

# Simulación del flujo de gas en ductos de escape de motores de combustión interna. Primera parte: aspectos teóricos

## Internal combustion engine exhaust pipe flow simulation. Part I: theoretical aspects

Juan Miguel Mantilla<sup>1</sup>, Camilo Andrés Falla<sup>2</sup> y Jorge Arturo Gómez<sup>3</sup>

### RESUMEN

La simulación del sistema de escape de un motor de combustión de cuatro tiempos encendido por chispa se puede realizar a partir de la teoría de flujo inestable de gases utilizando ondas de presión. El método aquí explicado se basa en la discretización de espacios interpolables denominados mallas, que se ubican a lo largo de toda la tubería sin importar la forma o el tamaño de ésta. Se hace entonces una exploración teórica por los aspectos más importantes, como son el movimiento y choque de las ondas de presión y su aplicación a casos encontrados en ductos de motores reales. Así mismo se plantea la forma en que debe realizarse la simulación utilizando como base la anterior exploración. Los resultados presentados en forma de ecuaciones para esta primera entrega, muestran la gran influencia que ejerce el movimiento de las ondas de presión dentro de un motor sobre el flujo a través del mismo y por ende sobre su desempeño final.

**Palabras clave:** Ducto de escape, flujo inestable de gas, motor de combustión interna, ondas de presión.

### ABSTRACT

Unsteady gas flow theory can be used for simulating a spark ignition internal combustion engine's exhaust system, using pressure waves. The method explained here is based on the discretization of interpolated spaces (called meshes) which are located throughout the whole length of the exhaust pipe, irrespective of its form or size. The most important aspects of this theory are theoretically explored, such as pressure wave movement and shock and their application to cases found in real engines' exhaust pipes. This work also considers how the simulation must be made, based on the previous exploration. The results (presented as equations in this first paper) show the great influence exerted by pressure wave movement on flow through the engine and therefore on its final performance.

**Keywords:** exhaust pipe, internal combustion engine, pressure wave, unsteady gas flow.

Recibido: mayo 27 de 2008

Aceptado: marzo 2 de 2009

### Introducción

El flujo de gas que atraviesa un motor se comporta de manera inestable. Se define como flujo inestable de gas cuando la presión, la temperatura y la velocidad de partícula cambian en el tiempo.

En el caso del flujo de gas en la admisión y escape de un motor, el comportamiento inestable se da por cambios en la presión debido a la rápida apertura y cierre de las válvulas del motor, esto hace que la presión en la tubería cambie con el tiempo, así el motor se encuentre en un régimen de carga y velocidad fijo.

Desde los trabajos originales de Wallace y Nassif, 1953, Rudinger, 1955, y Benson, 1964, se plantea un método para solucionar la dinámica del flujo inestable en motores de combustión interna. Debido a las condiciones de la época, las soluciones debían calcularse utilizando regla de cálculo u otros métodos similares, dando como resultado una baja precisión en los resultados como conse-

cuencia además de un trabajo por demás dispendioso. La crisis del petróleo en los años 70 obligó a muchos fabricantes a pensar en mejores métodos para diseñar sus motores (Pulkrabek, 2004). La simultánea masificación de los computadores permitió incluir como rutinas los métodos propuestos en los años 50 y 60 para simular el flujo en la admisión y escape de motores. Estas rutinas, sumadas a rutinas programadas para resolver el ciclo cerrado de los motores, dieron como resultado la posibilidad de realizar simulaciones unidimensionales para un motor completo (Novak y Blumberg, 1978). Los resultados fueron satisfactorios permitiendo entre otras cosas entender algunos fenómenos de flujo a través de válvulas y restricciones, y a la vez ahorrar enormes cantidades de dinero en la fase de diseño al poder probar los motores de forma virtual. Muchos de estos modelos originales no han sufrido variaciones hasta la fecha. Quizás los aportes más importantes en los últimos años consisten en: (a) la obtención experimental de coeficientes de descarga más precisos para elementos como válvulas y mariposas (Blair, McBurney et ál., 1998; Blair, Mackey et ál. 2001),

<sup>1</sup> Ingeniero mecánico, Universidad Industrial de Santander, Colombia. M.Sc., en Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes, Colombia. Profesor asistente, Universidad Nacional de Colombia. [jmmantillag@unal.edu.co](mailto:jmmantillag@unal.edu.co)

<sup>2</sup> Ingeniero mecánico, Universidad Nacional de Colombia. Investigador. grupo de Investigación en Biocombustibles, Energía y Protección del Medio Ambiente, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia. [cafallaa@unal.edu.co](mailto:cafallaa@unal.edu.co)

<sup>3</sup> Ingeniero Mecánico, Universidad Nacional de Colombia. Investigador, grupo de Investigación en Biocombustibles, Energía y Protección del Medio Ambiente, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia. [jgomez@unal.edu.co](mailto:jgomez@unal.edu.co)

(b) la mayor cantidad de variables que se pueden analizar con este tipo de modelos a medida que la capacidad computacional es mejor (Bayraktar, 2005; Mantilla, Galeano y Ochoa, 2007), y (c) el cambio en los métodos de solución, se pasó de solucionar las ecuaciones para las ondas de presión utilizando el método de las características (Benson, 1964 y 1982) a métodos de diferencias finitas (Blair, 1999; Blair, Mackey *et al.* 2001; Alvarez, Callejón, 2005). Otra dirección que han tomado los trabajos en el área es hacia modelado multidimensional del flujo, haciéndose muy fuerte en los años 80 y 90 principalmente. Este tipo de modelos requieren de una capacidad computacional alta debido a que deben resolver las ecuaciones de flujo para las tres dimensiones físicas más una dimensión de tiempo y deben incluir necesariamente los fenómenos turbulentos que afectan al flujo (Haworth, 2005).

Los modelos unidimensionales para el flujo en ductos se pueden clasificar en (Heywood, 1988): (1) modelos cuasi-estables, (2) modelos de llenado y vaciado, (3) modelos de dinámica de gases. Los primeros dos son modelos donde se entregan como resultados los valores para los flujos a través de restricciones utilizando volúmenes de control finitos, muy usados para el análisis de sistemas particulares. El modelo de dinámica de gases describe las variaciones espaciales en el flujo y la presión a lo largo de ductos de diferentes formas y tamaños. Este último es el modelo que se trabaja en este artículo.

Debido a que las características de desempeño de los motores son controladas significativamente por el movimiento de las ondas de presión (Blair, 1999), es muy importante entender este mecanismo de flujo para intentar analizar o diseñar un motor. Es así como en este primer trabajo se presenta toda la fundamentación teórica para realizar la simulación de ductos de escape, y en un segundo artículo se mostrarán los resultados del programa desarrollado junto con los experimentos de validación realizados. Dentro del documento se trata inicialmente la teoría del movimiento y reflexión de las ondas de presión en un ducto unidimensional (puntos 1 y 2), para luego presentar la forma en que toda la teoría se debe consolidar en un modelo computacional.

## Movimiento de las ondas de presión

Es muy familiar para el ser humano el comportamiento de las ondas de presión de pequeña amplitud debido a que se parece al de las ondas de sonido que se escuchan a diario. Cuando una persona inhala se genera una caída de presión que forma un ruido al chocar con ondas de presión de otra amplitud que se encuentran en el sistema respiratorio y que se dirigen fuera de la boca, sin embargo la masa de aire ingresa al sistema respiratorio. Algo similar sucede con el proceso de exhalación, pero en este caso la masa y las ondas de sonido viajan en la misma dirección.

En la Figura 1 se pueden ver los dos tipos clásicos de una onda de presión, en la Figura 1(a) se observa una onda de compresión (masa en la misma dirección de la onda) y en la Figura 1(b) se observa una onda de expansión, esto simplemente se deduce observando si la presión del pico de la onda es mayor o menor a la presión de referencia.

## Velocidad de propagación de ondas de presión acústicas

Se va a usar la presión atmosférica del lugar como la presión de referencia. Entonces se define la relación de presión como  $p = \frac{p}{p_0}$

(1). La velocidad de una onda de sonido en el aire está dada por

$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$  (2);  $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$  (3). De la ecuación de estado se tiene que:  $p_0 = \rho_0 RT_0$  (4).

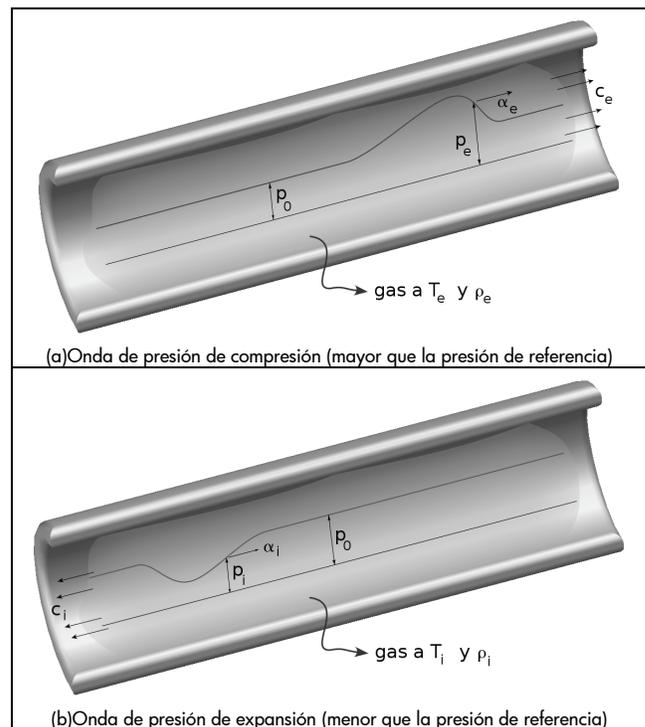


Figura 1. Esquema de tipos de ondas

## Obtención de la velocidad de partícula en flujo inestable de gases

Para poder hacer el análisis y obtener la solución de la velocidad de propagación de una onda de amplitud finita, se usa la notación Lagrangiana que se muestra en la Figura 2.

