

# Análisis de Sistemas de Potencia con Matlab

Estrella Parra, Hernando Díaz, Andrei Romero, Aldemar Guerra.<sup>1</sup>

## RESUMEN

En este trabajo se presenta una caja de herramientas para el análisis de sistemas de potencia utilizando MATLAB. Las herramientas desarrolladas permiten realizar análisis de flujo de carga, de cortocircuito, tanto balanceados como desbalanceados y simular el comportamiento dinámico de un sistema de potencia durante una perturbación grande. Para esta última aplicación se consideran modelos simples o complejos para las máquinas sincrónicas, lo cual permite analizar sistemas reales. Además, se describen algunas técnicas para adecuar los métodos de solución a las características del MATLAB.

## INTRODUCCIÓN

LOS sistemas de potencia eléctricos se caracterizan por su gran tamaño y llegan a ser algunos de los sistemas de mayor escala construidos por el ser humano. Un sistema relativamente pequeño, como el caso colombiano, puede estar constituido por unos 500 nodos, incluyendo aproximadamente 50 generadores. En ese caso, se requieren unas 1.000 ecuaciones algebraicas para modelar el comportamiento de estado estacionario y unas 200 ecuaciones diferenciales para analizar su comportamiento dinámico. Un sistema de potencia grande puede tener más de 10.000 nodos y hasta 1.000 generadores.

Además de su dimensión, hay otra característica básica que comparten todos los sistemas de potencia: existen relativamente pocas interconexiones entre los diferentes elementos del sistema.

Por esta razón, las interacciones entre los diversos elementos del sistema tienden a producirse únicamente a través del sistema de transmisión. La descripción matemática de las diversas interacciones presenta una estructura especial donde los cambios en un punto afectan directamente sólo a los puntos vecinos. Esta interacción local, muy frecuente en modelos físicos de diversos tipos, produce *ecuaciones dispersas*; es decir, ecuaciones donde una variable se ve afectada por unas

pocas de las demás variables. Cuando las ecuaciones se escriben en forma matricial, la mayor parte de los términos de las matrices son cero. A estas matrices se les llaman *matrices dispersas*.

Para el análisis de los sistemas de potencia se requieren herramientas computacionales eficientes, capaces de manejar problemas de gran tamaño en forma eficiente, tanto en términos de almacenamiento de matrices dispersas de gran escala, como de los procesos de cálculo. El desarrollo de este tipo de aplicaciones requiere la modificación de los métodos de cálculo para adaptarlos a las características de la programación en MATLAB.

El paquete fue desarrollado para la enseñanza del análisis de sistemas de potencia, por lo cual en ocasiones se sacrificó la eficiencia en pro de la claridad conceptual. Aún así, se obtuvo un programa muy eficiente, el cual ha sido usado para el análisis de sistemas reales de mediana escala.

Una de las principales cualidades del MATLAB es su velocidad para realizar cálculos vectoriales y matriciales. Esto significa que una operación efectuada sobre un vector es mucho más eficiente que si se realiza por separado sobre cada una de sus componentes. Por esta razón es necesario *vectorizar* las operaciones, de manera que se ejecuten directamente en forma vectorial.

Por las razones anteriores, los objetos básicos con los cuales se trabaja este programa son vectores reales o complejos; por ejemplo, los voltajes nodales se representan por medio de un vector.

## I. ANÁLISIS DEL ESTADO ESTACIONARIO

### A. FLUJO DE CARGA

El flujo de carga es la herramienta básica para determinar las condiciones de operación en estado estacionario de un sistema de potencia a partir del conocimiento de los parámetros eléctricos de los diferentes elementos constitutivos del sistema.

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Eléctrica Universidad Nacional de Colombia.

Teniendo en cuenta que tanto la red de transmisión como las cargas se consideran trifásicas balanceadas, se utiliza únicamente el modelo de secuencia positiva de la red [5].

El punto de operación de un sistema eléctrico queda definido cuando se calculan las tensiones nodales (magnitud y ángulo) en todos los nodos; a partir de estos resultados puede obtenerse otro tipo de información sobre las condiciones de operación; por ejemplo:

- ♦ Los flujos de potencia activa y reactiva por los diferentes elementos de la red de transmisión.
- ♦ Los valores de potencia activa y reactiva generada en el sistema.
- ♦ Las pérdidas de transmisión tanto por cada elemento como para el sistema total.

