Ordenamiento y solución de flujos de carga en sistemas radiales

En estudios de planeación y operación de sistemas de distribución, es necesario efectuar gran cantidad de estudios de reparto de carga, corto circuito y análisis de contingencias entre otros, de aquí que es muy importante para el ahorro de tiempo y memoria de cómputo, como también para la confiabilidad de la solución el empleo de algoritmos adecuados.

Una parte fundamental de estos algoritmos es la relacionada con el ordenamiento, factorización y solución de ecuaciones lineales.

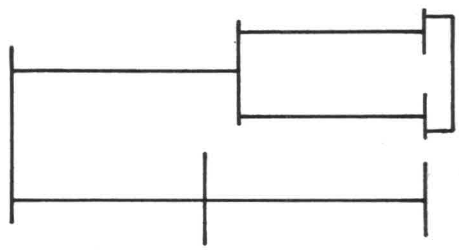
En este trabajo se plantea un algoritmo sencillo de ordenamiento, factorización y solución de ecuaciones lineales, aprovechando la estructura de los sistemas radiales (los cuales son frecuentes en distribución), lo que conlleva a una reducción en tiempo y memoria de cómputo respecto a los algoritmos tradicionalmente utilizados, teniendo una aplicación inmediata en reparto de carga y corto circuito de sistemas radiales.

LUCIO FLOREZ C.
Ms. Ingeniería Eléctrica
Profesor Asistente U.N.
ROSA CANO
JAVIER ROJAS
GABRIEL SALAZAR
Estudiantes de la Universidad Nacional
Departamento de Ingeniería Eléctrica

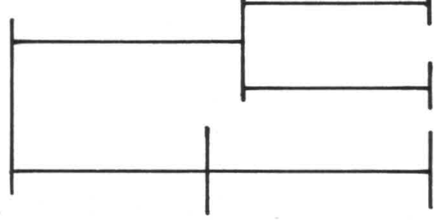
Pág. 19-26
Ingeniería e Investigación
Volumen 4 Nº 1
Trimestre 1 - 1986

Los sistemas radiales tienen un comportamiento muy propio en cuanto a su ordenamiento, factorización y solución empleada en análisis de flujos de carga. Estas características se pueden utilizar en diseñar un reparto de carga, únicamente para sistemas radiales, el cual reportaría un mejoramiento en tiempo de solución y requerimientos de memoria. En este trabajo se muestran estas ventajas y su posible aplicación a sistemas que contengan subsistemas radiales.

Se entiende por sistema radial, aquel sistema que en su configuración no presenta ningún enlace, es decir, el árbol del sistema está compuesto por todos los elementos. Como ejemplo se puede citar:



Sistema no radial



Sistema radial

En la solución de flujo de carga se presentan, para resolver ecuaciones de la forma: $AX = b$

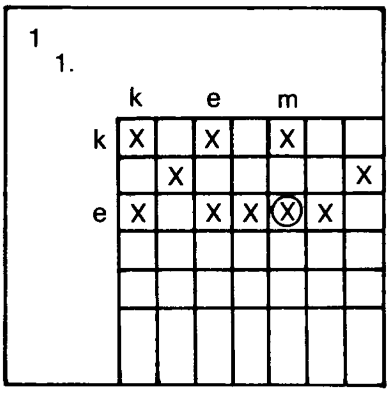
Donde:

- A Matriz nxn de forma similar a la matriz admitancia
- X Vector incógnita (nxl)
- b Vector conocido (nxl)

Un método de solución empleado en esta clase de problema, el cual ha dado muy buenos resultados, es el método de factorización o triangularización de Gauss.

PROCESO DE FACTORIZACION

El método se puede revisar ampliamente en la referencia /2/, por lo cual se presentarán rápidamente algunas características. Para esto se considera el siguiente sistema correspondiente a una matriz simétrica en estructura,, A_{IJ} existe, entonces A_{JI} también existe).



X Elemento diferente de cero.

⊗ Elemento que se crea en el proceso de factorización en el cual se ha factorizado hasta la columna K-1.

Para factorizar la columna K se efectúan los siguientes pasos:

1) Dividir por el elemento (k, K), la fila K, esto no crea ningún elemento.
2) Mirar en la columna K si existe algún elemento diferente de cero (ejemplo: el elemento (e, K), para eliminarlo mediante el siguiente procedimiento:
   a. Se multiplica la fila K por el elemento (e, K).
   b. A la fila e se le resta la fila encontrada en el paso a).