En la Figura 2(a) se presenta una sección de una tubería con un valor de una unidad de área, en donde hay un elemento AB de longitud finita  $dx$ , el cual está a una distancia  $x$  del origen de esta sección. En la Figura 2(b) se muestra la misma tubería luego de haber transcurrido un cierto tiempo, donde se indica el desplazamiento y el cambio en la longitud del elemento AB debido a una onda de presión de amplitud finita.

Para obtener la velocidad de la partícula, inicialmente se debe calcular la diferencia de presión a través de un elemento de longitud  $dx$ .

La nueva longitud del elemento después de un cierto tiempo es:

$$\left(1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right) dx \quad (5).$$

Como la masa en cada uno de los elementos se mantiene constante, entonces se tiene:  $m_f - m_0 = 0$  (6). Y conociendo que la masa es función de la densidad y el volumen:  $m = \rho V$  (7). El volumen de cada elemento es:  $V_0 = A dx$  y  $V_f = A \left[1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right] dx$  (8).

Tomando las ecuaciones (7) y (8), reemplazando e igualando se obtiene:  $\rho_0 A dx = \rho A \left(1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right) dx$  (9). Despejando y eliminado términos semejantes:  $\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{\partial L}{\partial x}$  (10).

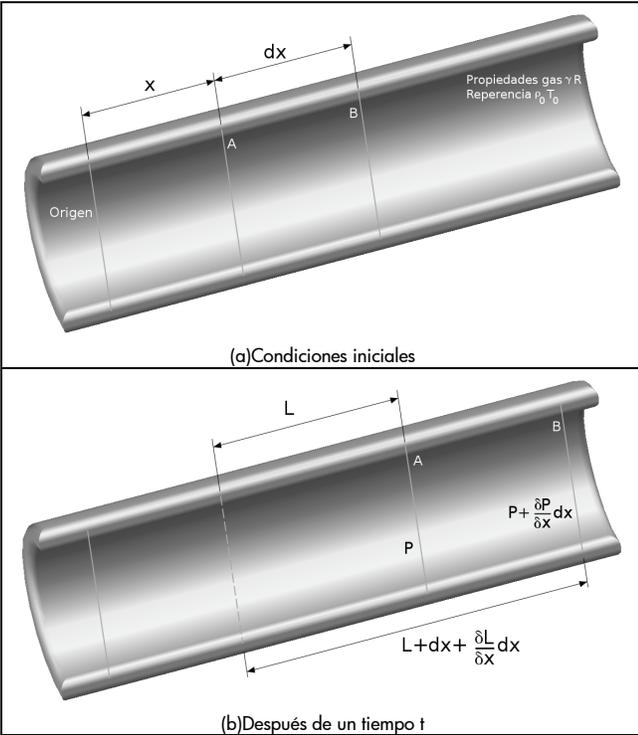


Figura 2. Notación lagrangiana para una onda de presión

Si se toma el proceso como isentrópico (Blair, 1999):  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$  (11). Reemplazando (10) en (11) entonces:

$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right)^{-\gamma}$  (12). Se despeja la presión y se deriva parcialmente con respecto a la distancia:  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p_0 \left(1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$

(13). Ahora se hace un análisis de las fuerzas que afectan al elemento AB, en el cual se observa que las fuerzas dependen únicamente de la presión a la que se encuentra sometido el elemento en cada uno de sus lados:  $\sum F_{AB} = ma$  (14);  $F = pA$  (15);  $F_A = Ap$ ,  $F_B = -A\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)$  (16).

Reemplazando y despejando se obtiene la sumatoria de fuerzas:  $A\left(p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} A dx$  (17). La masa en el elemento es:  $m_{AB} = \rho_0 A dx$  (18). La aceleración se obtiene derivando la longitud L con respecto al tiempo en que se desplaza el elemento AB:  $a = \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$  (19). Ahora se reemplazan las ecuaciones (17) a (19) en la ecuación (14) y se obtiene:

$-\frac{\partial p}{\partial x} A dx = \rho_0 A dx \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$  (20). Eliminando el área de la tubería y el desplazamiento dx, y sustituyendo (13) en (20) se tiene:  $\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial L}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}$  (21). La velocidad del sonido

de referencia esta dada por:  $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$  (22). Para facilitar el manejo matemático posterior, se hace un cambio de variable  $x = \text{constante}$ :  $y = (x + L)$  (23);  $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + \frac{\partial L}{\partial x}$  (24);  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$  (25).

Estas ecuaciones se reemplazan en (21):  $a_0^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  (26).

La ecuación 26 es la ecuación fundamental termodinámica, y su solución se plantea a continuación. Se asume:  $\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$  (27).

Derivando la ecuación (27) se obtiene:  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$  (28)

donde  $f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d\left(f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)}{d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$  (29). De esta forma por transposición:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)$$
 (30), donde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
 (31).

Sustituyendo en la ecuación fundamental:

$$a_0^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
 (32), o mejor:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{-\frac{\gamma-1}{2}} = \pm \frac{1}{a_0} f'\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
 (33). Integrando la ecuación e introduciendo

una constante, k:  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} = \pm \frac{\gamma-1}{2a_0} f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + k$  (34). Utilizando las ecuaciones (11), (12), (23), (24) y, sabiendo que  $y = x + L$ , entonces:  $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 + \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$  Para dar la solución en los términos

definidos al principio, se dice que  $x = \text{constante}$ , donde la velocidad de partícula en el gas esta dada como el cambio de la longitud L con respecto al tiempo:  $f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial(x+L)}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = c$  (35). De esta

forma:  $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \pm \frac{(\gamma-1)c}{2a_0} + k$  (36).

Para saber el valor de la constante k, se toman las condiciones iniciales ya definidas:  $p = p_0$ ,  $c = 0$ , con lo que se obtiene  $k = 1$ . Con esto se obtiene la ecuación para la velocidad de partícula c en un

flujo inestable de gases:  $c = \pm \frac{2a_0}{\gamma-1} \left[ \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]$  (37). El signo de-

pende del valor de la presión, si  $p > p_0$ , el signo es positivo y es una onda de compresión, si  $p < p_0$ , el signo es negativo y es una onda expansiva.

**Relación de amplitud de presiones**

Para hacer más fácil el manejo de algunas ecuaciones, existe una metodología que se basa en usar la relación de amplitud de presiones como se muestra a continuación.

La relación de amplitud de presiones está definida como:

$$X = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$
 (38). Cambiando la ecuación 37 a la nueva notación:

$$c = \frac{2}{\gamma-1} a_0 (X - 1)$$
 (39).

Para simplificar aún más, se pueden definir algunas variables que reducen las expresiones que usan el calor específico, estas son:

$$G_3 = \frac{4-2\gamma}{\gamma-1} \text{ (40)}; G_4 = \frac{3-\gamma}{\gamma-1}; G_5 = \frac{2}{\gamma-1}; G_6 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \text{ (43)};$$

$$G_7 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \text{ (44)}; G_{17} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \text{ (45)}; G_{35} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \text{ (46)}; G_{67} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \text{ (47)}.$$

Esta notación facilita mucho el manejo de las ecuaciones debido a que se pueden volver aditivas o subtractivas así:

$$G_4 = G_5 - 1 = \frac{2}{\gamma-1} - 1 = \frac{2-\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{1-\gamma}{\gamma-1}, G_7 = G_5 + 2, G_3 = G_5 - 2,$$

$$G_6 = G_3 + 3.$$

Teniendo presente lo anterior, las ecuaciones 38 y 39 quedan:

$$c = \frac{2}{\gamma-1} a_0 (X-1) = G_5 a_0 (X-1) \text{ (48)}; X = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{G_{17}} \text{ (49)}.$$

**Velocidad de propagación**

La velocidad de propagación de una onda con una presión  $p$  y una temperatura  $T$  esta definida como la suma de la velocidad acústica local y la velocidad de partícula local:  $\alpha = a + c$  (50).

La velocidad acústica,  $a$ , esta dada por:  $a = \sqrt{\gamma RT}$  (51). Asumiendo que los cambios entre las condiciones de referencia, y las condiciones de la onda de presión van a ser isentrópicos se tiene que:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \text{ (52)}; \frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = p^{G_{17}} = X \text{ (53)};$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = X^{\frac{2}{\gamma-1}} = X^{G_5} \text{ (54)}. \text{ Donde la velocidad de propagación}$$

$$\text{es: } \alpha = a_0 X + \frac{2}{\gamma-1} a_0 (X-1) = a_0 \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - \frac{2}{\gamma-1} \right] \text{ (55)}. \text{ En términos}$$

simplificados la ecuación queda definida como:  $\alpha = a_0 [G_6 X - G_5]$  (56).