Las ecuaciones de flujo de carga representan un balance de potencia en cada uno de los nodos:

$$S_{N_i} = V_i I_i^*$$

Donde:

$S_{N_i}$ : potencia neta compleja.

$V_i$ : tensión nodal (compleja).

$I_i$ : corriente neta inyectada al nodo  $i$ .

Si se usan las ecuaciones de nodos para la expresión anterior, es posible hallar unas ecuaciones no lineales en los voltajes:

$$S_{N_i} = V_i \sum_{j=1}^n Y_{ij}^* V_j^*$$

Tradicionalmente, se hace la separación de los términos de potencia activa y reactiva, por las restricciones que se tienen en el manejo numérico de valores complejos, así:

$$P_{N_i} = P_{G_i} - P_{D_i} = \sum_{k=1}^n E_i E_k (G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)) \quad (1)$$

$$Q_{N_i} = Q_{G_i} - Q_{D_i} = \sum_{k=1}^n E_i E_k (G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k))$$

Donde:

$P_{N_i}$  y  $Q_{N_i}$ : potencias activa y reactiva inyectadas.

$P_{G_i}$  y  $Q_{G_i}$ : potencias generadas

$P_{D_i}$  y  $Q_{D_i}$ : potencias demandadas en el nodo  $i$ , respectivamente  $E_i, \theta_i$ ; la magnitud y ángulo de la tensión del nodo  $i$ .

Además,  $Y_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$  es el elemento  $i, k$  de la matriz de admitancia.

El problema consiste en encontrar aquellos valores de tensión,  $V_i$  o sus componentes  $E_i$  y  $\theta_i$ , que satisfacen la ecuación (1)

Como es bien conocido, las ecuaciones conforman un sistema no lineal, para cuya solución se deben usar métodos numéricos; por ejemplo, el de Newton- Raphson [2]. En este trabajo se utilizó el método desacoplado rápido [6] el cual utiliza la dependencia, por un lado entre la potencia activa y el ángulo de tensión nodal,  $P \Leftrightarrow \theta$ ; y por otro, entre la potencia reactiva y la magnitud de la tensión nodal,  $Q \Leftrightarrow E$ . Usando lo anterior y otras simplificaciones físicamente justificadas, este algoritmo reduce el tiempo y el número de iteraciones necesarias para la convergencia de la solución de las ecuaciones sin pérdidas de exactitud en los resultados. El modelo básico está dado por las ecuaciones [10]:

$$[\Delta P] = - [B'] [\Delta \theta]$$

$$[\Delta Q] = - [B''] [\Delta E]$$

Los términos de estas ecuaciones son bien conocidos; las matrices  $B'$  y  $B''$  se obtienen a partir de la matriz de admitancia haciendo varios tipos de simplificaciones como se discute a continuación. Estas simplificaciones afectan la convergencia, especialmente en sistemas en los cuales la relación resistencia/reactancia ( $R/X$ ) es grande.

Con el fin de obtener un programa robusto que dé soluciones aun en casos mal condicionados, se trató de seleccionar la mejor alternativa de representación de las resistencias en la formación de matrices  $B'$  y  $B''$ . Se consideraron cuatro posibles variantes con el objetivo de demostrar cuál opción registraba el mayor beneficio para los casos normales y casos donde la relación  $R/X$  fuera grande [6]. Las alternativas consideradas son:

**BB:** Las resistencias se incluyen en la formación de ambas matrices  $B'$  y  $B''$

**XB:** las resistencias se ignoran en la formación de  $B'$

**BX:** las resistencias sólo se ignoran en la formación de  $B''$ .

**XX:** las resistencias se ignoran en ambas matrices  $B'$  y  $B''$ .

Al evaluar todas estas alternativas con el sistema IEEE de 14 nodos con una tolerancia de 0,01 tanto para  $\Delta P$  como para  $\Delta Q$ , se obtuvieron los resultados que aparecen en el cuadro 1.

