ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EQUIVALENTES

Ing. Félix Hernández Rodríguez.
Profesor Asistente.
Departamento de Ingeniería Civil.
Universidad Nacional.

RESUMEN

En este artículo se destaca la importancia de la utilización de esfuerzos y deformaciones equivalentes en el análisis del comportamiento mecánico de los sólidos, con un enfoque centrado en la mecánica de suelos. Solamente se tratarán los aspectos básicos, desde una perspectiva general, sin entrar a detallar la utilización de esos esfuerzos y deformaciones en la solución de problemas particulares de ingeniería. Se resalta la conveniencia de trabajar con unos invariantes, íntimamente relacionados con los cambios volumétricos y distorsiónales del sólido, en lugar de hacerlo con los tensores completos de esfuerzos y de deformaciones.

INTRODUCCIÓN

En mecánica, el tensor de esfuerzos tiene seis esfuerzos diferentes y el tensor de deformaciones, seis deformaciones diferentes.

Cuando se necesitan analizar los procesos de carga y de deformación, se requeriría controlar esas doce variables en forma permanente. Eso parece una tarea bastante complicada. Con el objetivo de simplificar los análisis, se recurre a unos esfuerzos y a unas deformaciones equivalentes : dos esfuerzos equivalentes y dos deformaciones equivalentes. Esos esfuerzos y deformadores deben representar adecuadamente al conjunto total de esfuerzos y de deformaciones y, además, deben servir para analizar integralmente el comportamiento mecánico de los sólidos.

Debe agregarse que esos esfuerzos y deformaciones equivalentes deben, obligatoriamente, ser invariantes, pues no tendría sentido analizar los procesos de carga y de deformación con magnitudes variables. En este escrito se mostrará la utilidad de esos esfuerzos y deformaciones equivalentes en el caso de sólidos isotrópicos, y, más específicamente, en el caso de suelos isotrópicos. En este tipo de materiales, las direcciones de los esfuerzos principales coinciden con las de las deformaciones principales.

Para que esos invariantes tengan un sentido físico tangible deben referirse a la condición hidrostática y a la desviatórica, en el caso de los esfuerzos, y a los cambios volumétricos y distorsiónales en el caso de las deformaciones.

I. ESFUERZOS EQUIVALENTES

Los esfuerzos equivalentes que se utilizan en mecánica están relacionados con los esfuerzos que actúan sobre el plano octaédrico. Los esfuerzos octaédricos son :

Esfuerzo normal octaédrico o esfuerzo hidrostático :

$$\sigma_{oct} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \div 3 \qquad (1)$$

O en términos de esfuerzos principales

$$\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \div 3 \qquad (2)$$

Esfuerzo cortante octaédrico :

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]^{1/2} \qquad (3)$$

O en términos de esfuerzos principales:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2} \qquad (4)$$

Los esfuerzos equivalentes se definen así :

· Esfuerzo normal equivalente (o esfuerzo hidrostático):

$$p = \sigma_{oct} \qquad (5)$$

$$\text{O} \quad p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3 \qquad (6)$$

$$\text{O} \quad p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \div 3 \qquad (7)$$

· Esfuerzo cortante equivalente:

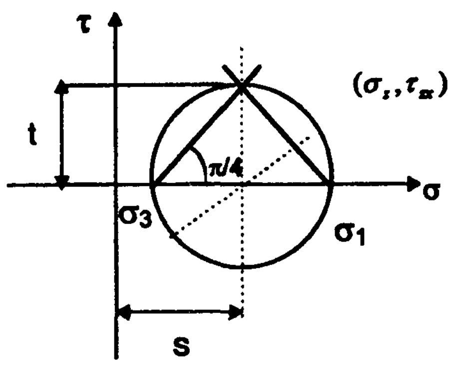
$$q = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct} \qquad (8)$$

$$\text{O} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right]^{1/2} \qquad (9)$$

$$\text{O} \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2} \qquad (10)$$