**Calculo de propiedades para un choque de ondas en movimiento dentro de un flujo inestable de gases.**

Observando el caso de la onda de choque AB que se muestra en la Figura 3, la misma tiene una velocidad de propagación  $\alpha$  y se está moviendo dentro de un gas estacionario con condiciones de referencia  $\rho_0$  y  $p_0$ . La onda tiene una presión y una densidad  $p$  y  $\rho$  detrás del frente de la onda de choque, y tiene una velocidad de partícula  $c$  asociada al gas.

Para poder analizar de manera más sencilla el fenómeno que se muestra en la Figura 3(a), se convierte en un choque estacionario haciendo que el medio de referencia sea el que se mueva y el frente de la onda de choque se quede quieto como se indica en la Figura 3(b).

Para un choque estacionario se aplica la ecuación de continuidad:  $m_A = m_B$  (57);  $(\alpha - c)\rho A = \alpha\rho_0 A$  (58). Ahora se aplica la ecuación de momento, donde la fuerza es igual a la derivada del momento:  $(\alpha - (\alpha - c))\alpha\rho_0 A = (p - p_0)A$  (59);  $c\alpha\rho_0 = p - p_0$  (60). Se reorganiza y se tiene que:  $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{c\alpha\rho_0}{\rho}$  (61). La primera ley de la termodinámica

a través del frente de la onda choque estacionaria es:  $C_p T_A + \frac{(\alpha - c)^2}{2} = C_p T_B + \frac{\alpha^2}{2}$  (62), donde  $C_p$  es el calor específico a

presión constante:  $\frac{\gamma R}{\gamma-1} T_A + \frac{(\alpha - c)^2}{2} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_B + \frac{\alpha^2}{2}$  (63);

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{(\alpha - c)^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{\alpha^2}{2} \text{ (64)},$$

$$-\alpha c + \frac{c^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0} \text{ (65)}; \alpha^2 - \frac{\gamma+1}{2} \alpha c - a_0^2 = 0 \text{ (66)}. \text{ En-}$$

tonces:  $c = \frac{2a_0}{\gamma+1} \left( \frac{\alpha}{a_0} - \frac{a_0}{\alpha} \right)$  (67). Combinando las ecuaciones (58) y

$$(64): \alpha^2 - a_0^2 = \frac{\gamma+1}{2} \left( \frac{p - p_0}{\rho_0} \right) \text{ (68)}. \text{ Dividiendo todo por } a_0^2 \text{ y sustitu-}$$

yéndolo en  $\frac{p}{\rho_0}$ , se suministra la relación para la velocidad de pro-

pagación del movimiento de la onda de choque de compresión:  $\alpha = a_0 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p}{p_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}$  (69). Se reemplaza esta última expresión por

la velocidad de propagación de choque y se supe en la ecuación 67, lo que da una relación directa para la velocidad de partícula

del gas así:  $c = \frac{a_0}{\gamma} \left( \frac{p}{p_0} - 1 \right)$  (70).

$$c = \frac{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p}{p_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p}{p_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}$$

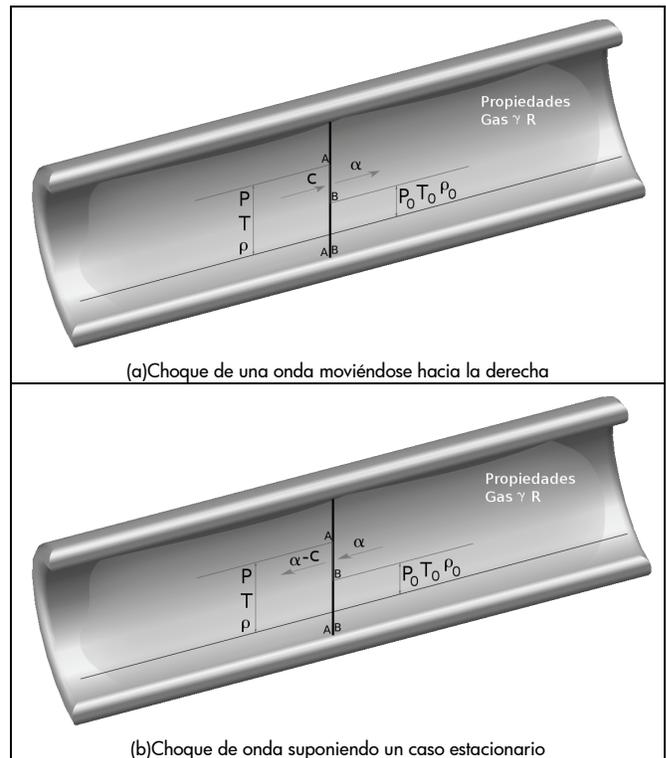


Figura 3. Choque de onda

La temperatura y la densidad dadas para la posición detrás del frente de onda de choque se relacionan por la siguiente ecuación de estado:  $\frac{p}{\rho_0} = \frac{\rho RT}{\rho_0 RT_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0}$  (71).

Reemplazando la ecuación 58 en 71:  $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \left( \frac{\alpha - c}{\alpha} \right)$  (72).

Reemplazando la ecuación 67 en 72:  $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{a_0^2}{\alpha^2} \right)$  (73).

Reemplazando la ecuación 69 en 73 se obtiene la relación para la

temperatura:  $\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \left( \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p}{p_0} + 1}{\frac{p}{p_0} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)$  (74). Mientras que la relación pa-

ra la densidad se saca de reemplazar la ecuación 71 en 74:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_0}{p_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p} \quad (75).$$

Si se analizan las ecuaciones 74 y 75 se observa que el comportamiento del flujo no es isentrópico cuando existe choque de ondas. Un comportamiento isentrópico de compresión muestra la siguiente relación entre la presión y la densidad:  $\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}$  (76).

Entonces existe una diferencia sustancial ente la ecuación 75 y 76.

**Movimiento en una tubería de ondas de presión opuestas**

En una tubería cuando dos ondas de presión viajan una hacia la otra y se encuentran, se presenta lo que se conoce como superposición de ondas. El fenómeno se muestra en la Figura 4(a) donde se ven dos ondas cuadradas. La onda ABCD con una presión  $p_1$  se mueve hacia la derecha y la onda EFGH con una presión  $p_2$  se mueve hacia la izquierda. En la Figura 4(b) se muestra la superposición de las ondas en donde el segmento FC tiene la presión de superposición  $p_s$ , el segmento BE la presión  $p_1$  y el segmento DG la presión  $p_2$ . Estas ondas son una representación del fenómeno físico real.

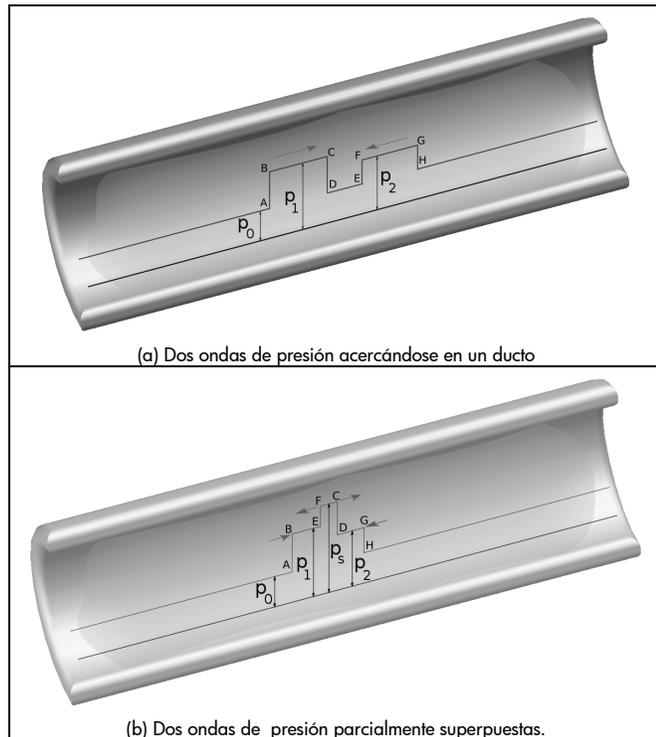


Figura 4 superposición de ondas

Teniendo que la velocidad del sonido de referencia es  $a_0$  y asumiendo que el sentido positivo matemático es hacia la derecha, se obtiene que la velocidad de partícula y la velocidad de propagación de cualquier punto de la onda de presión BC es, desde las ecuaciones 48 y 56:  $c_1 = G_5 a_0 (X_1 - 1)$ ,  $\alpha_1 = a_0 (G_6 X_1 - G_5)$ . De mane-

ra similar se calcula para la onda FG la velocidad de partícula y la velocidad de propagación:  $c_2 = -G_5 a_0 (X_2 - 1)$ ,  $\alpha_2 = -a_0 (G_6 X_2 - G_5)$ . Durante la superposición la velocidad del sonido local para las columnas BE y DG son respectivamente:  $a_1 = a_0 X_1$ ,  $a_2 = a_0 X_2$ . Y ahora la onda en el punto F se esta moviendo dentro del gas con un nuevo nivel de presión de referencia  $p_1$ , con esto se puede deducir que la velocidad de partícula de F relativa a BE es:

$$c_{FrelBE} = -G_5 a_1 \left[ \left( \frac{p_s}{p_1} \right)^{G17} - 1 \right] = -G_5 a_0 (X_s - X_1)$$

de F se puede calcular como la suma de la velocidad relativa de F con respecto a BE y la velocidad de partícula de BE que es la velocidad de la onda de presión  $p_1$ :  $c_s = c_{FrelBE} + c_1 = G_5 a_0 (2X_1 - X_s - 1)$ . De igual forma se calcula la velocidad de partícula con respecto al punto C, la cual es relativa a DG:  $c_s = c_{FrelBE} + c_1 = -G_5 a_0 (2X_2 - X_s - 1)$ . Al igualar las dos velocidades, se puede obtener una relación para la presión de superposición:  $X_s = X_1 + X_2 - 1$  (77). Expresando la ecuación 77 de otra manera:

$$\left( \frac{p_s}{p_0} \right)^{G17} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{G17} + \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{G17} - 1$$
 (78). Se puede deducir entonces que:

$c_s = G_5 a_0 (X_1 - X_2) = c_1 + c_2$  (79). La velocidad de propagación de superposición hacia la derecha y hacia la izquierda se define como: la suma de la velocidad del sonido y la velocidad de partícula de superposición:

$$\alpha_{SHaciaDerecha} = a_s + c_s = a_0 (G_6 X_1 - G_4 X_2 - 1)$$
 (80);

$$\alpha_{SHaciaIzquierda} = -a_s + c_s = -a_0 (G_6 X_1 - G_4 X_2 - 1)$$
 (81). El flujo másico de superposición se calcula por medio de la ecuación de continuidad:  $m = \rho_s A c_s$  (82);  $\rho_s = \rho_0 X_s^{G5}$  (83). Dentro de los ductos siempre van a existir ondas de presión moviéndose hacia la izquierda y hacia la derecha, pero estas nunca se pueden percibir independientemente, más bien deben ser tomadas bajo una única presión de superposición. Es en ese punto donde se genera la dificultad en el entendimiento del comportamiento de las presiones a través del tiempo.

**Perdidas de presión por fricción y calor generado durante la propagación de una onda de presión.**

El flujo en un ducto induce fuerzas que actúan contra el mismo debido a las fuerzas cortantes viscosas generadas en las paredes de la tubería. El efecto de la fricción genera una caída de presión en la onda y una generación interna de calor por el trabajo producido por las fuerzas cortantes. Esto se muestra de manera más clara en la Figura 5.

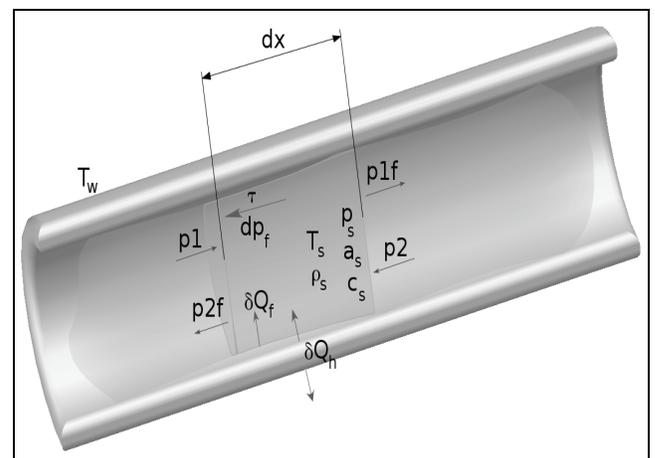


Figura 5. Pérdidas por fricción y transferencia de calor en una tubería

El esfuerzo cortante por fricción es:  $\tau = C_f \frac{\rho_s c_s^2}{2}$  (84). Donde  $C_f$  es un factor empírico para la fricción llamado coeficiente de fricción. La fuerza  $F$  empleada para generar el esfuerzo cortante por fricción, al recorrer la distancia  $dx$  en una tubería de diámetro  $d$  en un intervalo de tiempo  $dt$ , es:  $F = \pi d \tau dx = \pi d \tau c_s dt$  (85). La pérdida de presión se deduce de unir las ecuaciones 84 y 85:  $dp_f = \frac{F}{A} = \frac{2C_f \rho_s c_s^3 dt}{d}$  (86). Después de la pérdida de presión por fricción, se calcula la presión de superposición más el efecto de la pérdida de presión:  $p_{sf} = p_s \pm dp_f$ ,  $X_{sf} = \left(\frac{p_{sf}}{p_0}\right)^{G_1}$  (87). Tomando

las ecuaciones de momento y continuidad de este sistema y despejando para obtener la relación de presiones y la velocidad de superposición se tiene que:  $X_{sf} = (X_{1f} + X_{2f} - 1)$  (88),

$c_{sf} = G_s a_0 (X_{1f} - X_{2f})$  (89). De estas dos ecuaciones simultáneas se puede obtener la relación de amplitud de presión  $X_{1f}$  y  $X_{2f}$ , al conocer el valor de la velocidad de partícula  $c_{sf}$ :  $c_{sf} = c_s + \frac{P_{sf} - P_s}{\rho_s c_s} \pm dp_f$  (90). Ahora se puede conseguir el

valor de la presión después de tener en cuenta el efecto de la fricción:  $p_{1f} = p_0 X_{1f}^{G_1}$ ,  $p_{2f} = p_0 X_{2f}^{G_2}$  (91). El trabajo realizado que es igual a la energía interna se obtiene de la multiplicación de la fuerza aplicada por la distancia recorrida:  $\delta W_f = \delta Q_f = F dx = \frac{\pi d C_f \rho_s c_s^4 dt^2}{2}$  (92). La transferencia de calor du-

rante la propagación de la onda de presión se da por las paredes de la tubería por conducción, convección y radiación. Teniendo en cuenta que la transferencia de energía más significativa se da por convección, el análisis se enfoca sólo a este modo de transferencia de calor. Se necesita entonces obtener los números adimensionales y el coeficiente de fricción de toda la tubería (Mills, 1995). Primero el número de Nusselt definido como:  $Nu = \frac{C_f Re}{2}$

(93). Este número contiene la relación directa entre el coeficiente de transferencia de calor por convección  $C_h$ , la conductividad térmica del gas  $C_k$ , y el diámetro efectivo de la tubería así:  $Nu = \frac{C_h d}{C_k}$  (94). De las ecuaciones anteriores se puede determinar el

coeficiente de transferencia de calor por convección:  $C_h = \frac{C_k C_f Re}{2d}$  (95). Utilizando la ley de enfriamiento de Newton

para la transferencia de calor (Mills, 1995) se obtiene:  $\delta Q_h = \pi d C_h dx (T_w - T_s) dt$  (96). La total energía transferida al/desde sistema es la suma de la energía interna obtenida por fricción y la transferencia de calor por convección:  $\delta Q_{th} = \delta Q_f + \delta Q_h$  (97).

### Ondas de reflexión en discontinuidades en propiedades del gas

La discontinuidad se presenta cuando una onda de presión se mueve hacia la derecha, con un estado determinado y se encuentra con otra onda que esta viajando hacia la izquierda con diferente estado. La discontinuidad se produce ya que las dos ondas no pueden superponerse debido a que existen diferencias en sus propiedades, por eso lo primero que se debe hacer es que estas dos ondas tengan las mismas propiedades termodinámicas luego de que se encuentren, tal como se muestra en la Figura 6.

Por continuidad todo lo que ingrese en el lado a debe salir por el lado b,  $m_{ladoo a} = m_{ladoo b}$  (98).