CUADRO 1. RESULTADOS OBTENIDOS.

Factor de Escala para la resistencia	Número de iteraciones			
	BB	XB	BX	XX
0,5	5-5	4-3	4-3	4-3
1,0	20-20	4-4	4-3	7-6
1,5	nc	7-5	4-3	11-10
2,0		9-6	5-4	16-15
2,5		13-9	5-4	21-22
3,0		18-11	5-4	nc
4,0		nc	7-6	
5,0			nc	

nc: no converge o convergencia lenta (más de 60 iteraciones).

Se hicieron pruebas adicionales a las dos mejores alternativas, *XB* y *BX*, en las mismas condiciones, pero ahora escalizando la reactancia de los elementos de la red. Los resultados que se muestran en el cuadro 2, dan como mejor alternativa a la opción *BX*.

CUADRO 2. RESULTADOS OBTENIDOS.

Factor de escala para la reactancia	Número de iteraciones	
	<i>XB</i>	<i>BX</i>
1.000	4-4	5-4
0.500	8-7	7-6
0.250	20-19	10-9
0.200	28-27	11-10
0.166	nc	11-11
0.125		13-12
0.111		14-13
0.100		13-13
0.083		nc

nc: no converge o convergencia lenta (más de 60 iteraciones)

Además, en el presente trabajo se implementaron diversas opciones para mejorar el proceso de solución, sugeridas por varios autores [5,6]. Algunas de ellas son:

- ♦ Omitir en  $B'$  la representación de los elementos del sistema de potencia que afectan el flujo de MVAR, como son reactancias en derivación y el cambio en los *taps* de los transformadores de regulación de tensión.
- ♦ Omitir en  $B''$  el efecto de los dispositivos que causan corrimientos de fase, como los transformadores con relación de transformación compleja.
- ♦ Ignorar únicamente las resistencias en la formación de  $B''$ .
- ♦ Incluir los reactores con el valor de su admitancia doblado y el efecto de las derivaciones de los transformadores de regulación de tensión en la formación de  $B''$ .
- ♦ Resolver, dentro de la misma iteración, separadamente la componente  $P \rightleftharpoons \theta$  y  $Q \rightleftharpoons E$ , utilizando la solución de una como dato de entrada de la otra.

Usando los resultados de las pruebas anteriores se obtuvo una herramienta eficiente y muy confiable para la solución del problema de flujo de carga. La versión final le permite al usuario la modificación de los diferentes términos, de acuerdo a sus necesidades.

## B. CÁLCULO DE PÉRDIDAS

Con el fin de ilustrar las facilidades que brinda MATLAB para los cálculos en sistemas de potencia, se va a presentar la implementación del cálculo de pérdidas en las líneas de transmisión. Este cálculo se debe realizar, una vez hallada la solución del flujo de carga. Para cada una de las líneas con el

fin de determinar su estado de operación. El segmento de código mostrado ilustra el uso del direccionamiento indirecto y las operaciones tipo *array* (elemento por elemento.\*) para calcular las corrientes y las pérdidas en las líneas.

Las líneas están descritas por dos vectores que indican su nodo inicial  $ni$  y el nodo final  $nf$ , además de su impedancia  $z$  y su admitancia  $y$ . Se utiliza la solución del flujo de carga que provee los voltajes nodales en forma compleja  $V$ .

% Cálculo de las corrientes en las líneas

$CorrienteL = (v(ni) - v(nf)).*y;$

% Cálculo de las pérdidas en las líneas

$PperdL = (conj(CorrienteL).*(CorrienteL)).*real(z);$

% suma las pérdidas de las líneas

$PtotalesL = sum(PperdL);$

Nótese que el cálculo de las pérdidas para todas las líneas se realiza en una sola instrucción. Este cálculo, implementado en C o en Pascal, podría requerir casi una página de código.

## II. ANÁLISIS DE CORTOCIRCUITO

El estudio de cortocircuito tiene como finalidad determinar las corrientes y tensiones de los diferentes nodos del sistema cuando ocurre una falla en un punto del sistema.

Como en las condiciones de falla se pierden las características balanceadas del sistema, es necesario que su representación considere condiciones de desbalance. Por esta razón se recurre a las componentes simétricas [1,8], una de las operaciones más frecuentes es esta transformación.

