

Diseño de filtros activos

Nuestro desconocimiento respecto a nosotros y a las cosas que nos rodean no proviene tanto de una dificultad de obtener la información, sino de la poca precisión o de su escasez.

Ello se debe, en cambio, a la enorme abundancia y a la confusión de nociones que la humanidad ha acumulado en el transcurso del tiempo.

En relación con los filtros activos se han publicado numerosos artículos dispersos en varias revistas y cada autor usa un enfoque personal.

En el presente artículo se trata de encontrar una línea común al introducir una variable normalizada y algunas formas canónicas.

ANDRES MARIA DOCKX
Ingeniero Electrónico.
Ingeniero Física Nuclear.
Profesor Asociado, Universidad Nacional

Pág. 28-33
Ingeniería e Investigación
Volumen 4 - Nº 2
Trimestre 1 de 1987

En la literatura encontramos varias formas de análisis y diseño de filtros activos. Por la abundancia de datos y la complicación de las fórmulas, resulta difícil tener una visión clara sobre el conjunto. El propósito de este trabajo es ordenar en alguna medida las distintas clases de filtros, al crear algunas formas canónicas que contienen una variable poco común, llamada frecuencia compleja normalizada. La definición es $u = \frac{s}{\omega_0} = \frac{j\omega}{\omega_0}$ donde ω es la frecuencia de trabajo y ω_0 una frecuencia característica.

El comportamiento amplitud-frecuencia y fase-frecuencia de una red eléctrica en general depende de su transmitancia. Dicha transmitancia contiene un cuarto número de polos y ceros con sus respectivas posiciones en el plano complejo. Tales transmitancias pueden ser de orden primero, segundo, tercero o superiores.

Consideraremos las siguientes clases:

1. Filtro de pasabajas de primero y segundo orden.
2. Filtro de pasaaltos de primero y segundo orden.
3. Filtro de pasabanda (necesariamente de segundo orden).
4. Filtro de rechazo de segundo orden.

Formas canónicas

1. Filtro de pasabajas de primer orden:

$$T(u) = \frac{k}{1 + u} \quad (1, a)$$

- 1 b. Filtro de pasabajas de segundo orden:

$$T(u) = \frac{k}{u^2 + \alpha u + 1} \quad (1, b)$$

- 2 a. Filtro de pasaaltos de primer orden:

$$T(u) = \frac{ku}{1 + u} \quad (1, c)$$

- 2 b. Filtro de pasaaltos de segundo orden:

$$T(u) = \frac{ku^2}{u^2 + \alpha u + 1} \quad (1, d)$$

3. Filtro de pasabanda con realimentación múltiple:

$$T(u) = \frac{k\alpha u}{u^2 + \alpha u + 1} \quad (1, e)$$

4. Filtro de rechazo de banda:

$$T(u) = \frac{u^2 + 1}{u^2 + \alpha u + 1} \quad (1, f)$$

k es el factor de ganancia. Merece recordarse que los filtros activos en contraste con los homólogos pasivos pueden tener una ganancia independiente de la frecuencia.

α es el factor de amortiguamiento y es el inverso del factor de calidad Q .

ω_0 es la frecuencia de corte o la frecuencia central según el caso.

Las formas canónicas revelan las siguientes propiedades:

Los filtros de pasabajas de primer y segundo orden llevan uno y dos polos respectivamente en el plano complejo.

Los filtros de pasaltas de primero y segundo orden llevan uno y dos polos respectivamente y además un cero o un doble cero en el origen.

El filtro de pasabanda posee un solo cero en el origen y dos polos.

El filtro de rechazo de banda tiene dos polos y dos ceros.

Cualquier implementación de estos filtros se deja reducir a su forma canónica, lo que fácilmente permite definir su frecuencia de corte (o central), el factor de ganancia y el factor de calidad.

Esquemas de implementación

La figura 1 muestra el diagrama general de un filtro asimétrico con ganancia K . La ganancia K depende solo de los componentes conectadas a la entrada inversora del amplificador operacional.