   Según lo anterior se crean elementos en la fila e cuando:
   — Existe el elemento (K, e) e>K
     y existe el elemento (k, m) m > e tal que en la fila e no exista el elemento (e, m).

Si lo anterior es cierto se crea el elemento (e, m), como se ilustra en la figura 1

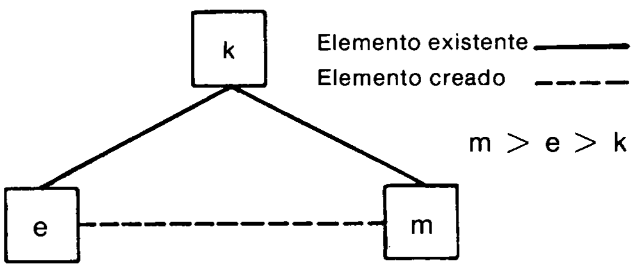


FIGURA 1. Relaciones en la creación de elementos durante el proceso de factorización.

Obsérvese que para que se cree el elemento (e, m) se necesita que e, m > K

SISTEMAS RADIALES

Se considera el siguiente esquema:

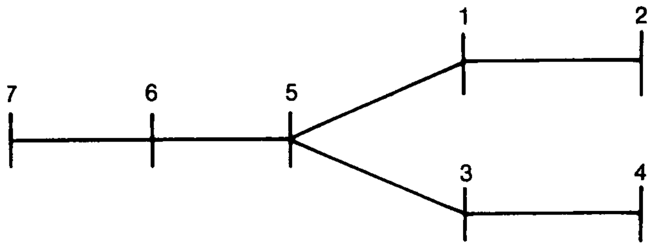


FIGURA 2. Sistema radial.

Según la Figura 2 se ve claramente que para evitar crear términos los primeros nodos a considerar son los números (2, 4, 6) los cuales se llamarían en una nueva numeración (1, 2, 3) (Figura 3).

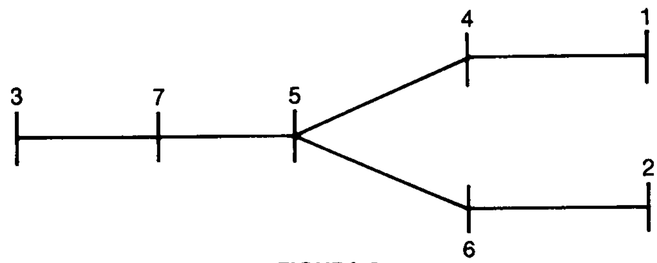


FIGURA 3.

Al eliminar la columna 1, 2, 3 no se crean términos.

Si se hubiera tomado otra numeración diferente por ejemplo, Figura 4.

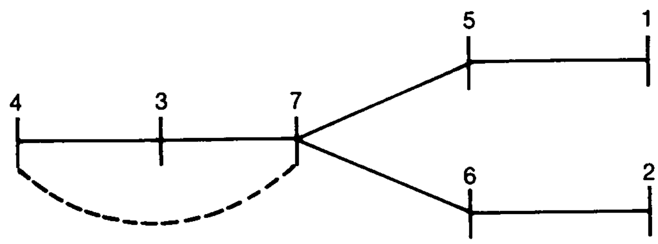


FIGURA 4.

Al eliminar 1 y 2 no se crean términos.

Al eliminar la columna K = 3 crea el término (e, k) = (4, 7), ya que e > K, (4 > 3) y m > e (7 > 4).

Siguiendo con la Figura 3 al considerar los nodos 7, 4, 6 con una nueva numeración (4, 5, 6), como se muestra en la Figura 5, no se crea ningún término adicional, para esto consideramos el nodo 6, el cual está unido como muestra la figura 6.

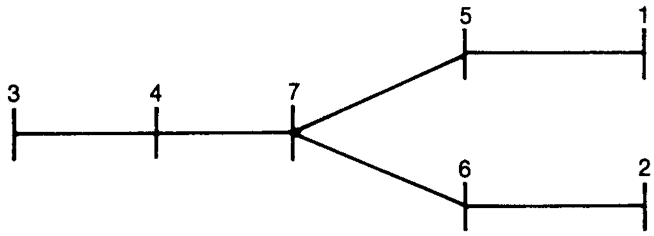


FIGURA 5.

