Revista Colombiana de Estadística
Nº 27

UNA COMPARACIÓN ENTRE DOS CLASES DE MODELOS DE ESTADOS

FABIO H. NIETO S

Profesor Asociado del departamento de Matemáticas
de la Universidad Nacional de Colombia

RESUMEN. Para analizar series cronológicas se pueden utilizar dos tipos de modelos de estados. En este artículo se presentan algunas características de cada uno, se advierte sobre el uso incorrecto en el empleo de sus hipótesis en la deducción del Filtro de Kalman y se resaltan sus analogías y diferencias.

ABSTRACT. For analyzing time series data it can be utilized two types of state-space models. In this paper, some features of each one are presented, the misuse of their hypothesis in deducting the Kalman Filter is warned and their analogies and differences are stressed.

1. INTRODUCCIÓN

Sea $\{Y_t\}$ un proceso estocástico vectorial discreto del cual proviene una serie cronológica observada. En la actualidad se utilizan básicamente dos tipos de modelos de estados para describir la dinámica del proceso $\{Y_t\}$. Estos son:

"Modelo de tipo 1" (MT1)

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= Z_t\alpha_t + \epsilon_t \\ \alpha_t &= T_t\alpha_{t-1} + \omega_t \end{aligned}\right\} t = 1, 2, \ldots$$

"Modelo de tipo 2" (MT2)

$$\left.\begin{aligned} Y_t &= Z_t\alpha_t + \epsilon_t \\ \alpha_{t+1} &= T_t\alpha_t + \omega_t \end{aligned}\right\} t = 0, 1, \ldots$$

En ambos modelos, α_t, ϵ_t y ω_t son vectores, Z_t y T_t matrices y se entiende que sus dimensiones son consistentes para los productos indicados. Además α_t se llama el vector de estado (no observable), T_t la matriz de transición y Z_t la matriz de observación. La primera ecuación es la ecuación de observación y la segunda, la ecuación del sistema (o de estado).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

El MT1 es analizado de manera extensa, entre otros, por **Harvey** (1989), **West** y **Harrison** (1989) y **Catlin** (1989), y el MT2 es la base en los trabajos de **Anderson** y **Moore** (1979), **Kohn** and **Ansley** (1983) y **Aoki** (1990), entre otros.

Harvey (1989) hace algunas referencias al MT2, pero básicamente para indicar la forma de las ecuaciones del Filtro de Kalman (FK) en ese caso y una posible ventaja sobre el MT1 para eliminar correlación (contemporánea) entre los vectores aleatorios ϵ_t y ω_t. Por lo tanto y hasta donde el autor del presente trabajo conoce sobre el tema, no existe una comparación explícita entre los dos tipos de modelos que permita elegir entre uno y otro para analizar una serie temporal dada.

Además del problema destacado antes, y desde un punto de vista matemático, las hipótesis estadísticas de cada modelo no son empleadas adecuadamente en la deducción del FK. En este artículo se indica en que momento se puede fallar y se sugiere la forma para evitar esa anomalía.

En ocasiones es necesario condicionar las hipótesis de un modelo de estados (MT1 o MT2) sobre alguna información conocida del proceso. De esta forma, en cada tipo de modelo se tienen dos subclases, la no condicional (o convencional) y la condicional. Ambos subtipos son considerados también en el presente artículo teniendo en cuenta que los autores citados anteriormente no destacan sus diferencias. (**Harvey** (1989) considera cierta clase de modelos "condicionados" pero de forma demasiado sucinta y no con el enfoque que será presentado en el presente trabajo).