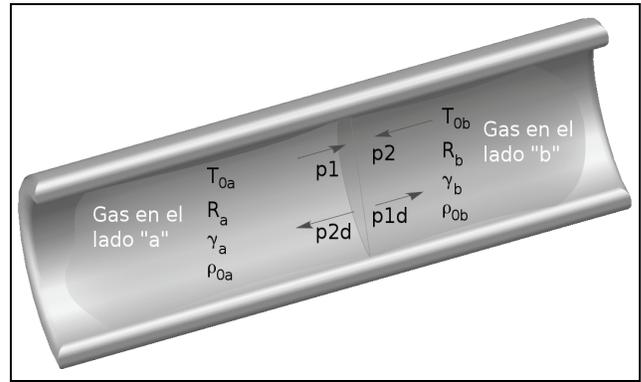


Figura 6. Discontinuidad debido a diferencia de propiedades y ondas de reflexión

De la ecuación de momento:

$$A(p_{sladoo a} - p_{sladoo b}) = m_{ladoo a} c_{sladoo a} - m_{ladoo b} c_{sladoo b} \quad (99).$$

Se supone que la presión de superposición y la velocidad de partícula de superposición son idénticas a cada lado de la discontinuidad:  $p_{sladoo a} = p_{sladoo b}$  (100),  $c_{sladoo a} = c_{sladoo b}$  (101). La solución es dividida en dos casos diferentes, uno simple y uno complejo, dependiendo de si la composición del gas es igual o diferente entre los lados a y b. Para el caso simple en el que se presume que  $\gamma_a$  y  $R_a$  son iguales a  $\gamma_b$  y  $R_b$ , la ecuación 101 se reduce a:  $G_{sa} a_0 (X_1 - X_{2d}) = G_{sb} a_0 (X_{1d} - X_2)$  (102)

Si la composición es la misma, entonces:  $\left(\frac{a_{0a} G_{sa}}{a_{0b} G_{sb}}\right) (X_1 - X_{2d}) = (X_{1d} - X_2)$  (103). La ecuación 99 queda como:  $(X_1 + X_{2d} - 1)^{G_{7a}} = (X_{1d} + X_2 - 1)^{G_{7b}}$  (104). En el caso simple, los valores de  $G_{7a}$  y  $G_{7b}$  son exactamente iguales:  $X_1 + X_{2d} - 1 = X_{1d} + X_2 - 1$

(105). La solución obtenida es:  $X_{2d} = \frac{2X_2 - X_1 \left(1 - \frac{a_{0a} G_{sa}}{a_{0b} G_{sb}}\right)}{1 + \frac{a_{0a} G_{sa}}{a_{0b} G_{sb}}}$ , donde:

$$P_{2d} = p_0 X_{2d}^{G_2} \quad (1.106), \quad X_{1d} = X_1 + X_{2d} - X_2 \text{ donde } P_{1d} = p_0 X_{1d}^{G_1} \quad (107).$$

Para el caso más complejo donde el gas en el lado a y en el lado b tienen estados diferentes, no se pueden hacer simplificaciones sencillas. Se debe eliminar una de las variables desconocidas,  $X_{1d}$  o  $X_{2d}$  (ecuaciones 103 y 104), y resolver por métodos numéricos las variables desconocidas. Al final se hace lo mismo que para las ecuaciones 106 y 107 pero incluyendo las propiedades del gas adecuadamente en el lado de la discontinuidad (Blair, 1999):  $P_{1d} = p_0 X_{1d}^{G_{7a}}$  (108),  $P_{2d} = p_0 X_{2d}^{G_{7b}}$  (109).

### Reflexión de ondas de presión

Las ondas de presión pueden surgir de múltiples fuentes. Principalmente de la reflexión de las ondas de presión en los extremos de los ductos de admisión o escape. Estos límites incluyen las uniones al inicio o fin de la tubería o cualquier cambio en el área transversal, ya sea brusco o gradual. Todas las reflexiones son por definición un proceso de superposición en el que la onda de reflexión se mueve en oposición a la onda incidente que la produce. En los motores de combustión interna la toma y expulsión de aire son notables en los extremos del sistema y por esto ondas de presión expansivas son enviadas al sistema de admisión por un proceso de inducción y ondas de contracción son enviadas al sistema de escape en el orden del ciclo del motor.

En la Figura 7 se muestra el diagrama de un motor de combustión y se han numerado los puntos donde se presentan reflexiones en las ondas de presión. El punto 1 se encuentra en la toma de aire, donde la onda de inducción es reflejada a la atmósfera. El punto 2 se sitúa en una cámara, donde la oscilación de las ondas de presión son atenuadas y su amplitud decrece. El punto 3 muestra un filtro, el cual es una restricción al flujo del aire y por lo tanto ofrece la posibilidad de generar "ecos" en las ondas. El punto 4 es una garganta en el ducto y por medio de la mariposa puede ofrecer una mayor o menor resistencia al flujo. En el punto 5 se encuentra el múltiple de admisión, el cual es una ramificación en la que la onda de presión se debe dividir y enviar ondas de reflexión de regreso debido al cambio de sección.

En el punto 6 se encuentra el múltiple de escape en el cual la onda de presión también se debe dividir y mandar ondas de reflexión a partir del cambio de sección. Cuando una onda de presión llega a la unión de varias ramas, los valores de transmisión a cada una de las ramificaciones serán función de las áreas de la tubería y de todas las reflexiones presentes. Cuando la onda de presión de inducción llega al inicio de la tubería en el punto 1 una onda de reflexión se formará y se superpondrá inmediatamente al pulso de la presión incidente. En resumen, todos los procesos de reflexión son procesos de superposición.

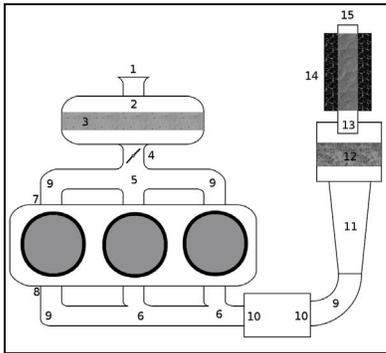


Figura 7. Esquema de ondas de presión en un motor de combustión. Tomado de Blair, 1999.

Los puntos 7 y 8 corresponden a las válvulas de los cilindros, en las cuales dependiendo del valor de apertura determinado por el ciclo del motor, se comportan como restricciones de diferentes valores o como un punto exacto de "eco" cuando se encuentran completamente cerradas. En el punto 9 se encuentra un codo en el cual la onda de presión se refleja en mayor o menor grado dependiendo del radio del codo. El punto 10 es una expansión y contracción súbita en la tubería. El punto 11 en el ducto de escape es un cambio de área suave que actúa como un difusor o una tobera dependiendo de la dirección del flujo, generando en cualquiera de los dos casos reflexiones. El punto 12 es un catalizador que presenta una restricción al flujo no muy diferente al filtro en 3, pero que al presentar reacciones químicas a la vez, hace difícil los cálculos teóricos para determinar el movimiento de la onda en este espacio. El punto trece muestra un punto con múltiples salidas a una cámara, lo cual es muy común en el diseño de un silenciador. El punto 14 es un elemento de absorción del silenciador que por definición debe generar reflexiones. Y por último se encuentra en el punto 15 el final de tubería, con una terminación "plana" a la atmósfera. En este punto también se generan ondas de reflexión.

Lo dicho anteriormente muestra de manera somera el flujo del aire y gases a través de un motor de combustión interna y determina de cierta forma la manera en que el modelo utilizado debe tra-

bajar y los aspectos que debe tener en cuenta para tratar de mostrar efectivamente los procesos desarrollados en el motor. En este trabajo las ondas incidentes y las propiedades del gas que viaja con ellas se denominan a través del subíndice  $i$ , esto es ( $X_i$ ,  $c_i$ ,  $P_i$ , etc.). Así mismo para las ondas de reflexión y superposición se utilizan los subíndices  $r$  y  $s$  respectivamente ( $X_r$ ,  $X_s$ ,  $c_r$ ,  $c_s$ , etc.). Cuando una onda de presión llega al final de una tubería cerrada, una onda de reflexión se forma en lo que se denomina generalmente como "eco" y de esta forma el modelo matemático determina que la reflexión será una onda de presión igual a la incidente pero que viaja en la dirección opuesta. Lo que se puede decir de manera cierta es que la velocidad de superposición de las partículas es cero:  $c_s = c_i + c_r = 0 \Rightarrow c_r = -c_i$  (110). A partir de esto también se concluye que:  $X_r = X_i$  (111). Y en definitiva el valor de la relación de amplitud de presión es:  $X_s = 2 \cdot X_i - 1$  (112). Esto muestra que sólo es función de la onda incidente. Para el caso en el que la tubería termina de manera plana ante la atmósfera se presentan diferentes situaciones dependiendo de si la onda de presión es de compresión o de expansión. Las ondas de compresión por definición deben producir la salida de gases de la tubería a la atmósfera. Se puede asumir que al final de la tubería la presión es la atmosférica ( $p_0$ ) y por lo tanto  $X_s = X_i + X_r - 1 = 1 \Rightarrow X_r = 2 - X_i$  (113). Así para ondas de compresión las ondas de reflexión serán de expansión. Esto significa que un pulso de expulsión que llega al final de una tubería envía hacia atrás reflexiones de succión a través del motor las cuales ayudan a extraer las partículas de gas fuera de la tubería y lejos del motor. Obviamente esta reflexión puede ser usada por los diseñadores para mejorar los sistemas de escape.

En el caso de ondas de expansión que se suceden en los procesos de admisión, estas son conducidas a través de una tubería con terminación en forma de "campana" y para la cual la aplicación de la primera ley de la termodinámica, bajo suposición de flujo estable, sin transferencia de calor e isentrópico, la diferencia de entalpías puede ser expresada como:  $h_s - h_0 = C_p \cdot (T_s - T_0) = \frac{a_s^2 - a_0^2}{\gamma - 1}$  (114).