Por ejemplo, para convertir los valores de las tensiones de todos los nodos del sistema, de secuencia ABC a secuencia 012 y viceversa, basta ejecutar las siguientes instrucciones:

```
for n=1:nodos
    e012(:,n)=[C1*eabc(:,n)]
end
for n=1:nodos
    eabc(:,n)=[C*e012(:,n)]
end
```

Donde:

$e012$ : matriz en donde cada columna contiene las tensiones en secuencia 012 de cada nodo.

$eabc$ : matriz en donde cada columna contiene las tensiones en secuencia ABC de cada nodo.

$C$ : matriz de transformación de componentes de fase ABC a componentes de secuencia 012

$C1$ : es la inversa de la matriz  $C$

## CÁLCULO DE FALLA

Para un análisis corto, los pasos fundamentales corresponden a:

- ◆ Determinar las matrices de impedancia de secuencia cero y positiva. Este proceso corresponde a la solución de un sistema de ecuaciones de la forma  $YV=I$ , donde la matriz  $Y$  es la matriz de admitancia, la cual es dispersa; por tanto, pueden explotarse adecuadamente sus características con una herramienta como el MATLAB, disminuyendo sustancialmente el tiempo de cálculo y la memoria requerida para este proceso.
- ◆ Calcular la corriente de cortocircuito en el punto de falla. Este cálculo requiere la impedancia Thevenin equivalente del sistema visto desde el nodo falla; este valor se obtiene extrayéndolo de las diagonales de las matrices de impedancia. El MATLAB posee algoritmos muy eficientes para seleccionar términos de una matriz; por lo tanto, los recursos necesarios para el cálculo de la corriente de falla se simplifican considerablemente.
- ◆ Hallar las tensiones nodales después de la falla. Este paso corresponde a una sola ecuación ( $V^F = V^0 + ZI^F$ ) que es una relación vectorial y, por tanto, muy apropiada, para resolverse con la ayuda del MATLAB. Al igual que en el ítem anterior, para este proceso se necesitan algunos términos de las matrices de impedancia de secuencia cero y positiva (aquellos donde existe conexión física entre los nodos del sistema); por eso se pueden conservar las características de dispersidad y no requiere del cálculo de las matrices completas.
- ◆ Calcular las corrientes de falla por los elementos. Este cálculo se realiza a partir de las tensiones nodales de la misma forma que el descrito para el cálculo de carga.

Esta técnica se implementó directamente en MATLAB con resultados muy satisfactorios.

## III. ESTABILIDAD TRANSITORIA

Durante la operación de los sistemas de potencia se presentan perturbaciones frecuentes, debido a cortocircuitos en los elementos del sistema, a variaciones rápidas de carga o de generación, o a la conexión y desconexión de líneas de transmisión.

Estas perturbaciones originan un proceso dinámico caracterizado por oscilaciones mecánicas de los rotores de las máquinas rotativas. Estas oscilaciones originan variaciones rápidas en la potencia activa y reactiva y en el voltaje de los diferentes nodos. Este proceso dinámico puede ser estable o

inestable. En el caso inestable, el sistema, o partes de él, pueden colapsar con graves consecuencias para los usuarios.

Para asegurar que el sistema sea capaz de sobrevivir a las perturbaciones, es necesario analizar su dinámica por medio de una simulación. Para ello, estudiamos su comportamiento dinámico mediante la solución numérica de un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(x(t), y(t)) \quad (2)$$

la cual incluye las ecuaciones diferenciales que describen las máquinas sincrónicas. El vector  $x$  incluye todos los ángulos y velocidades angulares y tensiones transitorias o enlaces de flujo; el vector  $y$  comprende todas las otras variables, como voltajes, corrientes, potencias, etcétera. El sistema anterior es lineal, a menos que se consideren saturaciones.

