Revista Colombiana de Estadística
Nº 27

COMPACIDAD RELATIVA Y *"TIGHTNESS"* EN EL ESPACIO B[0,1]

LILIANA BLANCO CASTAÑEDA
Universidad Nacional de Colombia

RESUMEN. Un árbol continuo puede considerarse como un conjunto finito de funciones del espacio $C[0,1]$ de todas las funciones continuas de valor real definidas sobre el intervalo $[0,1]$ junto con la metrica del "sup". Al conjunto de todos los árboles continuos lo denotamos por $\mathbf{B}[0,1]$ y sobre él definimos una métrica especial Δ, con la cual resulta ser un espacio métrico separable (BLANCO (1992)).

Una familia $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas de probabilidad sobre un espacio (S,d) satisface la condición de "tightness", si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto K_ϵ tal que $P_n(K_\epsilon) > 1-\epsilon$ para todo n.

En el presente artículo se darán condiciones necesarias y condiciones suficientes tanto para la compacidad relativa de un subconjunto de $\mathbf{B}[0,1]$ como para la propiedad de ser "tight" de una familia de probabilidades definida sobre $\mathbf{B}[0,1]$.

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido el hecho de que el movimiento Browniano se puede aproximar mediante procesos más simples (BILLINGSLEY (1968)). Nos proponemos imitar el método allí presentado para obtener análogamente una aproximación del Movimiento Browniano de Ramificación.

El primer paso que dimos fue construir un espacio métrico separable que desempeñase el papel del espacio $C[0,1]$ de todas las funciones de valor real definidas sobre el intervalo $[0,1]$ junto con la métrica del "sup". El espacio obtenido lo llamamos espacio de todos los árboles continuos y lo denotamos por $\mathbf{B}[0,1]$. La construcción de dicho espacio se describe en BLANCO 1991 Y 1992.

A continuación nos proponemos dar condiciones necesarias y condiciones suficientes tanto para la compacidad relativa de un subconjunto de $\mathbf{B}[0,1]$ como para la condición de "tightness" de una familia de probabilidades sobre $\mathbf{B}[0,1]$. Recordamos que en general las dos condiciones de "tightness" y de la compacidad relativa no son equivalentes. La condición de "tightness" implica la compacidad relativa y en los espacios métricos separables y completos las dos condiciones son equivalentes (BILLINGSLEY (1968)).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Tal y como fue explicado al hacer la construcción del espacio $\mathbf{B}[0,1]$ se tiene que un árbol continuo $\mathrm{b} \in \mathbf{B}[0,1]$ puede considerarse como un conjunto finito de funciones de $C[0,1]$, en cuyo caso llamamos ramas del árbol a los elementos de dicho conjunto, o como una función definida sobre $[0,1]$ y con valores en un espacio métrico apropiado, el cual fue denotado por $\mathbf{F}$. Los valores

$$\mathbf{b}[t] = \Big(\mathbf{b}(t), \big((\iota_1(t), \beta_1(t), \ldots, \big(\iota_{\mathbf{b}(t)}(t), \beta_{\mathbf{b}(t)}(t))\big)\Big)$$

de dicha función tiene la siguiente interpretación:

$\mathbf{b}(t) :=$ Número de individuos presentes en el tiempo t.

$\iota_n(t) :=$ Marca del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, $n = 1, 2, \ldots, \mathbf{b}(t)$.

$\beta_n(t) :=$ Posición del n-ésimo individuo presente en el tiempo t, $n = 1, 2, \ldots, \mathbf{b}(t)$.

A los individuos presentes en el tiempo $t = 1$ los llamamos individuos finales y la colección de todos los individuos finales de un árbol fue denotada por $\mathcal{A}$. Si $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ son árboles continuos; es decir, colecciones finitas de funciones de $C[0,1]$, entonces la distancia Δ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se define como sigue:

$$\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := h(\{a_1, a_2, .., a_n\}, \{b_1, b_2, ..., b_m\}),$$

siendo h la distancia de Hausdorff sobre

$$\{A \subset C[0,1] : \#A < \infty\} \qquad \text{(CASTAING \& VALADIER (1977))}.$$

2. Compacidad relativa en $\mathbf{B}[0,1]$

Para poder caracterizar la compacidad relativa en $\mathbf{B}[0,1]$ necesitamos el concepto de grado de continuidad de un árbol y algunas de sus propiedades.