2. Modelos de Tipo I

2.1 Modelos convencionales. Las hipótesis estadísticas básicas para el MT1 convencional son las siguientes:

(i) Los procesos estocásticos $\{\epsilon_t\}$ y $\{\omega_t\}$ son Ruido Blanco Gaussiano cada uno con media cero, $Var(\epsilon_t) = H_t$ y $Var(\omega_t) = Q_t$, para cada $t = 1, 2, \ldots$

(ii) Los procesos estocásticos $\{\epsilon_t\}$ y $\{\omega_t\}$ son independientes mutuamente.[1]

(iii) $\alpha_0 \sim N(a_0, p_0)$, a_0, p_0 conocidos y el conjunto $\{\alpha_0, \omega_1, \ldots, \omega_t, \epsilon_t\}$ es independiente mutuamente estocásticamente, para cada $t = 1, 2, \ldots$

Observación. Las distribuciones gaussianas citadas en las hipótesis anteriores se consideran en un sentido amplio, es decir pueden ser no singulares o singulares. En lo sucesivo y a menos que se diga lo contrario, esta será la hipótesis distribucional básica.

[1] $\{\epsilon_t\}$ y $\{\omega_t\}$ independientes mutuamente significa que para todos m y n enteros positivos y todo $t_1, \ldots, t_m, s_1, \ldots, s_n$ el conjunto $\{\epsilon_{t_1}, \ldots, \epsilon_{t_m}, \omega_{s_1}, \ldots, \omega_{s_n}\}$ es independiente mutuamente.

Para cada $t = 1, 2, \ldots$ se obtiene que

$$\alpha_t = T_t(0)\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t} T_t(i)\omega_i \tag{1}$$

donde

$$T_t(i) = \prod_{j=0}^{t-1-i} T_{t-j} \quad \text{para cada } i = 0, 1, \ldots, t-1$$

y $T_t(t) = I$.

De (1) se obtiene que

$$Y_t = [Z_t T_t(0)]\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t}[Z_t T_t(i)]\omega_i + \epsilon_t \tag{2}$$

para cada $t = 1, 2, \ldots$

La expresión (1) indica que α_t es una combinación lineal de $\alpha_0, \omega_1, \ldots, \omega_t$, y la (2) que Y_t es combinación lineal de $\alpha_0, \omega_1, \ldots, \omega_t, \epsilon_t$.

Así, para cada $t = 1, 2, \ldots$, las distribuciones de α_t y Y_t son, cada una, gaussianas y además

$$E(\alpha_t) = T_t(0)a_0, \tag{3}$$

$$Var(\alpha_t) = T_t(0)P_0T_t'(0) + \sum_{i=1}^{t} T_t(i)Q_iT_t'(i), \tag{4}$$

$$E(Y_t) = Z_tT_t(0)a_0 \tag{5}$$

$$Var(Y_t) = Z_tT_t(0)P_0T_t'(0)Z_t' + \sum_{i=1}^{t} Z_tT_t(i)Q_iT_t'(i)Z_t' + H_t \tag{6}$$

donde la " ′ " denota transpuesta.

El paso crucial en la deducción del FK utilizando la distribución multinormal es la verificación de que la distribución conjunta de α_t y Y_t es gaussiana. Y es aquí donde se puede fallar en el empleo de las hipótesis (i) - (iii) como se insinúa en algunos textos clásicos sobre el tema, por ejemplo los de **West** y **Harrison** (1989) y **Harvey** (1989). Más adelante se explicará en que consiste el error. Retornando al problema de deducir la distribución conjunta de α_t y Y_t se tiene lo siguiente:

Sean $v_t = (\alpha_t' Y_t')'$, y $x = (x_1' x_2')'$, donde x_1 y x_2 son vectores columna arbitrarios de igual dimensión que α_t y Y_t, respectivamente. Entonces

$$
\begin{aligned}
x'v_t &= x_1'\alpha_t + x_2'Y_t \\
&= [x_1'T_t(0) + x_2'Z_tT_t(0)]\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t}[(x_1' + x_2'Z_t)T_t(i)]\omega_i + x_2'\epsilon_t \qquad (7)
\end{aligned}
$$

para cada $t = 1, 2, \ldots$.

