

Ciclos límites en minirobots neurocontrolados

Jesús Alberto Delgado*,

RESUMEN

Este artículo presenta el análisis de estabilidad de un pequeño robot controlado con una red neuronal multicapa; por simplicidad, el robot contiene un sensor de posición y un motor.

La función descriptiva de la red neuronal se utiliza para determinar los límites para los pesos de la red, con el fin de predecir ciclos límite y evitar oscilaciones del minirobot cuando se aproxima a obstáculos.

INTRODUCCIÓN

Las redes neuronales se han aplicado exitosamente como controladores en varias configuraciones [1]; sin embargo, hay pocos estudios de estabilidad cuando estas redes se utilizan como parte de un lazo cerrado [2].

Una herramienta importante para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales en lazo cerrado se conoce como función descriptiva [4, 5]. La principal aplicación de este método es la predicción de ciclos límite (oscilaciones autosostenidas), lo cual no es deseable en sistemas de control.

En este trabajo se estudia la estabilidad de un lazo cerrado, con una planta y un neurocontrolador. La función descriptiva permite encontrar los límites de los parámetros de la red neuronal, a fin de lograr una respuesta estable o predecir ciclos límite.

I. FUNCIÓN DESCRIPTIVA Y CICLOS LÍMITE

Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A.x + b.u \\ y &= c.x \\ u &= \Phi(r - y) \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

$r \in \mathfrak{R}$: la entrada de referencia.

$u \in \mathfrak{R}$: la entrada a la planta.

$x \in \mathfrak{R}^n$: el vector de estado de la planta.

$y \in \mathfrak{R}$: la salida.

$\Phi(\cdot) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$: una función no lineal.

En otras palabras, el sistema no lineal (1) tiene dos partes: un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo (A, b, c) con función de transferencia

$$G(s) = c.(sI - A)^{-1}.b, \quad (2)$$

y un elemento no lineal $\Phi(\cdot)$ (véase figura 1).

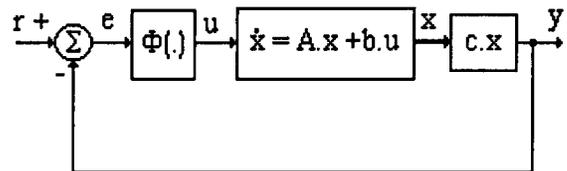


Figura 1. Sistema no lineal: planta lineal controlada con un elemento no lineal. Nótese que $u = \Phi(e)$.

El primer paso para determinar los ciclos límite consiste en reemplazar el elemento no lineal por una función descriptiva. Esta función se encuentra aplicando una señal senoidal $a.\text{sen } \omega t$ a la entrada del elemento no lineal y luego se calcula la ganancia equivalente $D(a)$ del elemento lineal cuya respuesta a la entrada $a.\text{sen } \omega t$ es $D(a).a.\text{sen } \omega t$.

Después de obtener la función descriptiva $D(a)$ del elemento no lineal, los ciclos límite se obtienen [4, 5] solucionando la ecuación

$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(a)} \quad (3)$$

Esta fórmula se resuelve gráficamente al dibujar el diagrama polar de $G(j\omega)$ para $\omega > 0$ y el lugar $-1/D(a)$ para $a \geq 0$. La intersección de estos lugares produce la solución de (3).

*. Ph.D, Profesor asociado, Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia

II. EL MINIROBOT Y SU MUNDO COMO LAZO CERRADO

Considere el minirobot de la figura 2. Este minirobot se mueve en una dimensión como se ilustra en la figura 3. Si el objetivo es mover el robot hasta que la distancia d sea igual a una referencia r , entonces el robot y su mundo se pueden modelar por el lazo cerrado de la figura 4.

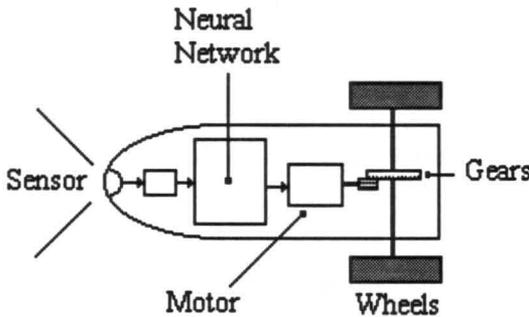


Figura 2. Minirobot con un sensor y un motor; hay una rueda frontal no mostrada en el dibujo. El controlador es una red neuronal multicapa.