Finalmente la correspondencia que expresa la relación de amplitud de presiones para la onda de reflexión es:

$$X_r = \frac{(1 + G_4 \cdot X_i) \pm \sqrt{1 + X_i \cdot (2 \cdot G_4 + 2 \cdot G_6) + X_i^2 \cdot (G_4^2 - G_6^2)}}{G_6} \quad (115).$$

Esta ecuación muestra que la reflexión de una onda de expansión al final de una tubería con terminación de "campana" es una onda de compresión que ayudará a la entrada de aire a través del ducto. En el análisis de las tuberías de terminación plana se hace necesario tener en cuenta la turbulencia generada por este tipo de tubería, y por lo tanto no es posible considerar al flujo como isentrópico. Para poder encontrar el valor de  $X_r$  se plantea la ecuación de momento, lo que resulta en:

$$f(X_r) = 1/2 \cdot \left( X_i + X_r - \sqrt{\frac{1 - (X_i + X_r - 1)^{G_7}}{G_5 \cdot 1 + G_6 \cdot (X_i + X_r - 1)^{G_7}}} \right) - X_i = 0 \quad (116).$$

Para resolver esta ecuación se debe utilizar un método numérico que por medio de iteraciones sucesivas encuentre el valor de  $X_r$  para una presión  $X_i$ . Las ondas de reflexión presentes en las contracciones o expansiones súbitas en la tubería pueden ser tratadas de manera isentrópica asumiendo que la presión de superposición es la misma para ambas partes del flujo (antes y después de la expansión o contracción). Esta suposición sugerida por (Benson, 1982) puede ser aplicada en primera instancia para tratar de obtener una solución aproximada, pero que en definitiva es demasiado

simplista como para tomarla como definitiva. Las ecuaciones aplicables son:  $X_{r1} = \frac{(1-A_r) \cdot X_{i1} + 2 \cdot X_{i2} \cdot A_r}{1+A_r}$  (117);

$$X_{r2} = \frac{2 \cdot X_{i1} - (1-A_r) \cdot X_{i2}}{1+A_r} \quad (118).$$

Para este tipo de ecuaciones y las siguientes que se presentan, la notación del número en el subíndice hace referencia a los valores de las propiedades del gas en cada una de las áreas, siendo el 1 para la primera área que se encuentre con flujo y el 2 para la siguiente área que se encuentra con el flujo.  $A_r$  es la relación entre áreas  $A_2/A_1$  y cuyo intervalo debe estar entre 1/6 y 6 para que las ecuaciones muestren alguna relevancia. A pesar de que las ecuaciones de Benson (1982) no den resultados completamente aplicables, son una excelente aproximación a lo que en realidad sucede en la tubería y son un muy buen punto de partida en las iteraciones necesarias para encontrar el valor numérico de las ondas de reflexión, además de su relativa simplicidad para ser calculadas. Para poder resolver de manera concreta el cambio de área súbita en los ductos se aplican las relaciones bien conocidas de continuidad, primera ley de la termodinámica y momento para el caso de expansiones en las cuales se presentan flujos no isentrópicos debido a la presencia de turbulencias en las esquinas de la sección más grande. El manejo algebraico de estas relaciones se muestra a continuación.

$$\text{Continuidad: } \rho_{01} \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_5} \cdot A_1 \cdot G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}) + \rho_{02} \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_5} \cdot A_2 \cdot G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) = 0 \quad (119)$$

$$\text{Primera Ley: } \left[ (G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}))^2 + G_5 \cdot a_{01}^2 \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^2 \right] - \left[ (G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}))^2 + G_5 \cdot a_{02}^2 \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^2 \right] = 0 \quad (120)$$

$$\text{Momento: } p_0 \cdot A_2 \left[ (X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_1} - (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_1} \right] + \left[ \rho_{01} \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_5} \cdot A_1 \cdot G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}) \right] \cdot \left[ G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}) + G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) \right] = 0 \quad (121)$$

Para resolver simultáneamente estas ecuaciones, como ya se había mencionado, se hace necesaria la utilización de métodos numéricos con los cuales es posible encontrar las tres variables desconocidas ( $X_{r1}$ ,  $X_{r2}$  y  $a_{02}$ ).

En algunos casos se puede encontrar que la velocidad de las partículas en la sección 1 alcanza o incluso sobrepasa la velocidad del sonido. Como se sabe, esto no es posible ya que las partículas en un gas de flujo inestable no se pueden mover más rápido que la onda de presión que les da la señal de movimiento. La máxima velocidad que es permisible en las partículas es la velocidad del sonido en la estación 1. Por lo tanto si: ( $M_{s1}$ : Número de Mach de las partículas en el área 1)  $M_{s1} = \frac{c_{s1}}{a_{s1}} \geq 1 \Rightarrow M_{s1} = 1$  (122). Gracias a

esta ecuación es posible determinar inmediatamente  $X_{r1}$  por medio de:  $X_{r1} = \frac{M_{s1} + X_{i1} \cdot (G_5 - M_{s1})}{M_{s1} + G_5} = \frac{1 + G_4 \cdot X_{i1}}{G_6}$  (123).

Así se simplifica la resolución de las otras ecuaciones y se pueden encontrar las otras dos variables. En la reflexión de ondas de presión para contracción de área se puede considerar un análisis de tipo isentrópico y de flujo inestable, aplicando las mismas tres ecuaciones (primera Ley, momento y continuidad) pero al tratarse de un proceso isentrópico, sólo son dos las variables desconocidas ( $X_{r1}$  y  $X_{r2}$ ) ya que  $a_{02}$  es igual a  $a_{01}$ . Las ecuaciones son:

$$\left[ G_5 \cdot (X_{i1} - X_{r1})^2 + (X_{i1} + X_{r1} - 1)^2 \right] - \quad (124);$$

$$\left[ G_5 \cdot (X_{i2} - X_{r2})^2 + (X_{i2} + X_{r2} - 1)^2 \right] = 0$$

$$(X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_5} \cdot A_1 \cdot (X_{i1} - X_{r1}) + (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_5} \cdot A_2 \cdot (X_{i2} - X_{r2}) = 0 \quad (125)$$

En este caso también se pueden presentar velocidades de partícula iguales a la del sonido, pero en el área 2, de tal forma que si:

$$M_{s2} = \frac{c_{s2}}{a_{s2}} \geq 1 \Rightarrow M_{s2} = 1 \quad (126); \quad X_{r2} = \frac{1 + G_4 \cdot X_{i2}}{G_6} \quad (127).$$

Y esto permite solucionar la única incógnita de manera más sencilla. Cuando en una contracción de área se presenta una garganta, lo cual expone ante el flujo, en su orden, tres diferentes tamaños de área:  $A_1$ ,  $A_t$  y  $A_2$  y con las condiciones de:  $A_1 > A_t$ ,  $A_t < A_2$  y  $A_1 > A_2$ . Este tipo de situaciones es común en los ductos de los motores y por lo tanto es preciso hacer el tratamiento de tal tipo de disposición. El flujo presente entre el área  $A_1$  y  $A_t$  es de tipo isentrópico, pero no así el flujo entre  $A_t$  y  $A_2$  debido a la turbulencia presente en éste cambio de sección. Haciendo un estudio similar al de los otros tipos de contracciones se llega a las siguientes cinco ecuaciones que permiten determinar las cinco variables indeterminadas ( $X_{r1}$ ,  $X_{r2}$ ,  $X_t$ ,  $a_{02}$  y  $c_t$ ). El subíndice  $t$  hace referencia a las condiciones geométricas y a las propiedades del gas localizadas en la garganta.

$$\rho_{01} \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_5} \cdot A_1 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}) + \rho_{02} \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_5} \cdot A_2 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) = 0 \quad (128);$$

$$\left[ (G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}))^2 + G_5 \cdot a_{01}^2 \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^2 \right] - \left[ (G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}))^2 + G_5 \cdot a_{02}^2 \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^2 \right] = 0 \quad (129)$$

$$G_5 \cdot \left\{ [a_{01} \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)]^2 - [a_{01} \cdot X_t]^2 \right\} + \quad (130);$$

$$\left\{ G_5 \cdot a_{01} \cdot [X_{i1} - X_{r1}] \right\}^2 - c_t^2 = 0$$

$$p_0 \cdot A_2 \left[ X_t^{G_1} - (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_1} \right] + \left[ \rho_{01} \cdot (X_{i1} + X_{r1} - 1)^{G_5} \cdot A_1 \cdot G_5 \cdot a_{01} \cdot (X_{i1} - X_{r1}) \right] \cdot \left[ c_t + G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) \right] = 0 \quad (131)$$

En esta configuración el punto donde se puede presentar velocidad con número de Mach igual a 1, es en la garganta, lo cual, si se presenta, permite relacionar a dos de las variables de la siguiente forma:  $M_t = \frac{c_t}{a_{01} \cdot X_t} = 1 \Rightarrow c_t = a_{01} \cdot X_t$  (132). Es común la

presencia de tubos en forma de cono en los ductos de un motor y son usados para aumentar de manera significativa el desempeño del mismo (ver Figura 8). Esto es debido a que las ondas de reflexión formadas en este tipo de tuberías, que son usadas como difusores o toberas, se logren a partir de un proceso más gradual, lo que permite que sean aprovechadas en un mayor intervalo de velocidades del motor. Debido al suave incremento en el área transversal de los conos, lo ideal sería que el análisis se realizara en distancias muy pequeñas, pero esto resultaría en un aumento muy grande de cálculos y por ende en tiempo de procesamiento. Por lo tanto un proceso más práctico y aplicable en esta situación se muestra en la Figura La longitud  $L$  que muestra esta figura es escogida, como se mostrará mas adelante, a partir de la "longitud de malla". Entre las secciones 1 y 2 se puede considerar que existe una expansión súbita y los diámetros  $d_1$  y  $d_2$  a partir de los volúmenes reales en este espacio de la sección:

$$A_1 = \frac{V_1}{L} \Rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} \quad (133).$$

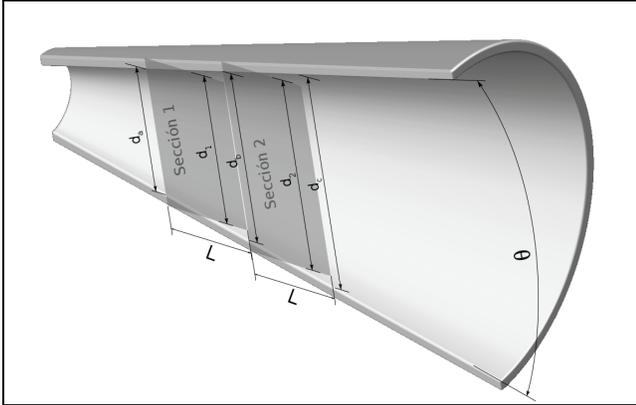


Figura 8. Diámetros y secciones escogidas en un cono.