La expresión (7) dice que $x'v_t$ es una combinación lineal de $\alpha_0, \omega_1, \ldots, \omega_t, \epsilon_t$ los cuales conforman un conjunto mutuamente independiente estocásticamente según la hipótesis (iii) y cada uno tiene distribución gaussiana, de acuerdo con las hipótesis (i) y (iii). Por lo tanto v_t tiene distribución gaussiana (o multinormal). **Nieto** (1993a) presenta la demostración de esta afirmación para el caso en que las distribuciones de algunos de los vectores $\alpha_0, \omega_1, \ldots, \omega_t, \epsilon_t$, sean singulares.

Por lo anterior la distribución de α_t condicionada por un valor particular y_t de Y_t es gaussiana con media

$$E(\alpha_t|Y_t = y_t) = E(\alpha_t) + Cov(\alpha_t, y_t)Var(Y_t)^{-}(y_t - E(Y_t)) \qquad (8)$$

y varianza

$$Var(\alpha_t|Y_t = y_t) = Var(\alpha_t) - Cov(\alpha_t, y_t)Var(Y_t)^{-}Cov(y_t, \alpha_t), \qquad (9)$$

para cada $t = 1, 2, \ldots$, donde el símbolo "$-$" indica seudo-inversa.

En el caso de distribuciones singulares se utiliza el resultado de **Marsaglia** (1964) para demostrar la anterior afirmación.

Por facilidad de notación sean $a_t = E(\alpha_t)$, $P_t = Var(\alpha_t)$, $\overline{y}_t = E(Y_t)$, $F_t = Var(Y_t)$, $a_{t|t} = E(\alpha_t|Y_t = y_t)$ y $P_{t|t} = Var(\alpha_t|Y_t = y_t)$ para cada $t = 1, 2, \ldots$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
Cov(\alpha_t, Y_t) &= E[(\alpha_t - a_t)(Y_t - \overline{Y}_t)'] \\
&= T_t(0)P_0T_t'(0)Z_t' + \sum_{i=1}^{t} T_t(i)Q_iT_t'(i)Z_t'
\end{aligned}
$$

En este paso se han utilizado todas las hipótesis del modelo. Por notación sea $C_t = Cov(\alpha_t, Y_t)$.

Las expresiones (8) y (9) pueden ser reescritas así:

$$a_{t|t} = a_t + C_tF_t^{-}(y_t - Z_ta_t) \qquad (10)$$

$$P_{t|t} = P_t - C_tF_t^{-}C_t' \qquad (11)$$

para cada $t = 1, 2, \ldots$

Las ecuaciones (10) y (11) definen el Filtro de Kalman para el MT1 convencional y el lector puede notar que desde el punto de vista matemático su deducción ha sido "clara".

Para predecir Y_{T+h}, $h = 1, 2, \ldots$, dado $Y_T = y_T$, se puede proceder de la siguiente manera:

Utilizando las hipótesis del modelo y la expresión (2) para Y_T y Y_{T+h} se puede demostrar que la distribución conjunta entre Y_{T+h} y Y_T es gaussiana, de lo cual la distribución condicional de Y_{T+h} dado un valor particular y_T de Y_T es gaussiana con media

$$(12) \qquad E(Y_{T+h}|Y_T = y_T) = E(Y_{T+h}) + Cov(Y_{T+h}, Y_t)Var(Y_T)^{-}(y_T - E(Y_T))$$

y varianza

$$(13) \quad Var(Y_{T+h}|Y_T = y_T) = Var(Y_{T+h}) - Cov(Y_{T+h}, y_T)Var(Y_T)^{-}Cov(Y_T, Y_{T+h}).$$

Nótese que todos los parámetros (vectoriales o matriciales) involucrados en (12) y (13) se pueden conocer a partir de las expresiones (2), (5) y (6).

Otras implicaciones importantes que tienen las hipótesis (i) - (iii) del MT1 convencional son las siguientes:

(a) α_t y ϵ_{t-j} son independientes estocásticamente para cada j, $j = 0, 1, \ldots, t-1$ y para cada $t = 1, 2, \ldots$ En particular así son α_t y ϵ_t.