En determinadas condiciones de esfuerzos y de deformaciones relativamente sencillas, como es el caso de condiciones de esfuerzo plano, o de deformación plana, o de compresión cilíndrica, casos en que el estado de esfuerzos se puede representar mediante el círculo de Mohr, suelen utilizarse como esfuerzos equivalentes los que actúan sobre un plano cuya normal forma $\pi \div 4$ radianes, tanto con el eje principal mayor como con el menor. De acuerdo con la figura 1, esos esfuerzos equivalentes son:
(ver Figura 1)

$$S = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{2} \qquad (11)$$



$$\text{O } S = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$$

$$t = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z-\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}$$

$$t = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \qquad (12)$$

Figura 1. Esfuerzos equivalentes en condiciones planas de deformaciones.

Debe notarse que t es el esfuerzo cortante máximo y que, en condiciones de esfuerzo plano ($\sigma_2 = 0$), S es el mismo esfuerzo hidrostático.

II. DEFORMACIONES EQUIVALENTES

Las deformaciones equivalentes que se utilizan, en forma similar a los esfuerzos, están relacionados con las deformaciones octaédricas; estas últimas están dadas por :

Deformación normal octaédrica:

$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \qquad (13)$$

$$ó\ \varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \qquad (14)$$

Deformación cortante equivalente:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]^{1/2} \qquad (15)$$

$$\text{O}\ \gamma_{oct} = \frac{2}{3}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2\right]^{1/2} \qquad (16)$$

Las deformaciones equivalentes se definen, entonces, así :

- Deformación normal equivalente, o deformación volumétrica :

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon_{oct} \qquad (17)$$

$$\text{O}\quad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (18)$$

$$\text{O}\quad \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad (19)$$

- Deformación cortante equivalente:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{oct} \qquad (20)$$

$$\text{o}\ \varepsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2\right)\right]^{1/2} \qquad (21)$$

$$\text{o}\quad \varepsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2\right]^{1/2} \qquad (22)$$

En condiciones planas de deformación, $\varepsilon_2 = 0$, suelen utilizarse como deformaciones equivalentes las que se ilustran en la figura 2.