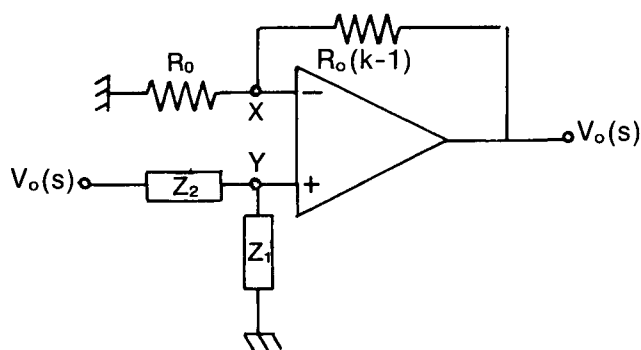


FIGURA 1.

Para el funcionamiento del amplificador vale además $X = Y$.

La transmitancia se define como:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}$$

Filtro de pasabajas de primer orden

La impedancia Z_1 es capacitiva y la impedancia Z_2 es resistiva.

$$Z_1 = \frac{1}{sC} \quad Z_2 = R$$

la transmitancia al sustituirla en (2)

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{1 + sRC}$$

Al comparar la expresión con 1.a identificamos la frecuencia de corte

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

y la transmitancia $T(u) = \frac{K}{1 + u}$

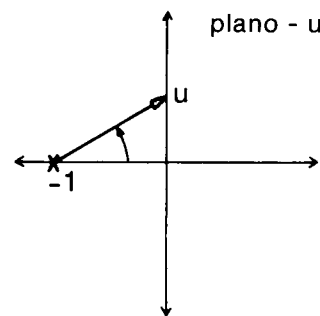


FIGURA 2.

La figura 2 ubica el polo con el punto -1 y el comportamiento del filtro se da por la magnitud y fase del factor trazado.

Filtro de pasaltas de primer orden

Asignamos $Z_1 = R \quad Z_2 = \frac{1}{sC}$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K}{1 + \frac{1}{sRC}} = \frac{KsRC}{1 + sRC}$$

Al comparar el resultado con (1, c) volvemos a identificar la frecuencia de corte

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

La transmitancia $T(u) = \frac{ku}{1 + u}$

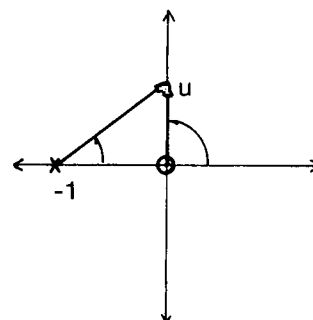


FIGURA 3.

La figura 3 muestra el polo en el mismo punto y el comportamiento depende ahora de las magnitudes y fases de los dos fasores trazados.

Filtro general de segundo orden

Estudiaremos enseguida los filtros asimétricos de segundo orden.

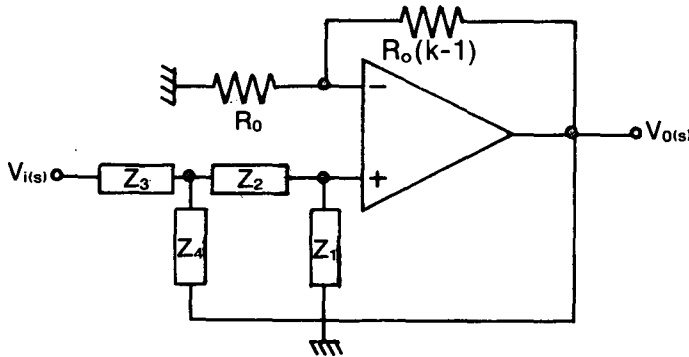


FIGURA 4.