Al eliminar la columna **K** = 6 no se crea elementos (**e**, **m**) = (**7**, **2**) ó (**2**, **7**)

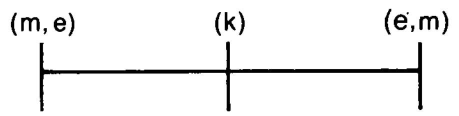
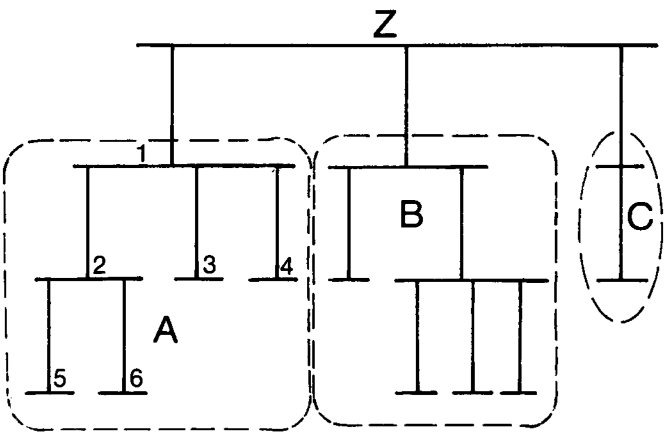


FIGURA 6.

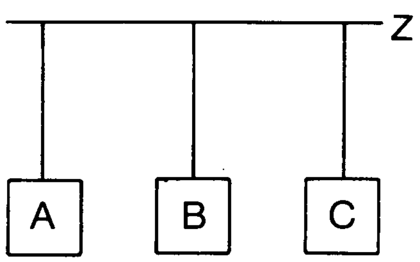
Ya que para que se cree, se necesita que tanto **e** como **m** sean mayores que **K**, en este caso **2** < **6**, por consiguiente no se crean elementos.

Lo anterior se puede expresar de la siguiente manera: siempre que antes de eliminar la columna **K** se haya eliminado la columna (**e**, **m**), se tendrá que (**e** ó **m**) < **K**, es decir, el elemento (**e**, **m**) no se crea.

Todo sistema radial (según la definición dada), se puede reducir a un esquema similar al estudiado anteriormente, para esto se toma como ejemplo el siguiente esquema:



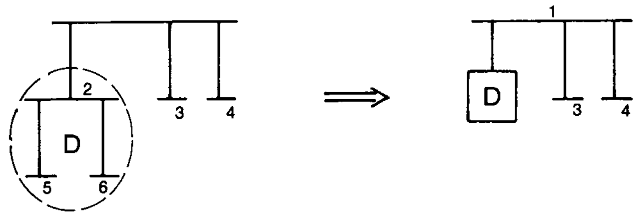
el cual se puede representar como:



Según lo tratado anteriormente el ordenamiento óptimo debe ser:

	A	B	C	Z
A	X			X
B		X		X
C			X	X
Z				X

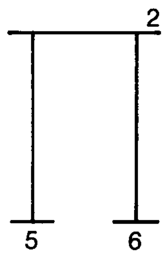
Se toma ahora el conjunto **A**, el cual se puede representar a su vez



y su ordenamiento óptimo será:

	D	3	4	1
D	X			X
3		X		X
4			X	X
1				X

El sistema **D** se puede representar con su ordenamiento óptimo



	5	6	2
5	X		X
6		X	X
2			X

Lo anterior se puede realizar de la misma manera sobre los sistemas B y C, de esta manera se obtendrá el ordenamiento óptimo para este sistema, con el cual no se crea ningún término.

ALGORITMO DE ORDENAMIENTO OPTIMO

Según lo presentado anteriormente el algoritmo para el ordenamiento óptimo será:

a. Empezar con los nodos terminales del sistema (nodos a los cuales sólo llega una conexión).

b. Si al considerar los nodos anteriores, se encuentra que un nodo **A** no considerado,