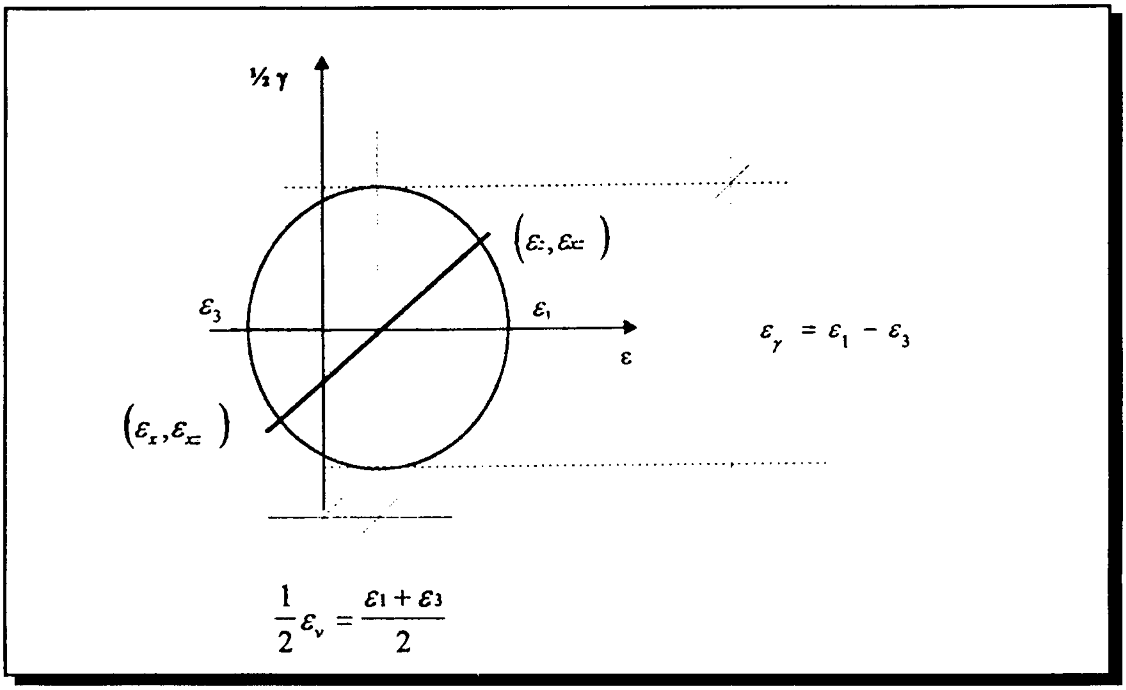


Figura 2. Deformaciones equivalentes en condición plana de deformaciones.

- Deformación normal equivalente

$$\varepsilon_\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \qquad (23)$$

$$\text{O}\quad \varepsilon_\varepsilon = \varepsilon_z + \varepsilon_x \qquad (24)$$

• Deformación cortante equivalente, o deformación cortante máxima:

$$\varepsilon_\gamma = 2\left[\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xz}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$\text{O} \quad \varepsilon_\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad (26)$$

Debe notarse que en las condiciones anotadas, planas de deformación, la deformación normal equivalente es la misma deformación volumétrica.

En otras condiciones de deformaciones en que se pueda dibujar el círculo de Mohr, como es el caso de esfuerzo plano o de compresión cilíndrica, suelen utilizarse estas mismas deformaciones equivalentes. Debe verse, sin embargo, que en esas otras circunstancias la deformación normal equivalente ya no es la deformación volumétrica.

III. ALGUNOS USOS DE LOS ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EQUIVALENTES

Para simplificar el proceso de los cálculos que deben realizarse en muchas determinaciones sobre el comportamiento mecánico de los sólidos, se recurre a estos esfuerzos y deformaciones equivalentes. En lo que sigue, van a presentarse ejemplos de su utilización en lo que tiene que ver con la representación de los esfuerzos, con el estudio de la condición de fluencia, con la determinación de los asentamientos mediante la teoría elástica y, finalmente, con el estudio de la consolidación de los suelos.

A. Representación del estado tensorial en un punto dentro del sólido

Un estado cualquiera de esfuerzos puede representarse por los tres esfuerzos principales y por sus respectiva direcciones. Ahora bien, ese estado tensional puede verse como la suma de dos condiciones: la hidrostática y la desviatórica. La condición hidrostática es aquella en que el esfuerzo es isotrópico e igual al esfuerzo promedio, o hidrostático, o simplemente el octaédrico (p). Vectorialmente, el esfuerzo hidrostático se ubica en la diagonal del sistema coordenado principal y está dado por :

$$\sigma_h = (\text{p,p,p}) \quad (27)$$

Este vector hidrostático es normal al plano octaédrico y su magnitud es:

$$|\sigma_h| = \sqrt{3}p \quad (28)$$

La condición desviatórica se puede representar por un vector referido igualmente al sistema coordenado principal y dado por:

$$\sigma_d = \left[(\sigma_1 - p),(\sigma_2 - p),(\sigma_3 - p)\right] \quad (29)$$

Este vector de los esfuerzos desviatóricos es normal al del esfuerzo hidrostático, es decir, el vector desviatórico está sobre el plano octaédrico y su magnitud es :

$$|\sigma_d| = \sqrt{3} * \tau_{oct} \quad (30)$$

O en términos del esfuerzo cortante equivalente:

$$|\sigma_d| = \sqrt{\frac{2}{3}} * q \quad (31)$$

De acuerdo con lo anterior, un estado tensional en un punto, que tiene seis componentes, se puede remplazar por un par de vectores: el vector de esfuerzo hidrostático, normal al plano octaédrico, y el vector de esfuerzos desviatóricos que pertenece al plano octaédrico.