Escribiendo en la misma forma las ecuaciones de los nodos obtenemos como resultado final para la transmitancia:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{kZ_1Z_4}{Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1Z_3(1 - k) + Z_2Z_3}$$

Filtro de pasabajas de segundo orden

$$Z_1 = \frac{1}{sC_1} \quad Z_4 = \frac{1}{sC_2} \quad Z_3 = R_1 \quad Z_2 = R_2$$

Sustituyendo

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{s^2(R_1R_2C_1C_2) + s[R_1C_2(1 - k) + C_1(R_1 + R_2)] + 1}$$

Para la mayoría de los casos $R_1 = R_2$ y $C_1 = C_2$

$$T(s) = \frac{k}{(sRC)^2 + s(3 - k)RC + 1}$$

Introduciendo la frecuencia de corte obtenemos: $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$$T(u) = \frac{k}{u^2 + (3 - k)u + 1} = \frac{k}{u^2 + \alpha u + 1}$$

Por primera vez aparece el factor de amortiguamiento $\alpha = 3 - k$ según la ganancia aplicada α varía. Los valores de α determinarán la forma de transición entre la zona admitida y prohibida, lo que da lugar a distintos tipos de respuesta: Tipo Butterworth, Bessel y Chebichev.

Filtro de pasaltas de segundo orden

$$Z_1 = R \quad Z_4 = R \quad Z_3 = \frac{1}{sC} \quad Z_2 = \frac{1}{sC}$$

De la misma manera podemos obtener

$$T(u) = \frac{ku^2}{u^2 + (3 - k)u + 1}$$

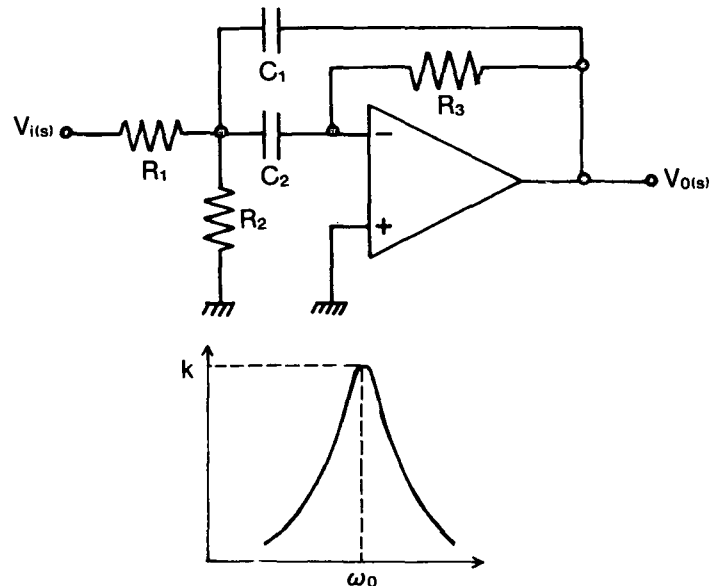


FIGURA 5.

Filtro de pasabanda

Esta clase recibe los nombres de resonados o filtro de realimentación doble.

La figura 5 representa el circuito con su respuesta de ganancia.

La transmitancia

$$T(u) = \frac{k\alpha u}{u^2 + \alpha u + 1}$$

La frecuencia de corte

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{RR_3C_1C_2}} \quad \text{donde } R = R_1 \parallel R_2$$

El factor de amortiguación

$$\alpha = \frac{\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{\frac{R}{R_3}}}$$

El factor de ganancia

$$k = \frac{-R_3C_2}{R_1(C_1 + C_2)}$$

Filtro de rechazo-banda

Esta clase de filtro también recibe varios nombres como filtro "NOTCH" o supresor parasitario

El circuito de la figura 6 está compuesto de un amplificador de diferencia y un circuito selectivo que actúa como un circuito pasivo RLC serie.