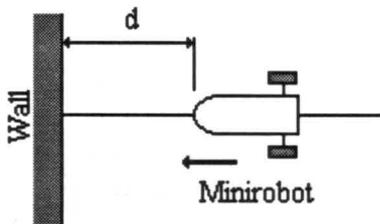


Figura 3. El minirobot se mueve en línea recta hacia la pared; el sensor calcula la distancia d .

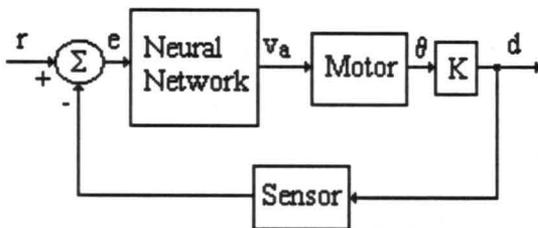


Figura 4. El minirobot y su mundo pueden considerarse un lazo cerrado. El robot se mueve hacia la pared hasta que $d = r$.

El sensor calcula la distancia d ; este valor se compara con la referencia r para producir un error e . Luego la red neuronal toma el error para calcular la entrada al motor $V_a = \Phi(e)$, el minirobot se mueve y el ciclo se repite.

La función de transferencia de un motor DC con excitación independiente es un sistema de tercer orden

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{k_m}{s \cdot [(J \cdot s + B) \cdot (L \cdot s + R) + k_m^2]} \quad (4)$$

Donde:

J : momento de inercia equivalente del rotor y la carga.

B : coeficiente de amortiguamiento equivalente del sistema mecánico.

k_m : constante de fuerza contraelectromotriz.

R : resistencia de armadura.

L : inductancia de armadura.

V_a : voltaje de armadura.

θ : salida (posición del eje).

Note que el lazo cerrado de la figura 4 es similar al lazo cerrado de la figura 1 considerando la ganancia del sensor como uno.

III. FUNCIÓN DESCRIPTIVA DE UNA RED NEURONAL MULTICAPA

Dado el sistema no lineal (1) con una red neuronal multicapa [3] como el elemento no lineal, entonces,

$$u = \sum_{k=1}^N q_k \cdot \tanh(p_k \cdot e) \quad (5)$$

Donde:

p_k y q_k : los pesos de la red neuronal.

N : el número de neuronas ocultas(véase figura 5).

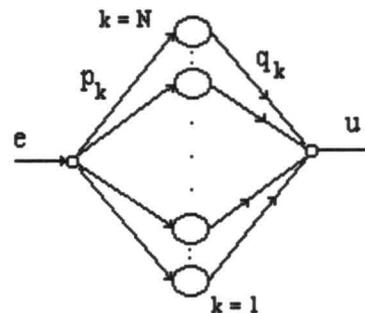


Figura 5. Red neuronal estática usada como $\Phi(\cdot)$ en el sistema (1). La estructura de la red es 1-N-1; la red no tiene pesos de umbral.

Remplazando la función $\tanh(\cdot)$ en (5) por los dos primeros términos de su expansión en serie de Taylor

$$u = \sum_{k=1}^N q_k \cdot \left\{ (p_k \cdot e) - \frac{1}{3} (p_k \cdot e)^3 \right\} \quad (6)$$

Esta aproximación, $\tanh(x) \cong x - x^3/3$, es válida para $x^2 < \pi^2/4$. Esto es, la expansión es válida para $(p_k \cdot e)^2 < \pi^2/4$.

Para obtener la función descriptiva de la red, e se reemplaza en (6) por $a \cdot \sin \omega t$. Esto produce,

$$u = \sum_{k=1}^N q_k \cdot \left\{ p_k - \frac{p_k^3 \cdot a^2}{3} \sin^2 \omega t \right\} \cdot a \cdot \sin \omega t$$

utilizando la identidad $\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2$ y considerando solo el primer armónico,

$$u = \sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k \cdot \left\{ 1 - \frac{p_k^2 \cdot a^2}{6} \right\} \cdot a \cdot \sin \omega t$$

Entonces se concluye que la red neuronal se puede reemplazar por un sistema lineal con ganancia equivalente,

$$D(a) = \sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k \cdot \left\{ 1 - \frac{p_k^2 \cdot a^2}{6} \right\} \quad (7)$$

Donde $(p \cdot a)^2 < \pi^2/4$ es el máximo valor para el argumento de cada función de activación. La función descriptiva es real porque la función de activación $\tan h$ es impar.