Al final lo que hay que determinar es la dirección del flujo y después determinar si se utilizan las ecuaciones de contracción o expansión. Uno de los procesos que pueden llegar a ocurrir en un difusor es la separación del flujo de las paredes la tubería. Si esto ocurre el flujo se concentra turbulentamente en el centro del difusor lo cual presenta una situación casi isobárica y un mayor aumento en la ganancia de entropía. Por esto es necesario cambiar la ecuación 12 de expansión súbita y utilizar:  $X_{s1}^{G_1} - X_{s2}^{G_2} = 0$  (134). Sin embargo no siempre que se presente un difusor es necesario hacer este cambio, y es mejor utilizar como discriminante al número de Mach en la superposición de tal forma que si  $M_{s1}$  es mayor o igual a 0,65 se debe utilizar la última ecuación, o si es menor se deben usar las mismas cuatro ecuaciones utilizadas en el caso de expansión súbita. La reflexión de ondas de presión a la salida de un cilindro es fundamental para el flujo de escape de un motor de combustión interna. Aunque en principio podría parecer que la situación se asemeja a la presentada por una contracción súbita, la principal diferencia es el flujo tridimensional presente en este tipo de cámaras. A partir de este flujo se puede suponer que la velocidad de partícula del gas es cero.

Un elemento a tener en cuenta es el tipo de propiedades que presenta el gas en cada instante del escape y que varían de manera determinante los valores que pueden tomar las ondas de presión. Otro elemento diferente a los análisis precedentes es el coeficiente de descarga  $C_d$ , que presenta la válvula y que multiplicado al área máxima de garganta  $A_t$  permite dar un área efectiva de apertura en cada instante de tiempo.

En definitiva luego de efectuar el acostumbrado manejo algebraico, las ecuaciones aplicables son:

$$\rho_{01} \cdot X_t^{G_5} \cdot C_d \cdot A_t \cdot c_t - \quad (135);$$

$$\rho_{02} \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_5} \cdot A_2 \cdot G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) = 0$$

$$G_5 \cdot (a_{01} \cdot X_1)^2 - \quad (136),$$

$$[(G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}))^2 + G_5 \cdot a_{02}^2 \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^2] = 0$$

$$p_0 [X_t^{G_1} - (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_1}] + \rho_{02} \cdot (X_{i2} + X_{r2} - 1)^{G_5} \cdot \quad (137);$$

$G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2}) \cdot (c_t - G_5 \cdot a_{02} \cdot (X_{i2} - X_{r2})) = 0$   
 $G_5 [(a_{01} \cdot X_1)^2 - (a_{01} \cdot X_t)^2] - c_t = 0$  (138). A partir de estas cuatro ecuaciones es posible encontrar las cuatro variables desconocidas  $X_{r2}$ ,  $X_v$ ,  $a_{02}$  y  $c_t$ . Como en anteriores oportunidades, las partículas de

gas pueden alcanzar la velocidad de Mach 1 y esto ayuda a encontrar la solución de 2 variables y simplificar el problema:

$$M_t = \frac{c_t}{a_{01} \cdot X_t} = 1 \Rightarrow c_t = a_{01} \cdot X_t \quad (139); \quad X_t = X_1 \cdot \sqrt{\frac{G_5}{G_5 + 1}} \quad (140).$$

## Modelo Computacional

El proceso del flujo inestable de gases es modelado de la forma en que se presenta en la Figura 3.1. La tubería a ser analizada es dividida en mallas de una longitud dada  $L$ . Las ondas de presión de propagación izquierda y derecha son mostradas también en la Figura 9. La presión en esta malla cualquiera denominada  $J$  es: a la izquierda  $p_R$  y  $p_L$ , y a la derecha  $p_{R1}$  y  $p_{L1}$ . La propiedades del gas en el espacio de la malla son conocidas en cualquier instante de tiempo (tales como la constante del gas  $R$ , la relación de calor específico  $\gamma$ , la densidad de referencia  $\rho_0$ , temperatura de referencia  $T_0$ ). Respecto a la tubería, sus datos también se suponen como conocidos en cualquier longitud y por lo tanto la masa presente en la malla siempre se puede determinar.

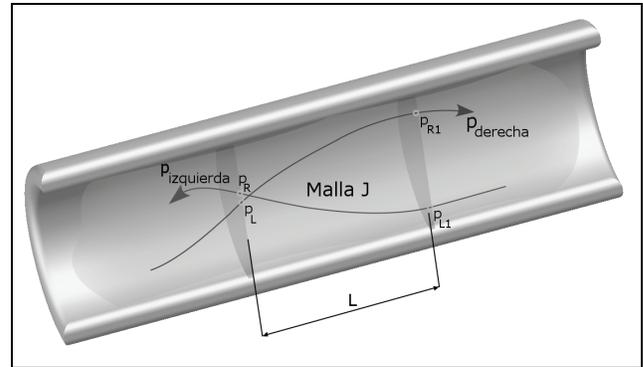


Figura 9. Convenciones en el modelo

El promedio de la presión a través de la malla se determina a partir de la superposición de las dos ondas de presión en cada uno de los extremos. Esta relación de amplitud de presión para la malla  $J$  de la figura 9 se puede expresar como:

$$X_J = \frac{(X_R + X_L - 1) + (X_{R1} + X_{L1} - 1)}{2} \quad (141).$$

A partir de esta ecuación y con las otras relaciones ya mencionadas es posible establecer las otras propiedades del gas en la malla de estudio. En definitiva el modelo propone determinar:

-El efecto del movimiento de las ondas de presión en ambos extremos de la malla durante un adecuado intervalo de tiempo  $dt$  sobre la termodinámica del gas en la malla  $J$ .

-El efecto, sobre la termodinámica del gas en la malla  $J$ , del movimiento de las ondas de presión al lado derecho de la malla  $J-1$ , y al lado izquierdo de la malla  $J+1$ , durante un intervalo de tiempo  $dt$ .

-El efecto del movimiento de la propagación de las ondas de presión durante el tiempo  $dt$ , a través de la malla en el espacio  $J$ , sobre el cambio en la amplitud de las ondas debido a la fricción o al cambio de área.

El efecto sobre las ondas de presión después de llegar a la derecha de la malla  $J$ , o a la izquierda de la misma malla, y encontrar diferentes propiedades del gas en las mallas del espacio  $J+1$  y  $J-1$  respectivamente.

-El efecto sobre las ondas de presión después de llegar a la derecha de la malla J, o a la izquierda de la misma malla, y encontrar una discontinuidad geométrica, como por ejemplo una garganta, una válvula o salida de un cilindro de un motor, una bifurcación en sistema de tuberías, o un aumento o disminución en el área de un ducto.

**Incremento de tiempo en cada paso de cálculo**

La selección del tamaño del paso de tiempo se realiza de acuerdo con la naturaleza aritmética resultante de los procesos iterativos, donde la interpolación de los valores es permisible, pero su extrapolación genera inestabilidades aritméticas. En el caso del modelo planteado, el paso de tiempo  $dt$ , es obtenido por medio del barrido de velocidades de propagación de cada espacio de malla en la geometría de la tubería simulada con el propósito de seleccionar la más grande. En cada uno de los extremos de la malla las ondas de presión  $p_R, p_L, p_{R1},$  y  $p_{L1}$  inducen velocidades superpuestas  $\alpha_{sR}, \alpha_{sL}, \alpha_{sR1}$  y  $\alpha_{sL1}$  respectivamente. Estas velocidades de superposición pueden ser determinadas a través de:  $dt = \frac{L}{\alpha_{sN}}$  (142). Con L co-

mo el ancho de la malla y N para cada parte de las ondas (L, R, L1 y R1). Para determinar el paso de tiempo necesario, y que asegure la interpolación de los datos y no su extrapolación se puede emplear:

$$dt_{\text{mínimo}} = 0.99 \cdot \left[ \frac{L}{\alpha_{s_{\text{más rápido en J}}}} \right]_{J=1}^{J=\text{Total}} \quad (143).$$

El cálculo de la transmisión de onda durante un incremento de tiempo  $dt$  se trabaja asumiendo que entre dos mallas cualesquiera existe una variación lineal de la onda de presión, de la superposición de onda de presión y de la velocidad de propagación de la superposición para ambas ondas, izquierda y derecha, de tal manera que se eligen dos valores de relación de amplitud de presión,  $X_p$  y  $X_q$  que se convierten en los nuevos valores de las ondas de presión derecha e izquierda respectivamente, en cada extremo de la malla J al concluir el paso de tiempo  $dt$ . En la figura 10 se muestra de forma gráfica esta suposición.