La transmitancia es

$$T(u) = \frac{u^2 + 1}{u^2 + \alpha u + 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R \sqrt{C_1C_2}}$$

$$\alpha = \frac{R + R_3}{R} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

$$k = 1$$

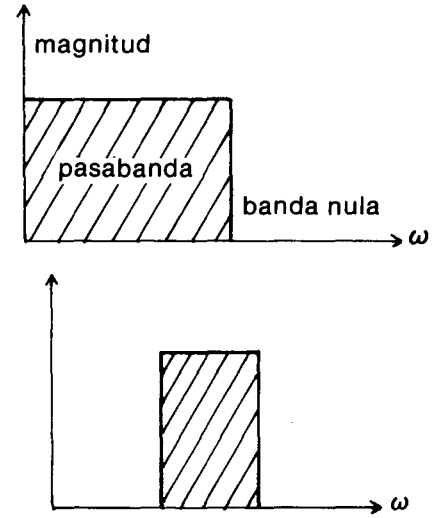
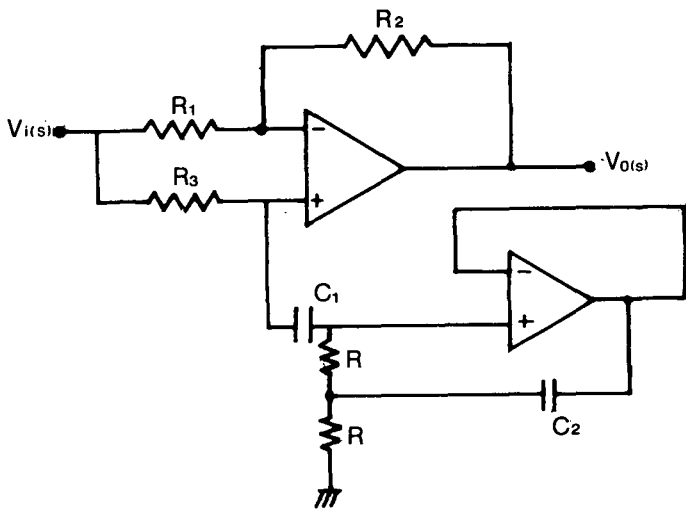


FIGURA 7.

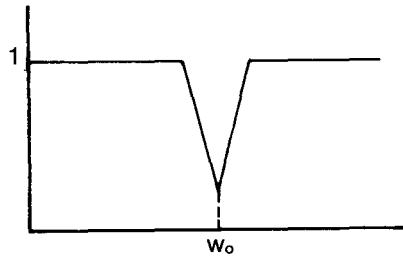


FIGURA 6.

Tipos de filtros

Hasta ahora hemos discutido las clases de filtros en sus funciones básicas sin preocuparnos hasta qué grado de perfección se admite un rango de frecuencias y se rechaza a otras. La figura 7 muestra formas ideales de filtros en las cuales la respuesta de magnitud es constante en la banda permitida, y cero en la banda rechazada.

En 1930, Buterworth estudió la respuesta plana al plantear un polinomio de tipo

$$(jx)^{2n} + 1 = 0$$

cuyas raíces son

$$X = 1 \left| \frac{180^\circ + k360^\circ}{2n} - 90^\circ \right.$$

en el plano complejo.

La raíces se encuentran todas sobre una circunferencia de radio unitario.

La figura 8 muestra la localización de las raíces en función del orden n para algunos casos.

Los polinomios de Butterworth son la síntesis de monomios que sólo escogen las raíces localizadas en la parte derecha del plano tal que para

$$n = 1 \quad (x - 1 \underline{180}) = x + 1$$

$$n = 2 \quad (x - 1 \underline{135})(x - 1 \underline{225}) = x^2 + \sqrt{2} x + 1$$

$$n = 3 \quad (x - 1 \underline{120})(x - 1 \underline{180})(x - 1 \underline{240}) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Una segunda función de aproximación da una característica de fase lineal, una función cualquiera $f(t)$ al pasar por una red eléctrica conservará su forma (aunque modificada en escala y desplazado) si la red tiene una respuesta de magnitud plana y si además la característica de fase lineal. La figura 9 muestra gráficamente como un estímulo $f(t)$ se retarda con "asegundos" al pasar por la red, generando la respuesta $f(t-a)$.