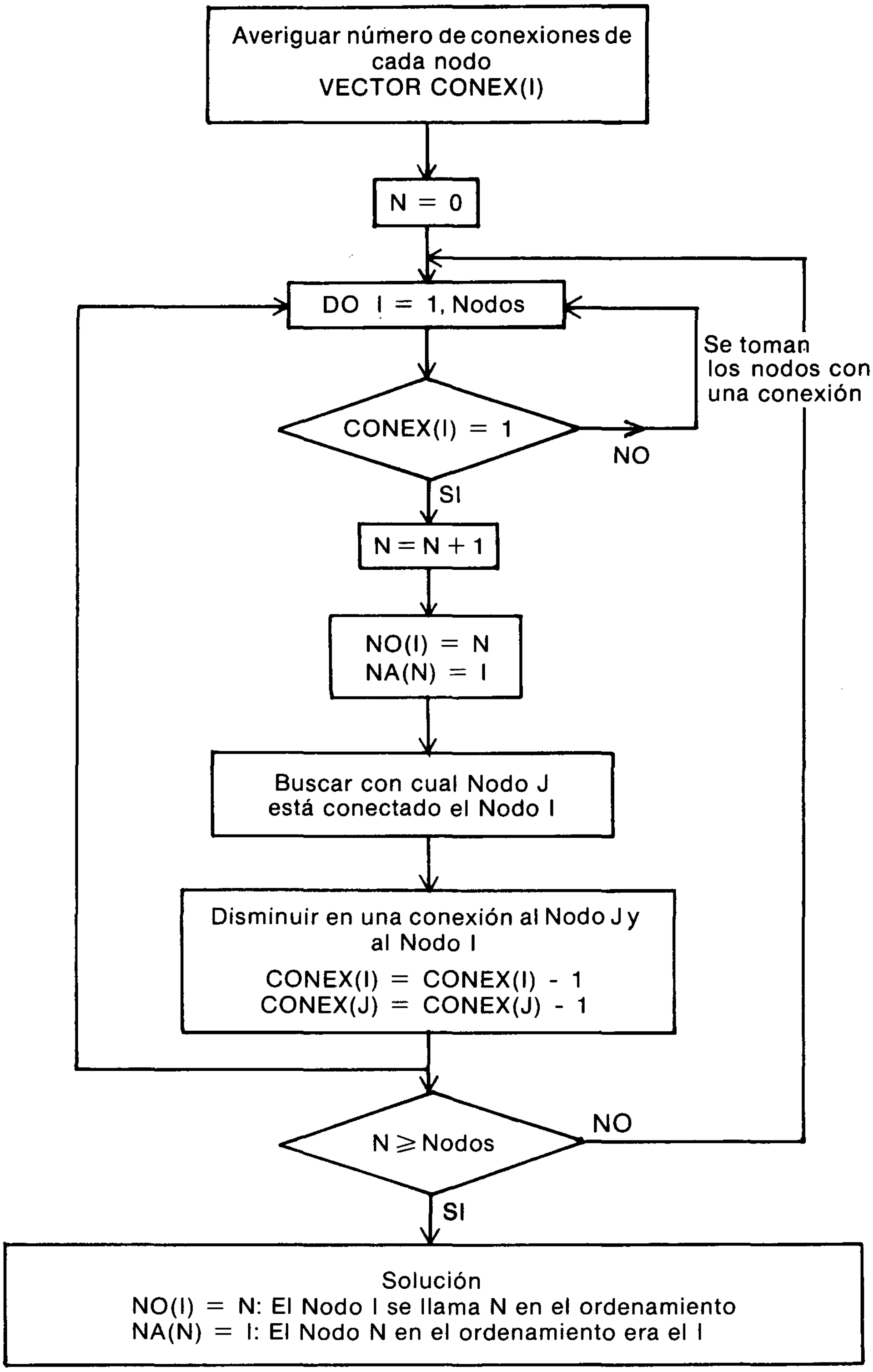


Diagrama de ordenamiento

está conectado con todos sus nodos terminales (conjunto de nodos **B**), entonces volver el nodo **A** nodo terminal y no considerar más el conjunto **B**.

c. Volver al paso **b** hasta haber considerado todos los nodos.

Un posible diagrama de bloques para efectuar esto, sería el que se muestra en la figura Diagrama de Ordenamiento.

Ejemplo 1: para el siguiente sistema se le aplica el esquema de ordenamiento propuesto.

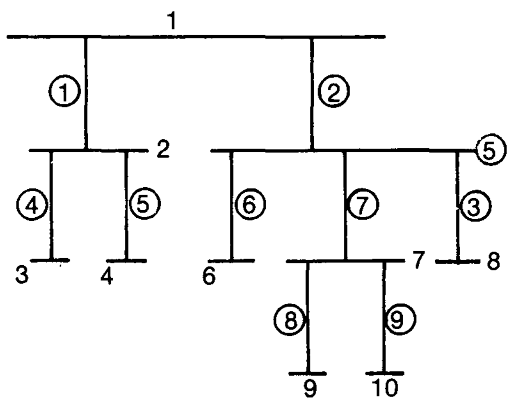


TABLA 1.
Elementos y sus nodos de conexión

Línea	Nodo A	Nodo B
1	1	2
2	1	5
3	5	8
4	2	3
5	2	4
6	5	6
7	5	7
8	7	9
9	7	10

El número de conexiones (conex), Tabla II, se puede encontrar en la Tabla I.