B. Estudio de la condición de fluencia

En mecánica de suelos, la ley de fluencia que más comúnmente se utiliza es la Mohr Coulomb. Poder chequear si un estado tensional en un punto representa o no una condición de falla requiere la determinación de los esfuerzos normal y cortante sobre el plano potencial de falla. Una vez hecha esta determinación, que involucra un determinado nivel de complejidad, se verifica si la relación de esfuerzos corresponde al criterio:

$$\tau_{ff} = \pm\left(c' + \sigma'_f * tan\phi'\right) \qquad (32)$$

Otra posibilidad consiste en evaluar los esfuerzos principales, a partir del estado tensional general, y observar si la relación de esfuerzos principales corresponde con el criterio de Mohr Coulomb que, en esos términos, se escribe así :

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)f = 2c' + \left(\sigma'_1 + \sigma'_3\right)\text{sen}\,\phi' \qquad (33)$$

En la ecuación anterior , σ_1 y σ_3 son los esfuerzos principales mayor y menor. Su determinación, a partir del tensor de esfuerzos, requiere la solución de la ecuación cúbica en términos de invariantes de esfuerzos.

Podría resultar más cómodo evaluar la condición de falla si eso pudiera hacerse solamente con los esfuerzos equivalentes. Para tal finalidad es bueno poder graficar el criterio de Mohr Coulomb en el sistema coordenado principal en que σ_1, σ_2 y σ_3 son los esfuerzos principales sin importar cuál es el mayor, el menor y el intermedio. En ese sistema coordenado, el criterio de fluencia mencionado se escribe de la siguiente forma :

$$\left[\left(\sigma'_1 - \sigma'_2\right)^2 - \left(2C'\cos\phi + \left(\sigma'_1 + \sigma'_2\right)\text{sen}\,\phi\right)^2\right]$$

$$\text{x}\left[\left(\sigma_2{}^1 - \sigma_3{}^1\right)^2 - \left(2C^1\cos\phi + \left(\sigma_2{}^1 + \sigma_3{}^1\right)\text{sen}\,\phi\right)^2\right] \qquad (34)$$

$$\text{x}\left[\left(\sigma_3{}^1 - \sigma_1{}^1\right)^2 - \left(2C^1\cos\phi + \left(\sigma_3{}^1 + \sigma_1{}^1\right)\text{sen}\,\phi\right)^2\right] = 0$$

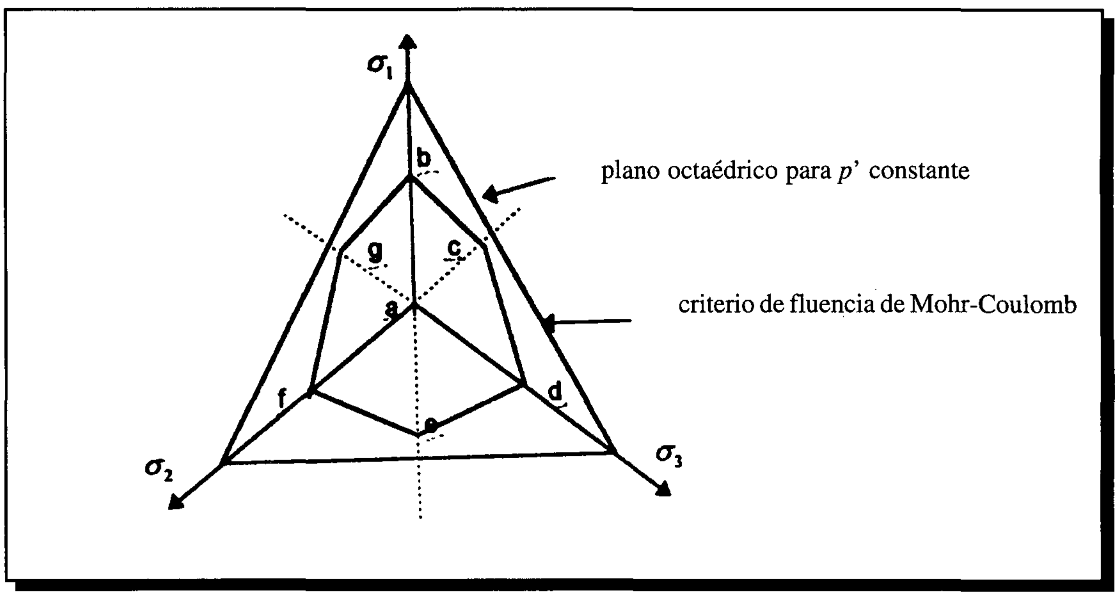


Figura 3. Criterio de fluencia de mohr Coulomb en el sistema coordenado principal.