La transmitancia es la relación entre salida y entrada en el plano de frecuencia:

$$T(s) = e^{-as} \quad \text{ó también} \quad T(j\omega) = e^{-j\omega a} = 1 \underline{-\omega a}$$

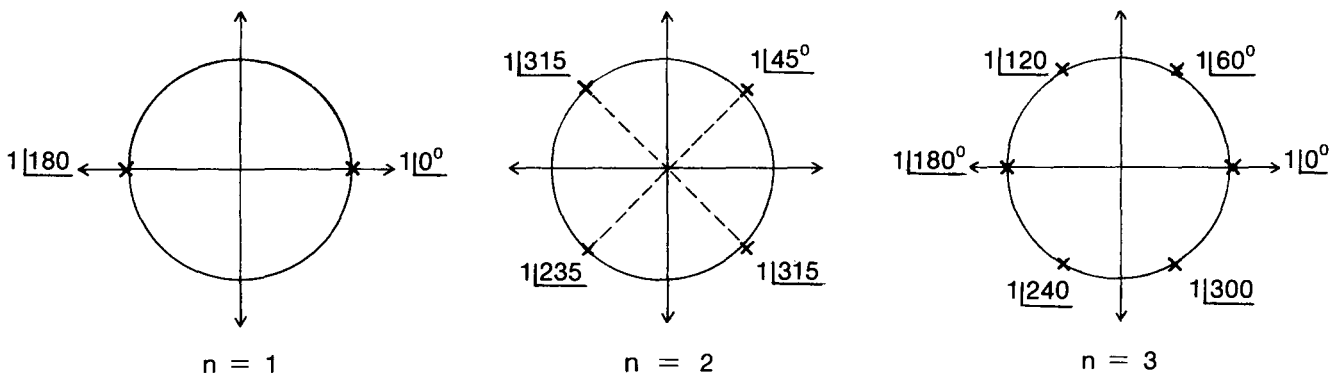


FIGURA 8.

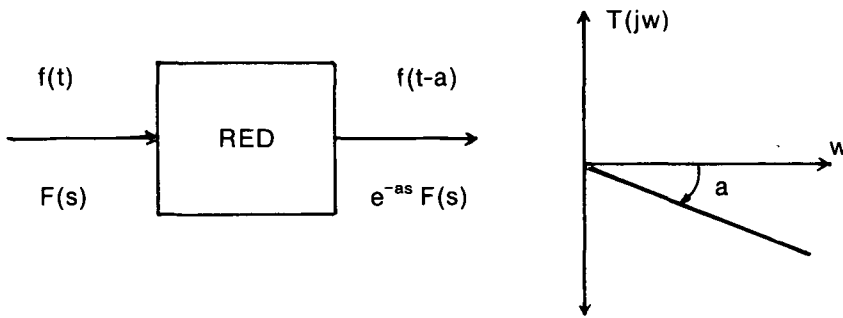


FIGURA 9.

Bessel busca un polinomio que aproximaba la función e^{-x} y publicó los siguientes datos:

$n = 1 \quad x + 1$

$n = 2 \quad x^2 + 3x + 3 = (x - 1.5 - j0.86)(x + 1.5 + j0.86)$

$n = 3 \quad x^3 + 6x^2 + 15x + 15$

Aunque las funciones propuestas no son ideales porque la ganancia baja de manera lenta por debajo de 1 y la fase no cambia perfectamente lineal con la frecuencia, la función aproximada de Bessel se llama de retardo "a constante".

Por último existen los polinomios de Chebichev que también buscan aproximarse a las características ideales. Las raíces se encuentran sobre una elipse. La figura 10 muestra la localización de las raíces Butterworth y Chebichev para el orden cuarto. Las raíces del polinomio Butterworth están en una circunferencia y las de Chebichev en una elipse.

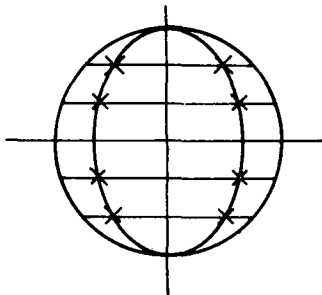


FIGURA 10.