TABLA 2

Nodo	Conex	Conex 1	Conex 2	Conex 3
1	2	2	1	0
2	3	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	0	0	0
5	4	2	1	0
6	1	0	0	0
7	3	1	0	0
8	1	0	0	0
9	1	0	0	0
10	1	0	0	0

—Escoger los nodos que tengan una conexión (nodos 3, 4, 6, 8, 9 y 10)

TABLA 3
Vectores resultantes utilizados para el ordenamiento

Indice	NA	NO
1	3	10
2	4	7
3	6	1
4	8	2
5	9	9
6	10	3
7	2	8
8	7	4
9	5	5
10	1	6

NO(I) = **N**: El Nodo **I** Se llama en el Ordenamiento **N**

NA(N) = **I** El Nodo **n** en el Ordenamiento era el Nodo **I**

— Se disminuye el vector conex en 1 a los nodos anteriores y los conectados a ellos, obteniéndose conex 1.

— Se escogen los nodos que quedaron con una conexión (nodos 2, 7)

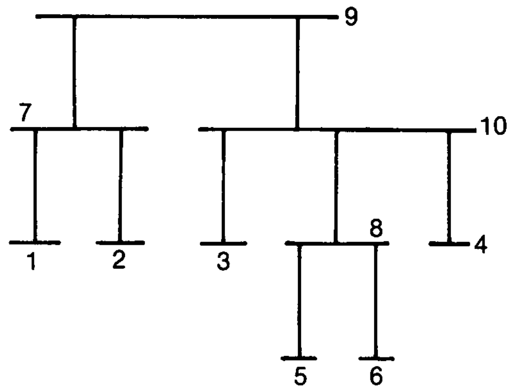
— Se disminuye el vector conex en 1 a los nodos anteriores y los conectados a ellos, obteniéndose conex 2.

— Escogencia de nodos de una conexión (nodo 1, 5)

— Disminución del vector conex, obteniéndose conex 3

— Todo el vector conex es igual a cero por lo cual se termina el ordenamiento.

Según este nuevo ordenamiento (Tabla III) la nueva numeración del sistema es:



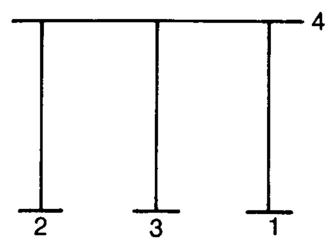
Sistema con la nueva numeración y la forma de la matriz factorizada, la cual tiene la misma forma que la matriz Y (no se le ha creado ningún elemento)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X						X			
2		X					X			
3			X							X
4				X						X
5					X			X		
6						X		X		
7							X		X	
8								X		X
9									X	X
10										X

Matriz Y factorizada según el nuevo ordenamiento

FORMA DE LA MATRIZ FACTORIZADA

Hasta ahora se ha visto que mediante el ordenamiento propuesto no se crea ningún elemento, por lo cual se puede considerar como un ordenamiento óptimo, es decir, que para el sistema siguiente se tendrá:



Sistema radial de 4 nodos

Las conexiones que existen son (recuérdese que la matriz está triangularizada y sólo existen los elementos de la matriz triangular superior; y_{em}

puede existir si **m** $>$ **e**):

$$Y_{14}, Y_{34}, Y_{24}$$

Se observa que la fila 1, 3, 4 sólo puede tener un elemento en la matriz ya que sólo es posible que un nodo (**e**) esté conectado con un nodo **m** donde **m** $>$**e**.

Si la matriz factorizada se guarda en forma de vectores se tiene que el elemento al cual está conectado el nodo **n** aparece en la posición **n**, como se muestra a continuación con base en el ejemplo 1:

Matriz factorizada en forma de tabla

Indice	NCO	YD	YF
1	7	—	—
2	7	—	—
3	10	—	—
4	10	—	—
5	8	—	—
6	8	—	—
7	9	—	—
8	10	—	—
9	10	—	—

Donde:

NCO(K) = **J**: el nodo **K** está conectado con el nodo **J** para **K** $<$ **J.** Por ejemplo: el nodo **5** está conectado con **NCO(5)** = **8**