Gráficamente, el criterio de fluencia de Mohr Coulomb se expresa como aparece en la figura 3.

En la figura 3, las distancias *ab*, *af* y *ad* tienen igual magnitud; esa magnitud depende de p' y está dada por la ecuación :

$$ab = \sqrt{6} * \left[\frac{p'(k_p - 1{,}0) + 2c'\sqrt{k_p}}{2 + k_p} \right] \quad (35)$$

De manera similar, los segmentos *ac*, *ae* y *ag* son iguales y su magnitud es :

$$ac = \sqrt{6} * \left[\frac{p(k_p - 1.0) + 2 * c' * \sqrt{k_p}}{1 + 2 * k_p} \right] \quad (36)$$

Para un valor dado de p', la falla se alcanzará si $\sqrt{2/3}\,q$ llega a tocar el lugar geométrico que define el criterio de fluencia de Mohr Coulomb en el plano octaédrico.

C. Determinación de las deformaciones

La predicción de los asentamientos de una estructura sobre un depósito de suelos requiere la determinación de las deformaciones unitarias y su integración en el semiespacio conformado por el suelo. Para tal efecto, deben utilizarse las relaciones constitutivas que mejor representen la condición del suelo. La primera aproximación racional a la solución del problema consistió en la formulación elástica lineal. Posteriormente, y teniendo en la cuenta que el suelo es un material particulado y multifase y que su comportamiento depende del tiempo, se recurrió a la teoría de la consolidación que, en cierta medida, también se vale del modelo elástico, así no sea estrictamente lineal.A partir de estas teorías básicas, y con base en la dependencia del comportamiento del suelo del estado de esfuerzos, de la trayectoria de esfuerzos y de la historia de consolidación, han venido construyéndose nuevos modelos constitutivos que tienen en consideración esos factores, que siguen utilizando la teoría elástica y que han involucrado la elastoplasticidad, tanto en el comportamiento de endurecimiento por deformación como en el de ablandamiento por deformación. En este artículo se hará referencia al modelo elástico y a la teoría de la consolidación.

• Modelo elástico en sólido homogéneo e isotrópico

Las relaciones esfuerzo deformación elásticas, en el sistema coordenado principal y en términos de los esfuerzos y las deformaciones equivalentes, pueden escribirse así:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\Delta\sigma_1 - \frac{3\nu}{E}\Delta p' \quad (37)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\Delta\sigma_2 - \frac{3\nu}{E}\Delta p' \quad (38)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\Delta\sigma_3 - \frac{3\nu}{E}\Delta p' \quad (39)$$

Con base en las anteriores ecuaciones, las relaciones entre esfuerzos y deformaciones equivalentes se escriben de la siguiente forma :

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{E}\Delta p' \quad (40)$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3G}\Delta q \quad (41)$$

En las anteriores expresiones se conoce como compresibilidad del esqueleto de suelo a la relación :

$$C_{sk} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \quad (42)$$

El inverso de la compresibilidad es la rigidez del suelo, o módulo *bulk* como suele denominarse en mecánica de suelos.

En el caso de deformación plana, las deformaciones principales están dadas por las siguientes ecuaciones :

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\Delta\sigma'_1 - 2\nu\Delta S'\right) \quad (43)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\Delta\sigma'_3 - 2\nu\Delta S'\right) \quad (44)$$

Con base en esas ecuaciones, las relaciones entre esfuerzos y deformaciones equivalentes son las siguientes :

$$\varepsilon_v = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\Delta S' \quad (45)$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{G}\Delta t \quad (46)$$

En la ecuación 45 se llama compresibilidad bidimensional al término:

$$C_{sk}^{2D} = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \quad (47)$$

En el caso unidimensional de deformación, en que el esfuerzo equivalente es σ_1 y la deformación equivalente ε_1, la relación entre los dos es :

$$\varepsilon_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\Delta\sigma'_1 \quad (48)$$

La compresibilidad unidimensional, también conocida como módulo confinado de compresibilidad, está dada por la expresión :

$$m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \quad (49)$$

D. Teoría de la consolidación

El proceso de disipación de la presión de poros con el tiempo va acompañado de un aumento de los esfuerzos efectivos y de un incremento de los asentamientos.