2.1. Definición.

Sea $\mathrm{b} \in \mathbf{B}[0,1]$, $0 < \delta < 1$. Se define el **grado de continuidad** de $\mathbf{b}$ como sigue

$$\widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) := \max_{1 \leq i \leq m} \mathbf{w}_{b_i}(\delta)$$

donde

$$\mathbf{m} := \text{número de individuos finales de } \mathbf{b},$$

y

$$\mathbf{w}_{b_i}(\delta) := \operatorname*{Sup}_{|s-t|<\delta} |b_i(s) - b_i(t)| \text{ para toda rama } b_i \text{ del árbol } \mathbf{b}.$$

2.2 Lema.

Para cada δ fijo la función $\widehat{\mathbf{W}}\,(\delta)$ *es continua*

Demostración.

Sea $\mathbf{b} \in B[0,1]$ y $\epsilon > 0$ fijos. Supongamos $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_m\}$, siendo

$$b_i := \text{i-ésima rama del árbol } \mathbf{b},\ i = 1, \ldots, \mathbf{m}.$$

Consideremos $i \in \{1, \ldots, m\}$ fijo.

Se tiene que para cada δ fijo, la función $\mathbf{w}\,(\delta)$ es continua (BILLINGSLEY (1968)). Por lo tanto existe $\eta_i > 0$ tal que

$$|\mathbf{w}_{b_i}(\delta) - \mathbf{w}_f(\delta)| < \epsilon, \text{ si } d(b_i, f) < \eta_i \text{ donde } d \text{ denota la métrica del "sup"}$$

Sea $\eta := \min_i \eta_i$. Si $\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \eta$ entonces se satisface lo siguiente:

1. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe un $j_i \in \{1, \ldots, n\}$, donde $\mathbf{n} :=$ número de individuos finales de $\mathbf{a}$, tal que $d(b_i, a_{j_i}) < \eta < \eta_i$, y
2. Para cada $j \in \{1, \ldots, \mathbf{n}\}$ existe un $i_j \in \{1, \ldots, \mathbf{m}\}$, tal que $d(b_{i_j}, a_j) < \eta < \eta_j$

Por lo tanto

$$\max_i \mathbf{w}_{b_i}(\delta) < \epsilon + \max_j \mathbf{w}_{a_j}(\delta).$$

y

$$\max_j \mathbf{w}_{a_j}(\delta) < \epsilon + \max_i \mathbf{w}_{b_i}(\delta).$$

por consiguiente se satisface lo siguiente

$$|\widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) - \widehat{\mathbf{W}}_a(\delta)| < \epsilon, \text{ si } \Delta(a, b) < \epsilon. \quad \square$$

2.3 Lema.

$$\lim_{\delta \to 0} \hat{\mathbf{W}}_b(\delta) = 0, \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1]$$

Demostración.

Sea $b \in \{b_1, \ldots, b_{\mathbf{m}}\} \in \mathbf{B}[0,1]$ fijo.

Para cada $i = 1, \ldots, \mathbf{m}$ se satisface:

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbf{w}_{b_i}(\delta) = 0,$$

por tanto

$$\lim_{\delta \to 0} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) = 0. \quad \square$$

A continuación daremos una condición necesaria para garantizar la compacidad relativa de un subconjunto de $\mathbf{B}[0,1]$.

2.4 Teorema.

Sea $A \subset \mathbf{B}[0,1]$. *Si* A *es compacto relativo entonces*

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}_{b\in A} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) = 0$$

Demostración.