Los ciclos límite del sistema (1), con una red neuronal como el elemento no lineal, son la solución de (3) con la función descriptiva (7)

$$G(j\omega) = \frac{-1}{\sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k \cdot \left\{ 1 - \frac{p_k^2 \cdot a^2}{6} \right\}} \quad (8)$$

Suponga que,

$$G(j\omega) = -|G(j\omega)|$$

Reemplazando y despejando a de (8) se tiene,

$$a^2 = \frac{6 \cdot \left(\sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k - \frac{1}{|G(j\omega)|} \right)}{\sum_{k=1}^N p_k^3 \cdot q_k} \quad (9)$$

Hay un ciclo límite si los parámetros de la red satisfacen la condición:

$$\sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k > \frac{1}{|G(j\omega)|} \quad (10)$$

La amplitud a del ciclo límite se puede predecir con este método, cuando

$$0 < \frac{6 \cdot \left(\sum_{k=1}^N p_k \cdot q_k - \frac{1}{|G(j\omega)|} \right)}{\sum_{k=1}^N p_k^3 \cdot q_k} < \frac{\pi^2}{4 \cdot p_m} \quad (11)$$

Donde $p_m = \max\{p_k^2\}$.

IV. SIMULACIONES

Considere un motor DC con la siguiente representación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 2 \cdot x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (12)$$

La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2 \cdot s^2 + s} \quad (13)$$

El trazo polar se muestra en la figura 6.

La función descriptiva de la red (7) se encuentra sobre el eje real y el corte con $G(j\omega)$ se puede presentar en $G(j\omega) = -0,5$; la frecuencia correspondiente es $\omega = 1/r/s$, esto equivale a una oscilación de período $T = 6,3$ s.

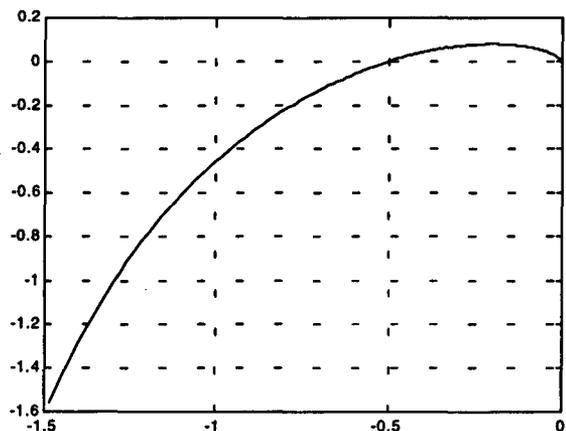


Figura 6. Trazo polar de la función de transferencia (13); note que la parte imaginaria es cero, $\Im m[G(j\omega)] = 0$, cuando la parte real es $\Re e[G(j\omega)] = -0,5$.

Ahora vamos a estudiar algunos casos correspondientes a distintos parámetros de la red. En todos los casos, $N = 3$, la referencia $r = 0$ y la condición inicial $y(0) = 0,2$.

A. CASO 1

Los parámetros de la red son :

$$p_1 = 3, p_2 = 0, p_3 = 0, q_1 = 1, q_2 = 0, q_3 = 0.$$

Remplazando estos parámetros y $|G(j\omega)| = 0,5$, la red cumple las condiciones (10) y (11); por tanto, hay un ciclo límite. Resolviendo (9), obtenemos la amplitud $a = 0,47$. En la figura 7 se muestra el ciclo límite, y la figura 8 presenta la salida $y(t)$. Note que la amplitud de la oscilación coincide con el resultado pronosticado y el período es 6,3 s.

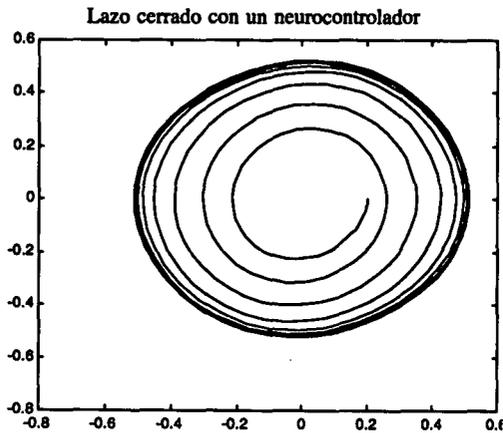


Figura 7. Caso 1 : ciclo límite, $a = 0,47$.

