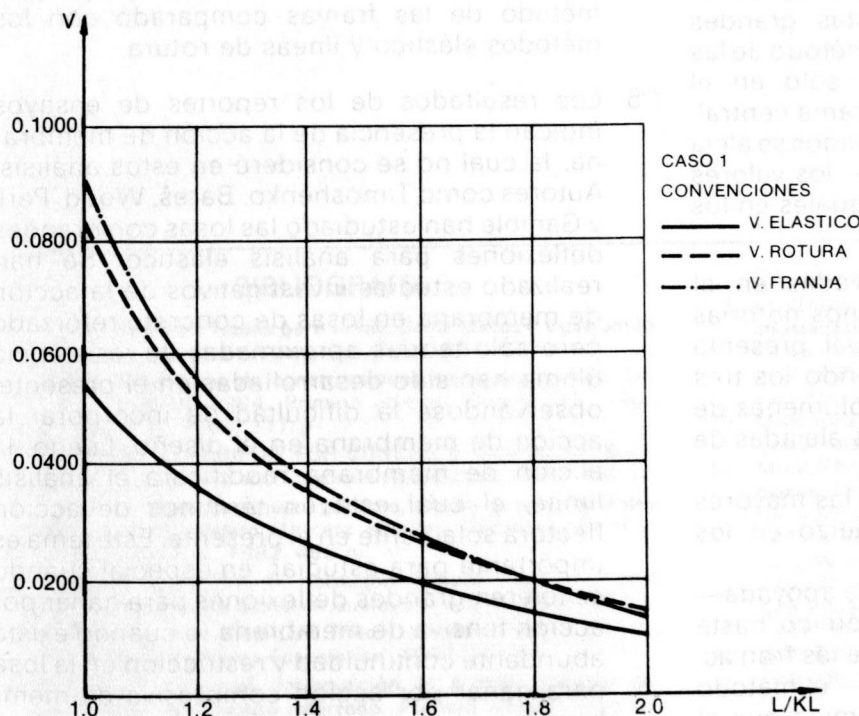
Volumen de refuerzo para las losas del Caso 2. Carga uniforme

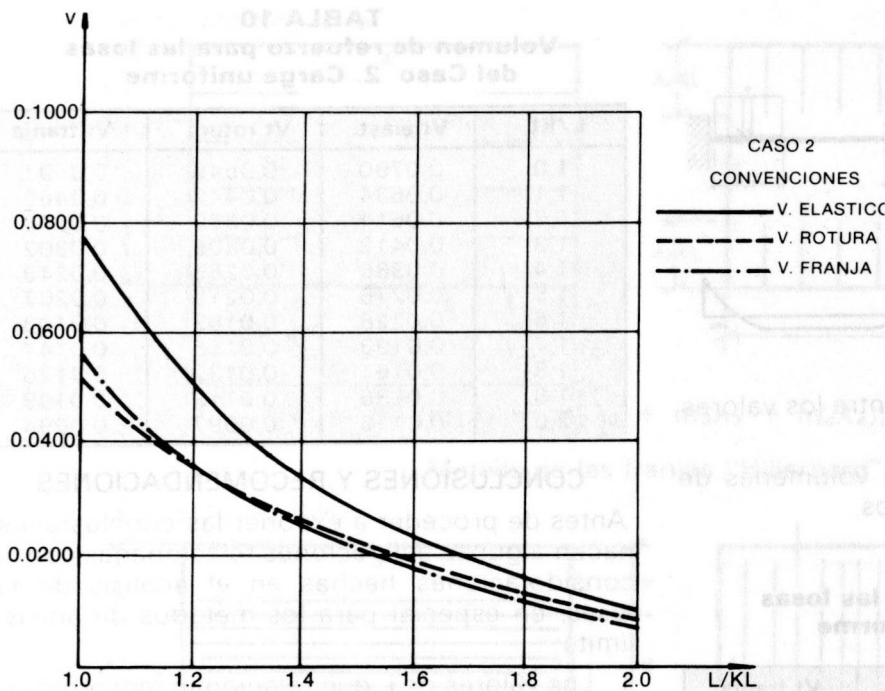
L/KL	Vt.elást.	Vt.rotura	Vt.franja
1.0	0.0790	0.0545	0.0591
1.1	0.0634	0.0449	0.0465
1.2	0.0514	0.0369	0.0372
1.3	0.0412	0.0306	0.0302
1.4	0.0336	0.0255	0.0249
1.5	0.0275	0.0215	0.0207
1.6	0.0228	0.0182	0.0173
1.7	0.0193	0.0155	0.0147
1.8	0.0161	0.0132	0.0126
1.9	0.0136	0.0113	0.0108
2.0	0.0116	0.0097	0.0094