Para establecer las ecuaciones de consolidación es necesario tener en cuenta las ecuaciones constitutivas, las ecuaciones de continuidad del flujo y las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos. Para las ecuaciones constitutivas, se vuelve a tener en cuenta el modelo elástico lineal.

Para el caso de deformación unidimensional, la ecuación de la consolidación, que describe el proceso de disipación de la presión de poros en todo punto espacial con el tiempo, es la siguiente :

$$\frac{K}{m_v \cdot \gamma_w}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \quad (50)$$

En el caso de deformación plana, la ecuación de consolidación se torna en :

$$\frac{K}{C_{sk}^{2D} \cdot \gamma_w}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (51)$$

En el caso general, la ecuación tridimensional de consolidación es :

$$\frac{K}{C_{sk} \cdot \gamma_w}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (52)$$

En las anteriores expresiones, K es la permeabilidad del suelo, U el exceso de la presión de poros y el término $K \div \left(C * \gamma_w\right)$ el coeficiente de consolidación.

E. Energía de Deformación

Una de las ventajas más importantes de los esfuerzos y las deformaciones equivalentes radica en su utilización para el cálculo de la energía de deformación. La energía de distorsión elástica por unidad de volumen, que representa la energía almacenada en el sólido como producto de la deformación por corte, está dada por :

$$U_S = \frac{1}{2} * q * \varepsilon_S^e \qquad (53)$$

En la anterior expresión ε^e_s es la deformación equivalente de distorsión elástica.

Para el cálculo del trabajo plástico incremental por unidad de volumen, nuevamente se puede hacer intervenir al esfuerzo equivalente q y a la deformación equivalente de distorsión e_s. Este trabajo estará dado por :

$$dW_p = q.d\varepsilon_S^p \qquad (54)$$

En la ecuación 54, $d\varepsilon^p_s$ es la deformación equivalente de deformación plástica.

La pendiente de la curva esfuerzo deformación en el intervalo elástico de un proceso de carga unidimensional está definida por el módulo de elasticidad *E*. Similarmente, la pendiente de la curva esfuerzo deformación en el intervalo plástico se conoce como módulo plástico, E_p, y está dado por :

$$E_p = \frac{dq}{d\varepsilon_S^p} \qquad (55)$$

Estas formulaciones de energía de deformación son indispensables para el tratamiento de las deformaciones en el intervalo elastoplástico. Es decir, permiten la formulación de las relaciones constitutivas en ese intervalo gracias a las leyes de endurecimiento por trabajo o de ablandamiento por trabajo.

Conclusión

Los esfuerzos y deformaciones equivalentes facilitan la formulación de las ecuaciones constitutivas y la solución de muchos problemas de ingeniería. De hecho, los nuevos modelos constitutivos, más integrales en el sentido de que pueden tener en la cuenta la dependencia de los módulos de compresibilidad del suelo en función del estado de esfuerzos, de la trayectoria y del proceso de carga y de la historia de esfuerzos, se formulan en términos de esas invariantes. Tal es el caso de la mecánica de suelos del estado crítico.

BIBLIOGRAFÍA

1. ATKINSON J. H. *Foundations and Slopes. An Introduction to Applications of Critical State Soil Mechanics.* McGraw Hill, London. 1981.
2. DAS B. M. Advanced Soil Mechanics. McGraw Hill, New York. 1983.
3. LANCELLOTTA, R. *Geotechnical Engineering.* A.A. Balkema, Rotterdam. 1995.
4. VALLIAPPAN,S. *Continuum Mechanics Fundamentals.* A.A. Balkema. Rotterdam. 1981.