YD: vector de los elementos de la diagonal, de orden nodos × **1**

YF: vector de los elementos fuera de la diagonal de orden (nodos - 1) × 1

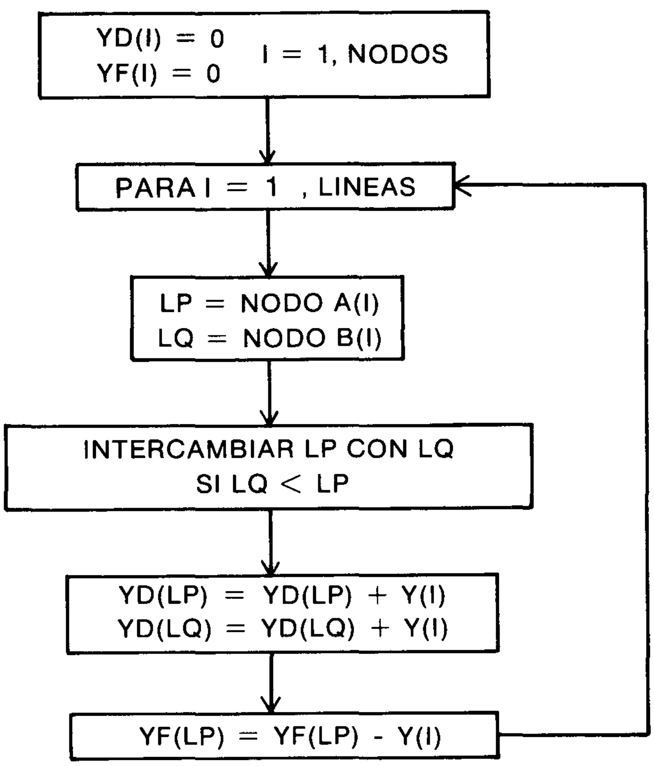
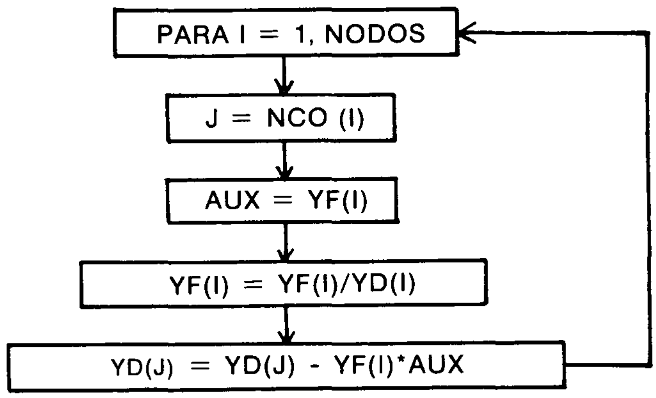


Diagrama que muestra el algoritmo de formación de Y.

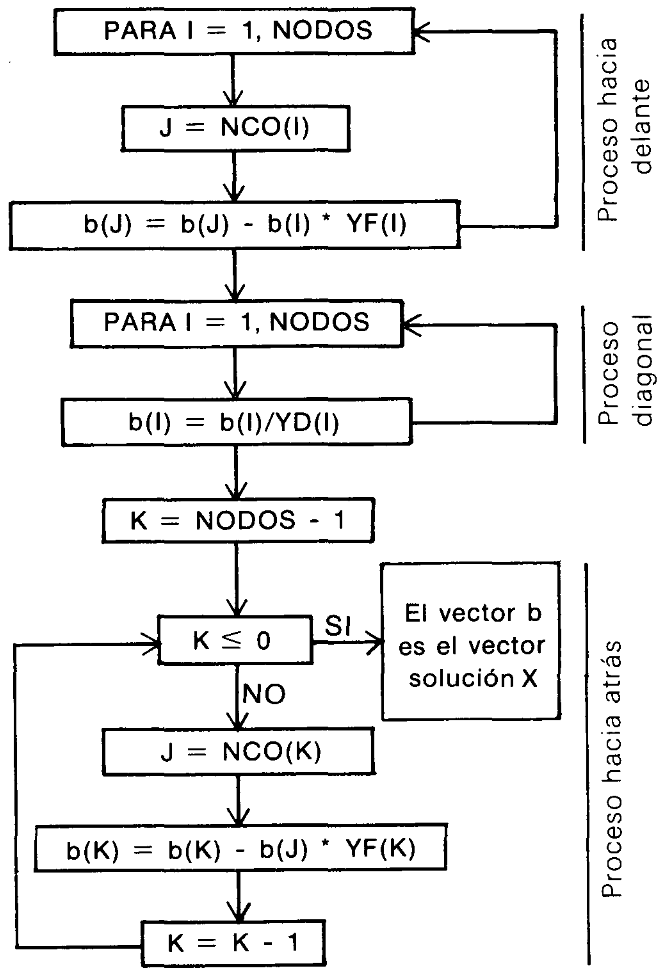
FORMACION, FACTORIZACION Y SOLUCION

Teniendo en cuenta que el elemento conectado al nodo **n**, aparece en la posición **n**, se tienen los siguientes algoritmos de formación, factorización y solución. (Los nodos entre los cuales está conectada la línea se renumeran según el ordenamiento encontrado).