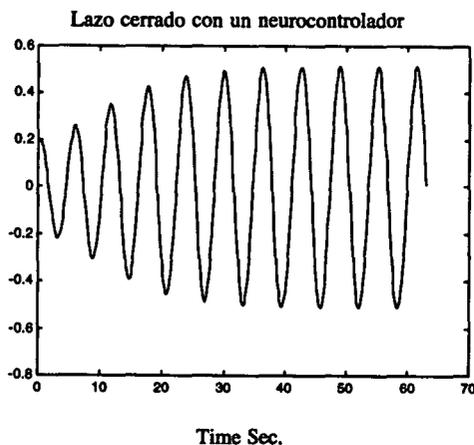


Figura 8. Caso 1 : salida del sistema $y(t)$. El período de la oscilación es $T = 6,3$ s y la amplitud $a = 0,47$.

B. CASO 2

Los parámetros de la red son :

$$p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0, q_1 = 1,5, q_2 = 0, q_3 = 0.$$

La red no cumple la condición (10); por tanto, no hay ciclo límite (véase figura 9).

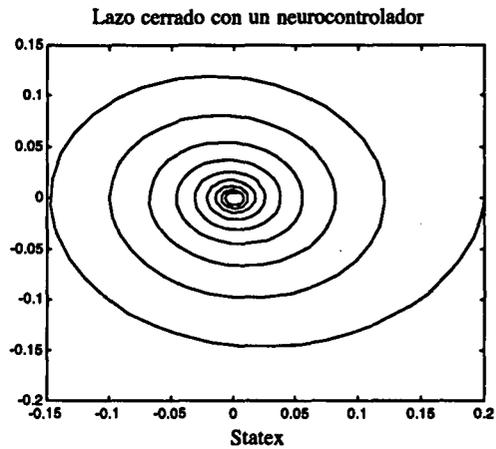


Figura 9. Caso 2 : foco estable. No hay ciclo límite, la red no cumple la condición (10).

C. CASO 3

Los parámetros de la red son :

$$p_1 = 0,8, p_2 = 6, p_3 = 2, q_1 = 0,5, q_2 = -0,1, q_3 = 1,5.$$

La red cumple la condición (10) pero no cumple la condición (11). Esto significa que hay un ciclo límite pero el método propuesto no puede predecir la amplitud a de la oscilación. La figura 10 muestra el ciclo límite.

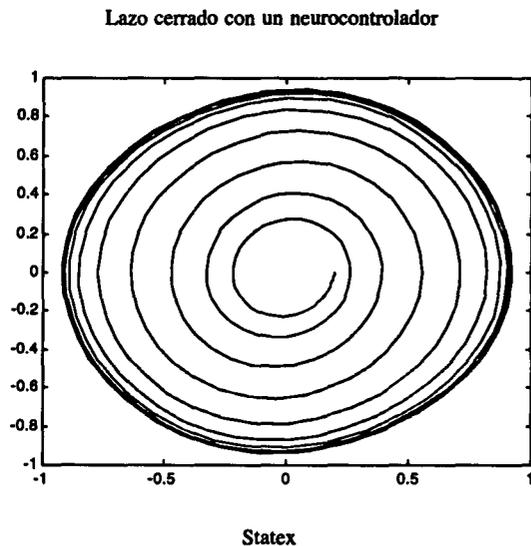


Figura 10. Caso 3: ciclo límite. La condición (11) no se cumple; por tanto, el método propuesto no puede predecir la amplitud de la oscilación

CONCLUSIONES

- Se propuso una funci3n descriptiva para una red neuronal multicapa 1-N-1 con funci3n de activaci3n tan h y sin pesos de umbral. La funci3n de activaci3n se remplaz3 por los dos primeros términos de su serie de Taylor; esta aproximaci3n crea la condici3n (11).
- La funci3n descriptiva de la red se utiliz3 para predecir ciclos límite en sistemas de control tipo (1) con la red como controlador. Hay un ciclo límite si la condici3n (10) se cumple y la amplitud de la oscilaci3n se calcula con (9), si (11) se cumple. Como consecuencia, el minirobot de la figura 3 puede presentar oscilaciones en su movimiento cuando est  cerca de un obstáculo (el robot parece dudar si se acerca o no a la pared).
- Los cálculos te3ricos se ilustraron con tres ejemplos para distintos parámetros de la red; es claro que las condiciones (10) y (11) determinan la existencia de un ciclo límite.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al CINDEC de la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo a su investigaci3n.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 .AGARWAL, M. "A systematic classification of neural-network-based control". *IEEE Control Systems Magazine*, 17, 75-93, 1997
- 2 .DELGADO, A. "Input/output linearization of control affine systems using neural networks". *PhD Thesis*. Cybernetics Department, Reading University, 1996.
- 3 ._____ *Inteligencia artificial y minirobots*. ECOE Ediciones, Bogotá. 1998
- 4 .KALIL, H.K. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- 5 .SLOTINE J.E. and LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991