Las variables  $x$  y  $y$  no son independientes, pues deben satisfacer varias restricciones, tales como leyes de Kirchoff y transformación de coordenadas de Park. Estas restricciones están descritas por ecuaciones algebraicas:

$$0 = g(x(t), y(t)) \quad (3)$$

Para la simulación es necesario resolver los dos sistemas de ecuaciones simultáneamente. Para ello se usó un esquema de solución particionada basado en la integración implícita con la regla trapezoidal. En este método las ecuaciones diferenciales se convierten en ecuaciones algebraicas usando la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(x(\tau), y(\tau)) d\tau \\ &\cong x(t) + \frac{\Delta t}{2} [f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) + f(x(t), y(t))] \end{aligned}$$

La última ecuación, junto con (3) constituyen un sistema de ecuaciones algebraicas que permite calcular  $x(t + \Delta t)$  e  $y(t + \Delta t)$  usando métodos iterativos.

Para la solución, es conveniente separar las ecuaciones algebraicas (3) en dos grupos: Ecuaciones de nodos:

$$I - YV = 0 \quad (4)$$

Que describen el circuito y las ecuaciones de transformación no lineales que relacionan las variables de la red, referidas a un sistema moviéndose a velocidad sincrónica, con las variables

internas de cada máquina, referidas a un sistema fijo en el rotor de cada máquina y, por tanto, moviéndose a la velocidad correspondiente a ese rotor.

De esta forma, se tienen dos sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, pues todas las no lineales aparecen en las ecuaciones de transformación. Esta estructura sugiere el uso del siguiente método de solución iterativa, equivalente a un Gauss-Seidel por bloques:

Para cada instante de tiempo  $t$ , se suponen conocidos  $x(t)$  e  $y(t)$  y se deben hallar  $x(t+\Delta t)$  e  $y(t+\Delta t)$  mediante el algoritmo siguiente:

1. Suponer valores tentativos de  $y(t+\Delta t)$ .
2. Repetir mientras las variables cambien de una iteración a la otra.

- a. Con los valores actuales de  $y(t+\Delta t)$  resolver la ecuación

$$x(t+\Delta t) - x(t) - \frac{\Delta t}{2} f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - \frac{\Delta t}{2} f(x(t), y(t)) = 0 \quad (5)$$

- b. Usando ecuación de transformación, calcular corrientes nodales  $I(t+\Delta t)$

- c. Resolver ecuaciones de la red, para hallar voltajes nodales  $V(t+\Delta t)$ .

- d. Calcular potencias generadas en  $t + \Delta t$  usando ecuación de transformación inversa. Esto produce un vector *mejorado*  $y(t+\Delta t)$ .

3. Avanzar en el tiempo  $t \rightarrow t + \Delta t$ . Volver a 1.

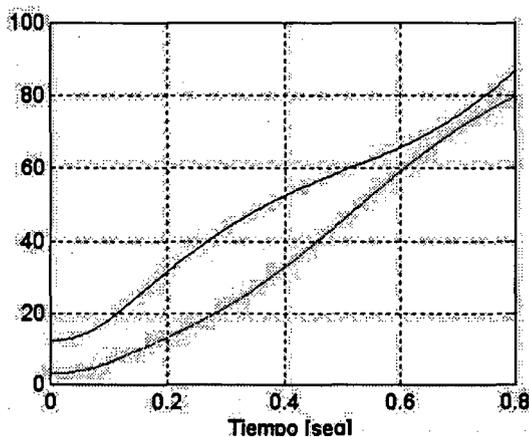


Figura 1. Ángulos de los generadores

Esta técnica de solución se escogió porque aprovecha al máximo las características de MATLAB. En cada instante de tiempo se realiza un procedimiento iterativo que busca reducir el llamado *error de interface* debido a la solución simultánea

de ecuaciones algebraicas y diferenciales. El uso de integración implícita empleando la regla trapezoidal garantiza la estabilidad numérica de la solución [9]. Por otra parte, durante la solución solamente se requiere la solución repetida de sistemas de ecuaciones lineales de dimensión pequeña para las máquinas y un sistema disperso de gran dimensión para las ecuaciones de la red [8]. Estas operaciones son muy eficientes en MATLAB (por ejemplo, la solución de las ecuaciones de la red [8] sólo requiere una instrucción:  $V=Y\backslash I$ ;) La única operación adicional es la transformación de ejes de referencia, la cual también se puede vectorizar para su implementación.