(b) α_t y Y_{t+j} son dependientes estocásticamente para cada $j = 0, 1, \ldots$ y para cada $t = 1, 2, \ldots$

(c) Y_t y ω_{t-j} no son independientes para cada j, $j = 0, 1, \ldots, t-1$ y $t = 1, 2, \ldots$. Esto en particular implica que la distribución de ω_t condicional por un valor particular y_t de Y_t dependerá de y_t.

(d) α_t y ω_{t+j} son independientes estocásticamente para cada $j = 1, 2, \ldots$ y para todo $t = 1, 2, \ldots$

En este punto se tienen las condiciones que permiten destacar el empleo inadecuado (en el sentido de la Lógica Matemática), que se hace de las hipótesis (i) - (iii) para deducir el FK.

La situación es la siguiente: en algunos textos, por ejemplo los de **Harvey** (1989) y **West** y **Harrison** (1989), se procede de manera inductiva sobre t y condicionando (probabilísticamente) sobre la información $\mathbb{Y}_{t-1} = \{y_1, \ldots y_{t-1}\}$. Cuando $t = 1$, la deducción presentada en estos trabajos y la de este artículo coinciden pues $\mathbb{Y}_0$

representa solo el conocimiento de la distribución de α_0. Para $t = 2$, se condiciona por $\mathbb{Y}_1 = \{y_1\}$ y surgen los siguientes problemas:

Para obtener la distribución conjunta de (α_2, Y_2) dado $\mathbb{Y}_1$ se requiere la independencia estocástica de $(\alpha_1|\mathbb{Y}_1)$ y $(\omega_2|\mathbb{Y}_1)$ ya que

$$\alpha_2 = T_2\alpha_1 + \omega_2.$$

Ahora bien, ω_2 es independiente de Y_1 así que la distribución de $(\omega_2.|\mathbb{Y}_1)$ coincide con la de ω_2 pero la de $(\alpha_1|\mathbb{Y}_1)$ no coincide con la de α_1 pues α_1 y Y_1 son dependientes estocásticamente. Por lo tanto no es posible asegurar a partir de las hipótesis del modelo que $(\alpha_1|\mathbb{Y}_1)$ y ω_2 sean independientes.

Se podría intentar resolver el problema utilizando la ecuación

$$\alpha_1 = T_1\alpha_0 + \omega_1$$

pero ahora se necesitaría la independencia estocástica de $(\alpha_0|\mathbb{Y}_1)$ y $(\omega_1|\mathbb{Y}_1)$, lo que sería muy difícil (si no imposible) de establecer de acuerdo con las observaciones (b) y (c) anteriores.

Por lo tanto para proceder consistentemente como lo hacen **Harvey** (1989) y **West y Harrison** (1989) se sugiere replantear las hipótesis (i) - (iii) como se indica en la siguiente subsección.

2.2 Modelos condicionales. En este trabajo el MT1 condicional se define a través de los siguientes planteamientos:

Para cada t, $t = 1, 2, \ldots$, sea I_t un conjunto que contiene la información conocida $\mathbb{Y}_{t-1} = \{y_1, \ldots y_{t-1}\}$ y alguna información observada E_t en t externa al proceso $\{Y_t\}$. Más exactamente $I_t = \mathbb{Y}_{t-1} \cup E_t$. Supóngase que Z_t y T_t dependen, en un sentido determinístico, de I_t, para cada $t = 1, 2, \ldots$. Por notación se escribirá $Z_t(I_t)$ y $T_t(I_t)$ para indicar esta dependencia.

Las ecuaciones de observación y de estado son como las del modelo convencional pero ahora las hipótesis básicas quedan planteadas de la siguiente manera.