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Antes de proceder a exponer las conclusiones se hacen algunas aclaraciones relacionadas con las consideraciones hechas en el análisis de las losas, en especial para los métodos de análisis límite:

1. Los valores de i , que relacionan momentos en los apoyos y en las luces, no deben diferir considerablemente de los valores dados por la distribución elástica de momentos, porque si existen grandes diferencias puede suceder que para cargas de servicio, las grietas sean excesivas a causa de las bajas relaciones de acero en secciones con momentos altos, los que conducen a grandes esfuerzos en el acero.
2. En el análisis por líneas de rotura no se consideró el "efecto de las esquinas" en apoyos simples, el cual reduce la carga última en un 2% para losas apoyadas en cuatro





bordes; este efecto normalmente no se considera en vista de los resultados conservativos de los ensayos reportados, esto debido principalmente a la acción de membrana.

A continuación se plantean las conclusiones y recomendaciones:

1. El análisis a flexión muestra grandes diferencias, hasta de seis veces para carga uniforme, en los momentos obtenidos por el método de las franjas respecto a los métodos elástico y de rotura, especialmente para relaciones de lados cercanos a la unidad. Estas grandes diferencias se deben a que en el método de las franjas, la carga se distribuye solo en el sentido del lado menor para la franja central, pero a medida que la relación de lados se aleja de la unidad —losas alargadas—, los valores de los momentos tienden a ser iguales en los tres métodos.
2. Las grandes diferencias observadas en el análisis por flexión se hacen menos notorias en el análisis económico, el cual presenta curvas muy coincidentes, tendiendo los tres métodos a representar iguales volúmenes de refuerzo para relaciones de lados alejadas de la unidad. Este análisis económico muestra las mayores diferencias de volumen de refuerzo en los casos "extremos" 1 y 2. Para el caso 1 —losa simplemente apoyada— el método elástico es el más económico, hasta en un 63% respecto al método de las franjas. Para el caso 2 —losa empotrada— el método de las franjas resulta más económico que el

método elástico hasta en un 34% para relaciones de lados iguales a la unidad.

3. Para relaciones de lados próximas a la unidad, a medida que se aumenta el número y grado de empotramiento en las losas —mayor redistribución de momentos— se hacen más económicos los métodos de análisis límite, en especial el de las líneas de rotura.
4. Para el análisis por flexión de este tipo de losas son de destacar la facilidad y bondad del método de las franjas comparado con los métodos elástico y líneas de rotura.
5. Los resultados de los reportes de ensayos indican la presencia de la acción de membrana, la cual no se consideró en estos análisis. Autores como Timoshenko, Bareš, Wood, Park y Gamble han estudiado las losas con grandes deflexiones para análisis elástico. Se han realizado estudios investigativos de la acción de membrana en losas de concreto reforzado pero sólo teorías aproximadas de resistencia última han sido desarrolladas en el presente, observándose la dificultad de incorporar la acción de membrana en el diseño. Luego, la acción de membrana modificará el análisis límite, el cual está en términos de acción flectora solamente en el presente. Este tema es importante para estudiar, en especial cuando se toleren grandes deflexiones para ganar por acción tensiva de membrana, o cuando exista abundante continuidad y restricción en la losa para ganar por acción compresiva de membrana.