Las figuras 1 y 2 muestran los resultados de una simulación para un sistema simple.

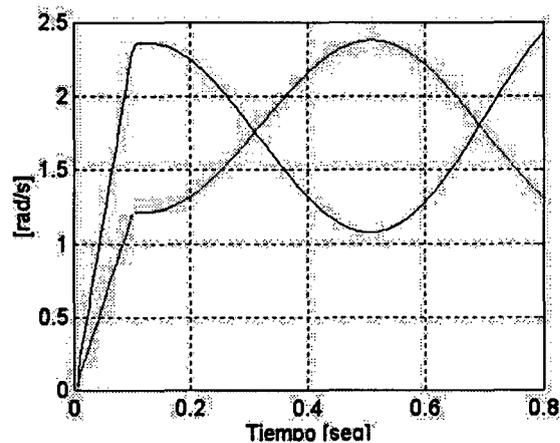


Figura 2. Curvas de variación de la velocidad.

## CONCLUSIONES

Se desarrolló una caja de herramientas MATLAB para el análisis de sistemas de potencia. El paquete desarrollado utiliza en forma intensa los recursos del programa, aprovechando especialmente los cálculos vectoriales y las matrices con la estructura dispersa, incluidas en la versión 4.2. También se utilizaron las facilidades gráficas del *software*.

Se pudo comprobar la versatilidad del programa para el desarrollo de aplicaciones complejas como ésta. El tiempo total de desarrollo del paquete es una fracción del que se requiere cuando se implementa en lenguajes como C o Pascal. Además, proporciona una mayor claridad conceptual acerca de los algoritmos y de su interpretación física. Esta característica es muy importante en aplicaciones como ésta, destinada de manera especial a la enseñanza de los conceptos de análisis de sistemas de potencia.

Durante el desarrollo del algoritmo de flujo de carga se probaron varias alternativas para la implementación del flujo desacoplado rápido. Se obtuvieron resultados muy interesantes

para la aplicación de dicho método en el caso de sistemas con relación R/X alta. Esta investigación fue realizada en un tiempo muy breve, aprovechando las facilidades de MATLAB.

Hacia el futuro, se continúa el desarrollo de este paquete mediante el desarrollo de la interfase de usuario más simple, un flujo óptimo de carga y el estudio de métodos no convencionales para la solución de ecuaciones no lineales, incluyendo gradientes preconjugados y métodos basados en subespacios de Krylov.

#### RECONOCIMIENTOS

Parte del trabajo descrito en el presente artículo fue desarrollado durante el proyecto de grado Simulador de Sistemas de potencia usando MATLAB, adelantado por los últimos dos autores.

#### BIBLIOGRAFÍA

1. ANDERSON, P.M., *Analysis of Faulted Power System*. The Iowa State University Press. Iowa. 1973
2. BARÓN, A., FLÓREZ, L. *Introducción al análisis de sistemas de potencia*. Vol 1,2,3. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
3. BYERLY, R.T., KIMBARK, E. *Stability of Large Electric Power Systems*. IEEE Press. N.Y. 1974.
4. ELGERD, O. *Electric Energy Systems Theory: An Introduction*, McGraw- Hill. N.Y., 1971
5. PAI, MA *Computer Techniques in Power System Analysis*. McGraw - Hill. Nueva Delhi, 1979.
6. ROBERT, A., AMERONGEN, Van. "A general purpose version of the fast decoupled loadflow". *IEEE Trans. On power systems*. Vol. 4, pp. 760-770, may 1989
7. SAAVEDRA, O.R., GARCÍA, A., MONTICELLI, A. "The representation of shunt elements in fast decoupled power flows". *IEEE Trans. On power Systems*. Vol. 9, pp. 1434-1440, August, 1994.
8. STAGG, G.W., ELABIAD, A.H. *Computer Methods in Power Systems Analysis*. McGraw - Hill. New York, 1968.
9. STOTT, B. "Power systems dynamic response calculations". *Proceeding of the IEEE*. Vol 67, No. 2, February 1979, pp. 219 - 240.
10. STOOT B., ALSAC, O. "Fast decoupled load flow". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. Vol. PAS - 93, pp. 859 - 869, 1974.