1. Para cada t, $t = 1, 2, \ldots$ se cumple
   (i) $\epsilon_t|I_t \sim N(0, H_t(I_t))$ y $\omega_t|I_t \sim N(0, Q_t(I_t))$ donde $H_t(I_t)$ y $Q_t(I_t)$ indican que también H_t y Q_t dependen (determinísticamente) de I_t.
   (ii) $\alpha_{t-1}|I_t$ y $\omega_t|I_t$ son independientes estocáticamente.
   (iii) El conjunto $\{\alpha_t, \epsilon_t, \epsilon_{t+h}, \omega_{t+1}, \ldots, \omega_{t+h}\}$, condicionado (probabilísticamente) por I_t, es mutuamente independiente para $h = 1, 2, \ldots$

2. $\alpha_0|I_1 \sim N(a_0, P_0)$ y por convención $I_1 = E_1$.

Nótese que la hipótesis (iii) implica en particular que $\alpha_t|I_t$ y $\epsilon_t|I_t$ son independientes estocásticamente, para cada $t = 1, 2, \ldots$.

Se deben destacar las diferencias esenciales entre los dos conjuntos de hipótesis y además notar que planteadas como arriba, la demostración del FK por inducción sobre t y condicionada sobre la información I_t es válida (desde el punto de vista lógico matemático) tal como es presentada por **Harvey** o por **West** y **Harryson**.

3. Modelos de tipo II

3.1. Modelos convencionales.

A primera vista se destacan dos diferencias con respecto al MT1: De una parte el período inicial de observación es $t = 0$ y de otra, la ecuación de estado no es esencialmente un modelo estándar de Markov de primer orden, como en el MT1, ya que la perturbación aleatoria ω_t actúa con retardo de un período sobre α_{t+1}.

Sobre el modelo (vectorial)

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + \omega_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

se pueden hacer las siguientes observaciones cuando T_t es invariante en el tiempo y además sus valores propios están dentro del círculo unitario. (Se supone además que $\{\omega_t\}$ es Ruido Blanco Gaussiano).

(a) α_t y ω_t son independientes estocásticamente, a diferencia del MT1 donde α_t y ω_t son dependientes.

(b) La media, la varianza y la estructura de autocorrelación del modelo (14) son las mismas que en el modelo

$$\alpha_t = T_t\alpha_{t-1} + \omega_t$$

Las hipótesis básicas para el MT2 convencional son analogas a las del MT1 sólo que aquí t toma valores desde 0. Las ecuaciones análogas a (1) y (2) quedarían ahora así:

$$\alpha_{t+1} = T_t(0)\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t+1} T_t(i)\omega_i, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{15}$$

donde

$$T_t(i) = \prod_{i=1}^{t-1} T_{t-j} \quad i = 0, 1, \ldots$$

y $T_t(t+1) = I$

$$Y_t = [Z_t T_{t-1}(0)]\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t} Z_t T_{t-1}(i)\omega_{i-1} + \epsilon_t \tag{16}$$

para $t = 1, 2, \ldots$ y $Y_0 = T_0\alpha_0 + \epsilon_0$.

Utilizando las hipótesis del modelo se demuestra que α_{t+1} y Y_t tienen, cada uno, distribución gaussiana y fácilmente se pueden encontrar las expresiones para $E(\alpha_{t+1})$, $Var(\alpha_{t+1})$, $E(Y_t)$ y $Var(Y_t)$ así como se hizo para los MT1.

Para un t dado, $t = 0, 1, \ldots$, sea $v_t = (\alpha'_{t+1}, Y'_t)'$ y sea $x = (x'_1, x'_2)'$ un vector arbitrario no aleatorio tal que la dimensión de x_1 y la de x_2 coinciden con la de α_{t+1} y Y_t, respectivamente.