Sean

$$\begin{aligned} f_n : \mathbf{B}[0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto \widehat{\mathbf{W}}_b(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Es claro que para cada $\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1]$ la sucesión $\{f_n(b)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no-creciente y que además se satisface

$$\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0.$$

Por otra parte se tiene que las funciones f_n son continuas. De ahí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(b) = 0 \quad \text{uniformente sobre } \overline{A}. \quad \blacksquare$$

Ahora vamos a dar una condición suficiente para garantizar la compacidad relativa de un subconjunto de $\mathbf{B}[0,1]$.

Para ello requerimos del siguiente concepto:

2.5 Definición.

Sea (S,d) un espacio métrico. Se dice que $A \subset S$ es totalmente-acotado si se satisface la siguiente condición:

Para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-red finita para A, ésto es, existe un subconjunto $M \subset S$ con $d(x,M) < \epsilon$, para todo $x \in A$.

2.6 Teorema.

Sea $A \subset \mathbf{B}[0,1]$. *Si*

1. $\lim_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}_{b\in A} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) = 0,$

y

2. $r := \operatorname{Sup}_{b\in A}(\textit{número de ramas de } \mathbf{b}) < \infty$

entonces A *es compacto relativo.*

Demostración.

Sabemos que $A \subset \mathbf{B}[0,1] \subset (\mathcal{P}(C[0,1]),h)$. Si A es totalmente acotado en $(\mathcal{P}(C[0,1]),h)$ entonces A es compacto relativo en $(\mathcal{P}(C[0,1]),h)$ (CASTAING & VALADIER (1977)), por lo tanto cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A contiene una subsucesión convergente $(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(C[0,1]),h)$, es decir existe $a \in \mathcal{P}(C[0,1])$ tal que $a_{n_k} \longrightarrow a$.

Por la condición 2. se tiene que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que $\#a_{n_k} \leq l$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No es difícil demostrar que si $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{P}(C[0,1])$ y si $\mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(C[0,1])$ entonces $\#\mathcal{L} < \infty$. Por lo tanto tenemos que $\#a < \infty$.

Por otra parte sabemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $f \in a_{n_k}$ se satisface que $f(0) = 0$. Por lo tanto $f(0) = 0$ para todo $f \in a$, esto es $a \in \mathbf{B}[0,1]$. Por consiguiente nos es suficiente demostrar que A es totalmente acotado en $\mathcal{P}(C[0,1]0,h)$. Para demostrarlo tomemos

$$M := \{f \in C[0,1] | \exists \mathbf{b} \in A \text{ tal que } f \text{ es una rama de } \mathbf{b}\}$$

De la condición 1. se sigue que

$$(*) \qquad \lim_{\delta\to 0} \operatorname{Sup}_{f\in M} \mathbf{w}_x(\delta) = 0$$

además se tiene que

$$(**) \qquad \operatorname{Sup}_{f\in M} |f(0)| < \infty$$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue, aplicando el teorema de Arzelà–Ascoli que M es totalmente acotado en $C[0,1]$, es decir para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ-red finita M_ϵ de M.

Consideremos

$$A_\epsilon := \{\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1] : \text{Las ramas de } \mathbf{b} \text{ son elementos de } M_\epsilon \text{ y } (\text{número de ramas de } \mathbf{b}) \leq r\}.$$

Vamos a demostrar que A_ϵ es una ϵ-red finita de A.
Es claro que A_ϵ es finito.
Sea $a \in A$ fijo. Consideremos un $i \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los individuos finales de a y sea a_i la correspondiente rama. Para a_i existe $f_i \in M_\epsilon$ con $d(a_i,f_i) < \epsilon$.

Consideremos el árbol $\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1]$ con las siguientes características:

1. Los individuos finales de $\mathbf{b}$ coinciden con los individuos finales de a.
2. Las ramas de $\mathbf{b}$ son las funciones f_i.

Es claro que $\Delta(a,b) < \epsilon$ $\square$.