6. El presente estudio no analizó los efectos de estructuras compuestas viga-losa que se suceden con mucha frecuencia, luego la acción

compuesta será un tema interesante de estudio en el futuro, tanto para el comportamiento elástico como para el plástico.

PERSPECTIVA HISTORICA

La investigación en el campo de la ingeniería de estructuras compuestas viga-losa ha sido un campo de estudio que ha atraído la atención de muchos investigadores. A lo largo de la historia, se han desarrollado diferentes tipos de estructuras compuestas, desde las más simples hasta las más complejas. En este estudio se analizará el comportamiento de estas estructuras bajo diferentes condiciones de carga y apoyo.

INTRODUCCION

Un ejemplo sencillo de situaciones que involucran objetivos múltiples y restricciones en conflicto lo constituye el problema de asignación de recursos. En este caso, se debe asignar los recursos disponibles de manera que se maximice el beneficio y se minimice el costo. Este problema puede ser formulado como un problema de programación lineal. En este estudio se analizará el comportamiento de estas estructuras bajo diferentes condiciones de carga y apoyo.

Por supuesto, puede formularse un problema de optimización que involucre la asignación de recursos. En este caso, se debe asignar los recursos disponibles de manera que se maximice el beneficio y se minimice el costo. Este problema puede ser formulado como un problema de programación lineal. En este estudio se analizará el comportamiento de estas estructuras bajo diferentes condiciones de carga y apoyo.

Hay que señalar que el problema de optimización de recursos es un problema de optimización que involucra objetivos múltiples y restricciones en conflicto. En este estudio se analizará el comportamiento de estas estructuras bajo diferentes condiciones de carga y apoyo.

BIBLIOGRAFIA

1. BARES, Richard. **Tablas para el cálculo de placas y vigas pared**. Barcelona, Editorial Gustavo Gili, S.A., 1981. 630 p.
2. **Código colombiano de construcciones sismo-resistentes**. Decreto 1400 de 1984. Primera edición. Bogotá D.E., Legis Editores S.A., 1984. 317 p.
3. EUROPEAN COMMITTEE FOR CONCRETE. **Information Bulletin No. 35**. Cement and Concrete Association, 1962. 180 p.
4. HANN, J. **Vigas continuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre terreno elástico**. Tercera edición. Barcelona, Editorial Gustavo Gili, S.A., 1982. 499 p.
5. JIMENEZ MONTOYA, P. **Hormigón Armado**. Tomo I Cuarta edición. Barcelona, Editorial Gustavo Gili, S.A., 1969. 631 p.
6. JOHANSEN, K.W. **Yield-Line Theory**. London, Published by the Cement and Concrete Association. 1962. 181 p.
7. KERPEL, K. Enrique. **Introducción al análisis plástico de estructuras de concreto reforzado**. Primera edición. Bogotá

- D.E., Universidad Nacional, 1981. 345 p.
8. KORDINA, Karl und NOTLING, Diedrich. **Tragfähigkeit durchstanzgefährdeter stahlbetonplatten** capacidad portante en las losas de concreto reforzado con riesgo de punzonamiento. Berlin, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (Comisión Alemana para el Concreto Reforzado). 1986. 176 p.
9. MARQUEZ, Jorge A. **Estructuras Laminadas I**. Bogotá, D.E. Universidad Nacional 72 p.
10. MASSONNET, Ch y SAVE M. **Cálculo plástico de las construcciones**. Tomo II - Estructuras espaciales. Barcelona, Montaner y Simón S.A. 1966. 470 p.
11. PARK R. and GAMBLE, W.L. **Reinforced concrete slabs** U.S.A. John Wiley & Sons. 1980. 618 p.
12. STIGLAT, K WIPPEL, H. **Placas** Primera edición. Madrid. Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento. 1968. 92 p.
13. WOOD R.H. **Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates**. First edition. London. Thames and Hudson. 1961. 344 p.