Entonces

$$\begin{aligned} x'v_t &= x'_1\alpha_{t+1} + x'_2 Y_t \\ &= [x'_1 T_t(0) + x'_2 Z_t T_{t-1}(0)]\alpha_0 + \sum_{i=1}^{t}[x'_2 Z_t T_{t-1}(i) + x'_1 T_t(i)]\omega_{i-1} \\ &\qquad + x'_1 T_t(t+1)\omega_t + x'_2\epsilon_t \end{aligned} \tag{17}$$

Por lo tanto, la distribución conjunta de α_{t+1} y Y_t es multinormal. De esto la distribución condicional de α_{t+1} dado un valor particular y_t de Y_t es multinormal con media

$$E(\alpha_{t+1}|Y_t = y_t) = E(\alpha_{t+1}) + Cov(\alpha_{t+1}, Y_t)Var(Y_t)^-(y_t - E(Y_t)) \tag{18}$$

y con varianza

$$Var(\alpha_{t+1}|Y_t = y_t) = Var(\alpha_{t+1}) - Cov(\alpha_{t+1}, Y_t)Var(Y_t)^- Cov(Y_t, \alpha_{t+1}), \tag{19}$$

Nótese que

$$Cov(\alpha_{t+1}, Y_t) = T_t(0)P_0 T'_{t-1}(0)Z'_t + \sum_{i=1}^{t} T_t(i)Q_{i-1}T'_{t-1}T'_{t-1}(i)Z'_t$$

Ahora si se desea la distribución de α_t dado un valor particular y_t de Y_t se puede proceder como antes y se encuentra que esta es multinormal con media

$$E(\alpha_t|Y_t = y_t) = E(\alpha_t) + Cov(\alpha_t, Y_t)Var(Y_t)^-(y_t - E(Y_t)) \tag{20}$$

y varianza

$$Var(\alpha_t|Y_t = y_t) = Var(\alpha_t) - Cov(\alpha_t, Y_t)Var(Y_t)^{-}Cov(Y_t, \alpha_t). \tag{21}$$

Como se puede notar, la diferencia esencial entre los filtros definidos por las ecuaciones (18) - (19) y (20) - (21) es que en el primero se obtiene directamente la predicción de α_{t+1} dado $Y_t = y_t$ mientras que en el segundo, primero se obtiene la actualización de α_t dado $Y_t = y_t$ y luego (si se desea) la predicción de α_{t+1}. Además aquí también hay claridad en la deducción del FK tanto para α_{t+1} como para α_t.

Para predecir Y_{T+h} dado $Y_T = y_T$ se puede proceder de manera análoga a como se hizo para obtener las ecuaciónes (12) - (13).

Otras implicaciones importantes que tienen las hipótesis del MT2 convencional son las siguientes:

(a) α_t y ϵ_t son independientes estocásticamente para cada $t = 0, 1, \dots$ (Al igual que en el MT1).
(b) α_t y Y_{t+j} son dependientes estocásticamente para cada $j = 0, 1, \dots$ y para cada $t = 0, 1, \dots$ (Igual que en el MT1).
(c) Y_t y ω_t son independientes estocásticamente (Difiere del MT1).

En este punto es importante destacar lo siguiente: una de las hipótesis convencionales en el MT1 y el MT2 es que los procesos $\{\epsilon_t\}$ y $\{\omega_t\}$ son mutuamente independientes. Ahora si por ejemplo $Corr(\epsilon_t, \omega_t) \neq 0$ (correlación contemporánea) entonces ,de una parte, las ecuaciones del FK deducidas para ambos modelos no son válidas y de otra se tiene que:

(i) En el MT1 esto implicará que α_t y ϵ_t son dependientes estocásticamente, y
(ii) En el MT2, al contrario, la independencia entre α_t y ϵ_t se mantiene.

En ese sentido se podría decir que la correlación contemporánea entre $\{\epsilon_t\}$ y $\{\omega_t\}$ es más perjudicial en el MT1 que en el MT2. Sin embargo en ambos casos afecta la deducción del FK.

Este hecho deberá ser tenido en cuenta en el momento de formular las hipótesis del MT2 condicional como se verá a continuación.