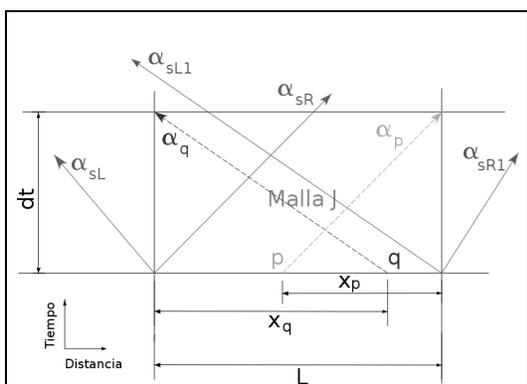


Figura 10. Superposición de ondas en la malla J. Tomado de (Blair, 1999).

En el proceso de interpolación para la transmisión de onda a través de una malla es necesario determinar los valores de  $X_p$  y  $X_q$  mencionados anteriormente. Esto se logra por medio de las velocidades de superposición  $\alpha_p$  y  $\alpha_q$  que alcanzan el final de la malla en el tiempo de paso  $dt$ . Luego de un manejo matemático de las expresiones que relacionan estas dos variables se encuentran las siguientes ecuaciones:  $X_p = \frac{1+D+F_L+F_L \cdot C}{G_4 \cdot (F_R \cdot F_L - 1)}$  (144);

$$X_q = \frac{1+C+F_R+F_R \cdot D}{G_4 \cdot (F_R \cdot F_L - 1)} \quad (145); \quad A = E \cdot (X_{R1} - X_R) \quad (146);$$

$$B = E \cdot (X_L - X_{L1}) \quad (147); \quad C = \frac{X_{R1}}{A} \quad (148); \quad D = \frac{X_L}{B} \quad (149);$$

$$E = \frac{a_0 \cdot dt}{L} \quad (150); \quad F_R = \frac{G_6 + \frac{1}{A}}{G_4} \quad (151); \quad F_L = \frac{G_6 + \frac{1}{B}}{G_4} \quad (152).$$

Asumiendo que el valor de la onda de presión será modificado por la fricción o el cambio de área durante su viaje en el paso de tiempo  $dt$ , los nuevos valores del frente de onda izquierdo y derecho a la izquierda y derecha de la malla J al final del paso de tiempo se pueden expresar por medio de:

$$X_{R1nuevo} = X_p \pm \text{Efectos por fricción} \pm \text{Efectos por cambio de área} \quad (153),$$

$$X_{Lnuevo} = X_q \pm \text{Efectos por fricción} \pm \text{Efectos por cambio de área} \quad (154).$$

Con los datos anteriores de  $X_q$  y  $X_p$ ; y aplicando relaciones ya conocidas es posible encontrar todos los datos nuevos en la malla J.

Durante el proceso de interpolación es probable encontrar mallas en las cuales se presenten singularidades, para las cuales existen ciertas modificaciones en las ecuaciones anteriormente presentadas; las singularidades y sus ecuaciones se encuentran en (Blair, 1999 pp. 264-265).

Respecto a los cambios debidos a la fricción, estos se pueden expresar a través de la ecuación de fuerza de fricción, como se muestra a continuación:  $F = C_f \cdot A_{sj} \cdot \frac{\rho_s \cdot c_s^2}{2}$  (155). Con  $A_{sj}$  como el

área perimetral del ducto. De esta forma para calcular el trabajo realizado en el paso de tiempo  $dt$  se dice que cada partícula del gas se mueve con la velocidad de superposición  $c_s$  y este trabajo será tomado como generación de calor y calculado a través de:

$$\delta W_f = F \cdot dx = F \cdot c_s \cdot dt = \left[ \frac{C_f \cdot A_{sj} \cdot \rho_s \cdot c_s^3 \cdot dt}{2} \right] = \delta Q_f \quad (156).$$

En el cálculo de transferencia de calor se asume que se conoce la temperatura en la superficie interna del tubo y se denomina  $T_w$ , por medio de esta y de la temperatura del gas en la malla ( $T_s$ ) se realiza la transferencia por convección utilizando la ecuación:  $\delta Q_h = C_h \cdot A_j \cdot (T_w - T_s)$  (157). En el caso de ductos paralelos, es decir los que no presentan ningún cambio en su área transversal, los cambios en las ondas de presión entre mallas adyacentes deben actualizarse para cada paso de tiempo, los valores de las relaciones de presión para cada malla se encuentran al final del paso de tiempo, así es que si las propiedades del gas se mantienen idénticas entre las dos mallas se puede realizar un reemplazo trivial de las nuevas condiciones en cada una de las mallas:  ${}_1X_{L1} = {}_2X_{q2}$  (158);  ${}_2X_{R1} = {}_1X_{p1}$  (159). Este reemplazo simple se muestra en las

anteriores ecuaciones en las cuales el subíndice antes de cada variable se refiere a la malla 1 o la malla 2 de la Figura 6 Para el caso en el que las condiciones del gas no sean iguales para las mallas adyacentes se deben utilizar las ecuaciones 97 a 106. En definitiva el modelo permite determinar el espacio del ducto en que son aplicables las consideraciones determinando una longitud de malla y procediendo a escoger las ecuaciones que pueden ser aplicadas en este espacio de análisis teniendo en cuenta las condiciones circundantes e internas. Por lo demás se necesita hacer este procedimiento en cada una de las mallas y por el espacio de tiempo escogido para hacer la simulación de las ondas de presión. Por lo anterior y sumando el hecho de tener que resolver la mayoría de las ecuaciones a partir de métodos numéricos, la implementación de un programa de computación que maneje a la par este tipo de si-

tuaciones se hace de hecho la única herramienta posible para el desarrollo de la simulación de las ondas de presión en un flujo de gases.

## Conclusión

Este desarrollo muestra de forma concisa pero completa el modelo para simular el flujo de escape en un motor de combustión interna, junto con las variables adicionales que deben ser tenidas en cuenta cuando se desea realizar este proceso. Además de esto, se presentan las deducciones de las ecuaciones más importantes para los diferentes tipos de tubería que pueden aparecer. Como consecuencia directa se demuestra que el flujo a través del motor es altamente dependiente del movimiento de las ondas de presión, de la forma y tamaño de los ductos, y del tipo de conexión entre ellos.

## Bibliografía

- Alvarez, J., Callejon, I., Máquinas Térmicas Motoras., Alfaomega, México, 2005.
- Bannister, F., Pressure waves in gases in pipes., Ackroyd Stuart Memorial Lectures, University of Nottingham, 1958.
- Bayraktar, H., Experimental and theoretical investigation of using gasoline-ethanol blends in spark-ignition engines., Renewable Energy, Vol. 30, No. 11, 2005, pp. 1733-1747.
- Benson, R., .Dentro del libro: Horlock, J., Winterbone, D., The Thermodynamics and Gas Dynamics of Internal Combustion Engines., Clarendon Press, Oxford, Vol. 1, 1982.
- Benson, R., A numerical solution of unsteady flow problems., Int. J. Mech. Sci., Vol. 6, 1964, pp.117-144.
- Blair, G., McBurney, D., McDonald, P., McKernan, P., Fleck, R., Some fundamental aspects of the discharge coefficients of cylinder porting and ducting restrictions., SAE paper 980764, 1998.
- Blair, G., Design and simulation of four – stroke engines., SAE International, 1999, pp. 153-317.
- Blair, G., Mackey, D., Ashe, M., Chatfield, G., Exhaust tuning on four-stroke engine; Experimentation and simulation., SAE Paper 2001-01-1797, 2001.
- Haworth, D., A review of turbulent combustion modeling for multidimensional In-Cylinder CFD., SAE Paper 2005-01-0993, 2005.
- Heywood, J., Internal combustion engine fundamentals., McGraw Hill, 1988.
- Mantilla, J., Galeano, C., Ochoa, J., Prediseño y simulación de un sistema de inyección directa para un motor de combustión interna de dos tiempos., Revista Scientia et Técnica, Año 13, No. 34, 2007, pp. 267-272.
- Mills, A., Transferencia de Calor., Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- Novak, J., Blumberg, P., Parametric simulation of significant design and operating alternatives affecting the fuel economy and emissions, SAE Paper 780943, SAE trans., Vol. 87, 1978.
- Pulkrabek, W., Engineering fundamentals of the internal combustion engine., Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- Wallace, F., Nassif, M., Air flow in a naturally aspirated two-stroke engine, Proc. I. Mech. E., Vol 1B, 1953, pp. 343.