3. "Tightness" de una familia de probabilidades sobre $\mathbf{B}[0,1]$

Estamos ahora interesados en dar una condición suficiente y una condición necesaria para la propiedad de ser "tight" de una familia de probabilidades sobre $\mathbf{B}[0,1]$.

3.1 Teorema.

Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $\mathbf{B}[0,1]$. *Si $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de "tightness" entonces existe para todo $\eta > 0$ y para todo $\epsilon > 0$ un $0 < \delta < 1$ tal que*

$$P_n\{b : \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) \geq \eta\} \leq \epsilon, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijo. Puesto que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de "tightness" se tiene que existe un conjunto compacto K_ϵ tal que $P_n(K_\epsilon) > 1 - \epsilon$ para todo n.

Por 2.4 se tiene que para todo $\eta > 0$ existe un $\theta > 0$ tal que

$$\operatorname*{Sup}_{b\in K_\epsilon} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) < \eta, \quad \text{si } |\delta| < \theta.$$

Por lo tanto se satisface para δ suficientemente pequeño lo siguiente

$$K_\epsilon \subset \{\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1]; \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) < \eta\}.$$

De ahí se sigue entonces que para δ suficientemente pequeño y para todo n se satisface

$$P_n(\{\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1] : \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) \geq \eta\}) \leq 1 - P_n(K_\epsilon) < \epsilon. \quad \Box$$

3.2 Teorema.

Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $\mathbf{B}[0,1]$. *Si para todo $\eta > 0$ y para todo $\epsilon > 0$ existen $0 < \delta < 1$ y $r > 0$ tales que*

$$P_n(\{\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1] : \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) < \eta \text{ y } \mathbf{b} \textit{ tiene a lo más } r \text{ ramas}\}) > 1 - \epsilon$$

para todo n, entonces $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de "Tightness".

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijo. Para cada $i \in \mathbb{N}$ escogemos un $0 < \delta_i < 1$ y un $r_i > 0$ tales que

$$P_n(A_i) > 1 - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, \quad \text{para todo } n$$

siendo

$$A_i := \{\mathbf{b} \in \mathbf{B}[0,1] : \mathbf{b} \text{ tiene a lo más } r_i \text{ ramas y } \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta_i) < \frac{1}{i}.\}$$

Sea

$$K := \overline{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i}.$$

Vamos a demostrar que

1. $P_n(K) > 1-\epsilon$, para todo n.
2. K es compacto.

Veamos 1.

$$P_n(K) \geq P_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\right)^c = 1 - P_n\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^c\right) > 1-\epsilon, \text{ para todo } n.$$

Verifiquemos la segunda condición: Tomemos

$$A := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

Escogemos un $i_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{i_0} < \epsilon$. Es claro que

$$\operatorname*{Sup}_{b\in A} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) \leq \operatorname*{Sup}_{b\in A_{i_0}} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) \leq \frac{1}{i_0}, \quad \text{para todo } \delta \text{ con } \delta < \delta_{i_0},$$

por lo tanto

$$(*) \qquad \lim_{\delta\to 0} \operatorname*{Sup}_{b\in A} \widehat{\mathbf{W}}_b(\delta) = 0.$$

Sea $b \in A$ fijo. Es evidente que

$$\text{Número de ramas de b} \leq r_{i_0} \leq \infty.$$

Por consiguiente

$$(**) \qquad \operatorname*{Sup}_{b\in A}(\text{Número de ramas de b}) < \infty.$$

Por 2.6 se sigue de $(*)$ y $(**)$ que A es compacto relativo. □

BIBLIOGRAFIA

1. BILLINGSLEY P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York.
2. BLANCO L. (1991), *Aproximation der "Branching- Brownian-Motion". Tesis de Grado*, Mainz (Alemania).
3. BLANCO L. (1992), *Aproximación del movimiento Browniano de ramificación: El espacio* B[0, 1], Revista Colombiana de Estadística.
4. CASTAING C. & M. VALADIER (1977), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer Verlag, Berlín.