3.2. Modelos condicionales. Para el MT2 condicional se siguen los mismos lineamientos trazados para el MT1 condicional y las hipótesis estadísticas básicas son las siguientes:

1. Para cada t, $t = 0, 1, \dots$ se cumple que
   (i) $\epsilon_t|I_t \sim N(0, H_t(I_t))$ y $\omega_t|I_t \sim N(0, Q_t(I_t))$

(ii) El conjunto $\{\alpha_t, \omega_t, \epsilon_t, \omega_{t+1}, \ldots, \omega_{t+h}, \epsilon_{t+h}\}$ condicionado (probabilísticamente) por I_t es mutuamente independiente para cada $h = 1, 2, \ldots$

2. $\alpha_0 | I_0 \sim N(a_0, P_0)$ y por convención $I_0 = E_0$.

Obsérvese que la hipótesis (ii) implica en particular que cada par $\alpha_t | I_t$ y $\omega_t | I_t$, $\alpha_t | I_t$ y $\epsilon_t | I_t$, y ,$\epsilon_t | I_t$ y $\omega_t | I_t$ es independiente estocásticamente.

Esto difiere del MT1 condicional, fundamentalmente en que allí no se requiere explícitamente la hipótesis de que $\epsilon_t | I_t$ y $\omega_t | I_t$ sean independientes estocáticamente. Desde este punto de vista y al nivel de los modelos condicionales sería más adecuado plantear el MT1 pues requiere menos hipótesis.

Se puede demostrar que las ecuaciones del FK en este caso son análogas a las ecuaciones (18) - (19) o (20) - (21) según que se desee estimar α_{t+1} o α_t, respectivamente.

4. Conclusiones

Al identificar un modelo de estados para una serie cronológica, el MT1 debería ser usado si por lo menos uno u otro:

(1a) La perturbación ω_t tiene efecto instantáneo sobre el estado α_t.

(1b) Antes de predecir α_{t+1} dado $Y_t = y_t$ ó I_t se requiere estimar (filtrar o actualizar) α_t.

(1c) La variable vectorial Y_t y la perturbación ω_t son dependientes estocásticamente.

(1d) El fenómeno aleatorio evoluciona fundamentalmente de manera condicional (en el sentido de la sección 2.2) y se cumplen (1a) y (1c).

El MT2 deberá ser usado si al menos, uno u otro:

(2a) La perturbación ω_t actúa con retraso de un período sobre el estado del sistema.

(2b) El estado del sistema y la perturbación del sistema en un tiempo t son independientes estocásticamente.

(2c) Más que estimar α_t se desea predecir α_{t+1} dado un valor particular y_t de Y_t, en el caso convencional, o dado I_{t+1}, en el caso condicional.

(2d) La variable vectorial Y_t (salida del sistema en t) y la perturbación (del sistema) ω_t son independientes estocásticamente.

(2e) Se necesita eliminar la correlación (contemporánea) entre ϵ_t y ω_t como lo indica Harvey (1989, pp. 113).

Finalmente se debe destacar que la elegancia y utilidad del FK se aprecia más en el contexto condicional que en el convencional y siendo así las hipótesis del modelo deben ser formuladas como se hizo en las secciones 2.2 y 3.2, para obtener su deducción de manera consistente.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, D. O. and Moore, J. B., (1979), *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Aoki, M., (1990), *State Space Modeling of Time Series*, Springer-Verlag, Berlin.

Catlin, D. (1989), *Estimation, Control and the Discrete Kalman Filter*, Springer-Verlag, Berlin.

Harvey, A. C., (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kohn, R. and Ansley, C. F.,(1983), *Fixed Interval Estimation in satate space models when some of the data are missing or aggregated*, Biometrika **70**, 683-8.

Marsaglia, G., (1964), *Coditional Means and Covariances of Normal Variables with singular covariance matrix*, Journal of the American Statistical Association **59**, 1203-1204.

Nieto, F. H., (1993), *Deducción del Filtro de Kalman en el caso de modelos de estados gaussianos singulares*, Revista Colombiana de Ciencias Exacta, Físicas y Naturales **XVIII N. 71**, 539-543, Bogotá, D.C..

West, M. and Harrison, P. J., (1989), *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, Springer-Verlag, Berlin.