Algoritmo de factorización de una matriz **Y** simétrica en estructura y valores.



Algoritmo de solución de una ecuación de la forma **YX** = **b**, la solución **X** se obtiene en el vector **b**.

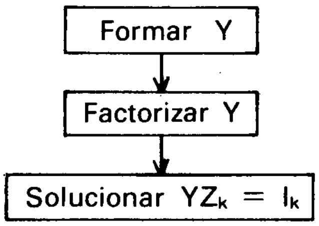


Los algoritmos para matrices simétricas en estructura pero no en valores son similares.

APLICACION EN ESTUDIO DE CORTO CIRCUITO PARA SISTEMAS RADIALES

Uno de los principales problemas para la solución de un estudio de corto circuito consiste en encontrar para el nodo de falla **K**, la columna **K** de la matriz de impedancia (**Z**).

Según lo mencionado anteriormente el esquema de solución sería:



Algoritmo para encontrar la columna K de la matriz **Z**

Donde: **Zk** vector columna incógnita que se desea encontrar

I_K vector columna compuesto por ceros, menos en la posición **K** en la cual hay un 1.

$$I_k = \left[0, \ldots\ldots \underset{k}{1} \ldots\ldots 0\right]^T$$

APLICACION EN FLUJOS DE CARGA PARA SISTEMAS RADIALES

Existen básicamente dos metodologías:

a. Utilizar solución iterativas por medio del método Gauss (no confundir con factorización de Gauss).
b. Utilizar solución iterativas por medio del método de Newton-Raphon; a continuación se expone brevemente cada método.

METODO DE GAUSS

Por su sencillez y debido a las características de los sistemas radiales, es uno de los más utilizados, existen varias versiones, una de ellas puede ser:

1. Calcular las corrientes en todos los elementos del sistema, empezando desde la más alejada de la fuente (nodo flotante), se asume un voltaje inicial de 1.0 pu en todos los nodos, a partir de la segunda iteración se utilizan los voltajes calculados en la iteración anterior.
2. Calcular los voltajes de la red de acuerdo a las corrientes calculadas en el paso anterior, partiendo de la fuente (nodo flotante).
3. Calcular la diferencia de pérdidas de la red entre 2 iteraciones consecutivas para ver si se cumple el criterio de convergencia, si no volver al paso 1.

Para calcular las pérdidas de la red y los voltajes del sistema es necesario disponer de un ordenamiento adecuado.

El sistema de ordenamiento propuesto permite de una manera rápida y sencilla encontrar los caminos ascendentes y descendentes necesarios para el cálculo de las corrientes, voltajes y pérdidas del sistema.

METODO DE NEWTON-RAPSON

En este método los errores de potencia activa y reactiva en los diferentes nodos se relacionan con los incrementos de magnitud y ángulo de los voltajes nodales.

$$\begin{bmatrix} AP \\ AQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta E/E \end{bmatrix} \qquad (1)$$

donde: **AP, AQ** vectores de los errores de potencia activa y reactiva respectivamente **Δδ** , **Δ E/E** incremento en magnitud y ángulo de los voltajes nodales.

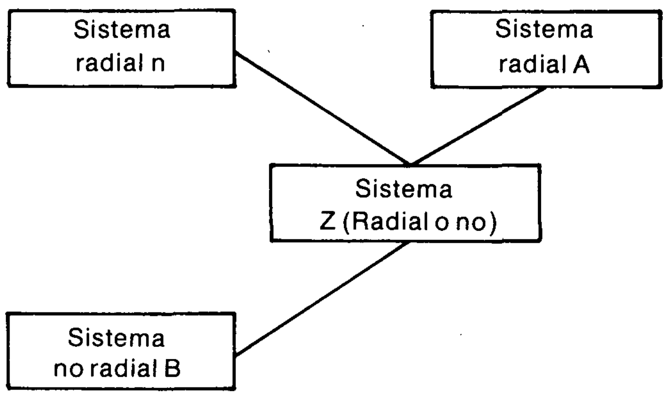
H, **N**, **J**, **L**. matrices que forman el jacobiano y tienen la misma forma que la matriz de admitancia.