El propósito de estos polinomios es mejorar más la transición abrupta en las paredes de las bandas a costo de cierto rizado de la banda pasante. En lo general el rizado pico a pico se expresará en db. La figura 11 registra la evolución de la magnitud en función de la frecuencia.

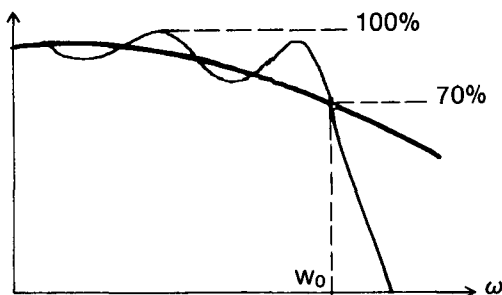


FIGURA 11.

Ejemplos

Buscaremos ahora la aplicabilidad en las redes eléctricas y especialmente en filtros asimétricos de orden segundo. La figura 12 muestra la localización de los polos para las distintas aproximaciones.

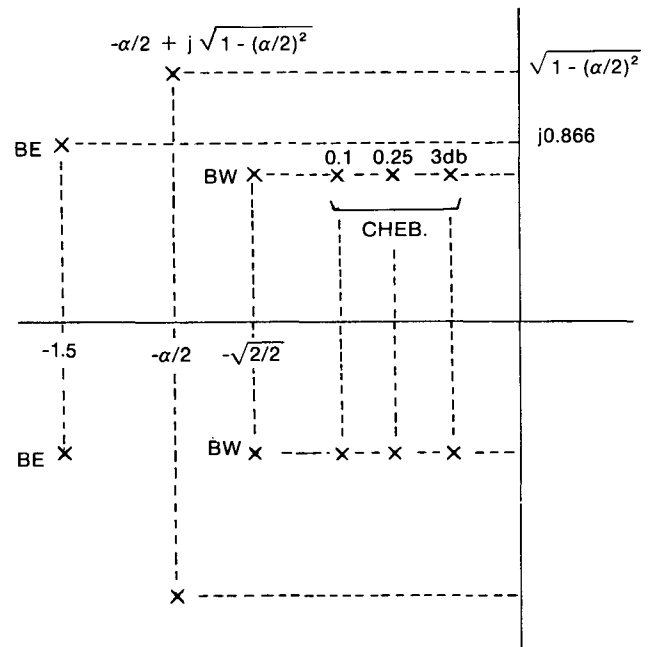


FIGURA 12.

En las formas canónicas hemos mencionado el factor de amortiguamiento sobre el cual podemos actuar para localizar los polos del polinomio:

$U^2 + \alpha u + 1 = 0$ en los sitios indicados en la figura 12 para tener un tipo específico de respuesta o situarlas entre los polos de Butterworth, Bessel y Chebichev.

Se logró redactar un programa en BASIC para conocer la respuesta de fase y de amplitud para distintos valores del factor de amortiguamiento.

La siguiente tabla expresa la relación entre α y los tipos de respuesta para filtros de pasabajas y de pasaltas de segundo orden.

Tipo	α	$K = 3 -$
Butterworth	1.41	2.59
Bessel	3	0
Chebichev 0.1 db	1.312	1.688
0.25	1.234	1.766
0.5	1.156	1.844
1	1.044	1.956
2	0.886	2.224
3	0.776	2.224

Conclusión

En el artículo se plantea una relación sencilla de la transmitancia de filtro activo. Permite clasificar de manera fácil el filtro en las distintas clases y órdenes. La reducción de la transmitancia para una implementación dada permite identificar fácilmente los parámetros de amplificación, de amortiguación y de frecuencias de corte (de resonancia). Se ha evitado al máximo sobrecargar al lector con fórmulas complicadas que ocultan los hechos fundamentales de entendimiento y de diseño resaltando así los aspectos básicos.

BIBLIOGRAFIA

1. Active filters - Electronics Junio 19-72.
2. Active Resonators Save Steps in Designing Active Filters. Electronics April 24-72.
3. Operationsverstärker - Dietrich Pabst.