Solucionada la ecuación (1) se actualizan los voltajes en magnitud y ángulo con ellos se vuelven a calcular los errores de potencia activa y reactiva, si están dentro de un límite determinado se dice que ha llegado a la solución, sino se vuelve a resolver la ecuación (1).

Para la solución de (1) se le puede aplicar el algoritmo propuesto ya que **H**, **N**, **J**, **L** poseen la misma estructura de la matriz.

APLICACION EN SISTEMAS QUE CONTENGAN SUBSISTEMAS RADIALES

Supóngase que el sistema a estudiar se puede representar mediante el siguiente esquema:



	A	B	η	Z
A	X			X
B		X		X
η			X	X
Z	X	X	X	X

Con base en lo anotado anteriormente, un esquema de ordenamiento sería:

1. Ordenar cada subsistema radial según la metodología enunciada.
2. Ordenar al final el sistema no radial según metodología clásica (2) (esquema Tinney II).

Aún en el caso de que los sistemas ABCN no sean radiales se efectuaría el ordenamiento según el esquema anterior, utilizando la metodología clásica.

CONCLUSIONES

a) **Generales.** 1.- Los subsistemas radiales presentan características particulares, las cuales se pueden tener en cuenta para una más rápida solución del problema de flujo de carga.

2. Estas propiedades se pueden extender a sistemas o subsistemas que presenten configuración radial (un subsistema se puede representar por un nodo) y combinar esta solución con las soluciones propuestas en la literatura (2).
3. El conocimiento de las características de un sistema (relación **r/x**, configuración) facilita la elaboración de algoritmos de solución más adecuados.

b) **Particulares.** Para las pruebas del algoritmo propuesto se utilizaron sistemas radiales de 9 - 30 - 42 nodos, con relaciones de resistencia/reactancia.

(**R/X** 5-10, 0,5-2, 0.1-0.2). Los elementos de los sistemas utilizados podrán tener cualquiera de estas relaciones, los resultados fueron:

METODO DE GAUSS

1. El cálculo de las corrientes de los elementos y voltajes del sistema, se realizan de una manera sencilla mediante el esquema de ordenamiento propuesto, comparado con otras metodologías (3).
2. El criterio de convergencia del método (corriente total, pérdida del sistema) da una precisión aceptable en la mayoría de los voltajes nodales del sistema, número de iteracciones (4-8).
3. Aunque en los sistemas radiales es costumbre despreciar las admitancias a tierra, la consideración de éstas aumentan la complejidad del problema.

METODO DE NEWTON-RAPHON

1. Uno de los principales inconvenientes del método de Newton-Raphon, es la utilización de una mayor memoria que los métodos de gauss, con el esquema propuesto se conoce de antemano la cantidad de elementos a utilizar (fuera de la diagonal = Nodos - 1), y por lo cual requiere el uso de memoria similar a la utilizada en los métodos de Gauss.
2. El criterio de convergencia, se emplea cuando las potencias nodales desadas sean iguales a las potencias nodales calculadas, esto asegura que todos los voltajes nodales se pueden encontrar con la precisión deseada.
3. Las admitancias a tierra se pueden considerar sin complicación adicional del algoritmo.
4. Independiente del tamaño y relación (**R/X**) del sistema la solución se obtiene entre 2-4 iteraciones.
5. Aunque el método de solución del Jacobiano, empleado (factorización de Gauss) se comporta bien aún con matrices no dominantes (elemento de la diagonal pequeño), de una manera sencilla durante el proceso de solución se pueden intercambiar filas para obtener matrices dominantes, lo anterior se suele presentar en sistemas radiales en los cuales hay elementos con $R \ll X$ y $X \gg R$, para $R \ll X$ se tiene $\Delta P = H\Delta\delta$ $\Delta Q = L\Delta E/E$ Para $R \gg X$ se tiene $\Delta Q = J\Delta\delta$ $\Delta P = N\Delta E/E$.

REFERENCIAS

1. TINNEY, W. P. and WALKER, J. W. **Direct Solutions of Sparce Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization.** IEEE Vol. 55 No. 1967.
2. TINNEY, W. P., HART, C. E. **Power Flow Solutions by Newton's Methods.** IEEE Trans power App. Syst. Vol. Pag. 8, Nov. 1967
3. RAJAGOLAPAN. **A new computation Algithm for load flow study of radial distribution system.** IEEE May. 1978.
4. TAKAHASHI, K. **Formation of a Sparce bus Impedance Matriz and its Application to short circuit study.**
5. FLOREZ, L. **Algunas consideraciones sobre ordenamiento y solución de flujos de carga en sistemas radiales.** Universidad Nacional. 1984.