Revista Colombiana de Estadística
Vols. 21-22, 1990

IDENTIFICACION DE UN MODELO DE ESTADOS PARA UNA SERIE CRONOLOGICA USANDO EL ESPACIO PREDICTOR

Fabio H. Nieto
Profesor Asistente
Universidad Nacional

Resumen. Se ilustra con dos ejemplos teóricos el concepto de espacio predictor de un proceso estocástico estacionario y el procedimiento que lo utiliza para identificar un modelo de estados para una serie temporal.

Palabras Claves. Modelo de estados, Modelo Markoviano, Modelo ARMA, Identificación de un modelo estocástico.

1. Introducción.

Se puede considerar una serie cronológica como una sucesión de observaciones de un proceso estocástico, el cual es, al mismo tiempo, la entrada y la salida de un sistema dinámico, lineal, discreto e invariante en el tiempo (Akaike 1974, 1976).

Supóngase que $\{Y(n)\}$ es el proceso del cual proviene la serie, el cual se asume de dimensión r, estacionario, con media cero y gaussiano. Básicamente, existen tres modelo matemáticos que describen al sistema:

a) El modelo de **Función de Transferencia.**

$$Y(n) = \psi(L)X(n), \tag{1}$$

donde $\psi(L)$ es la función de transferencia (matricial) del sistema, L es el operador de retardo y

$$X(n) = Y(n) - E(Y(n) \mid Y(n-1), Y(n-2), \ldots) \tag{2}$$

b) La ecuación en diferencias (o modelo ARMA)

$$Y(n)+B_1Y(n-1)+..+B_MY(n-M) = X(n)+A_1X(n-1)+..+A_\ell X(n-\ell) \tag{3}$$

donde $B_1,\ldots,B_M,A_1,\ldots,A_\ell$ son matrices y M y ℓ enteros no negativos.

c) El modelo de estados[1]

$$\left.\begin{aligned} V(n+1) &= AV(n) + BX(n+1) \\ Y(n) &= CV(n) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde $V(n)$ es un vector de dimensión $p\times 1$ llamado el estado del sistema en el tiempo n; A, B y C son matrices determinísticas e invariantes en el tiempo, llamadas matriz de transición, matriz de entrada y matriz de salida, respectivamente[2].

El modelo de función de transferencia es útil para obtener resultados teóricos sobre el proceso $\{Y(n)\}$. El modelo ARMA es adecuado para ajustarlo a los datos (hablando estadísticamente). Y el modelo de estados es apropiado para describir y analizar fenómenos adaptivos o dinámicos.

---

(1) En este trabajo la frase inglesa "state space model" será traducida como "modelo de estados". Otros autores emplean la traducción "modelo en el espacio de los estados".

(2) Este modelo es un caso particular del modelo de estados general, en el cual se incluye un proceso ruido blanco gaussiano en la segunda ecuación, un control en la primera ecuación y las matrices A,B y C varían en el tiempo (Granger y Newbold (1986)).

Varias estrategias han sido desarrolladas para identificar modelos ARMA. En el caso univariado, la más utilizada es quizá la desarrollada por Box y Jenkins (1976). En el caso multivariado se conocen los métodos desarrollados por Priestley y otros (1972), Whittle (1963), Akaike (1976), Hannan y Rissanen (1982), Jenkins y Alavi (1981), Tiao y Box (1981), Cooper y Wood (1982), Tiao y Tsay (1983), Tsay y Tiao (1984), entre otros.

La característica del trabajo de Akaike es primero identificar el modelo Markoviano del proceso y luego, a partir de él, derivar al modelo ARMA. El modelo Markoviano es el modelo de estados presentado en (4). Identificar un modelo de estados, como el definido por (4), significa conocer:

1. La dimensión p del vector de estado.
2. Las componentes del vector de estado.
3. Las matrices A, B y C .
4. La matriz de varianzas y covarianzas de $X(n)$.

Conocidos estos elementos y la distribución de probabilidad de $V(0)$ entonces se puede estimar $V(n)$ para cada $n > 0$ dada la serie cronológica $Y(1), Y(2), \ldots, Y(n)$ (Kalman 1960 , West y Harrison 1989).

La estrategia de Akaike se basa en el espacio predictor del proceso que genera la serie y se encuentra programada en el paquete SAS/ETS (1984) en el procedimiento STATESPACE. El objetivo del presente trabajo es facilitar el entendimiento de este método de identificación, pues el trabajo original (Akaike 1976) y el manual del usuario del SAS/ETS, a juicio del autor, son extremadamente densos para un principiante.

2. EL ESPACIO PREDICTOR DE UN PROCESO ESTOCASTICO.

Sea $\{Y(n)\}$ un proceso estocástico estacionario, gaussiano con media cero y dimensión r (de tiempo discreto). Sea

$$Y(n+k|n) = E(Y(n+k)|\ Y(n),Y(n-1),\ldots), \qquad k = 0,1,\ldots$$

Sea $Y_j(n)$ la j-ésima componente del vector aleatorio $Y(n)$, $j = 1,\ldots,r$. Entonces, el espacio vectorial generado por el

$$\{Y_j(n+k|n): j = 1,\ldots,r;\ k = 0,1,\ldots\}$$

se llama el espacio predictor del proceso en el tiempo n. Para referencia posterior este espacio se denota $P(n)$.

EJEMPLO 1.

Considerar el proceso unidimensional ($r = 1$) $\{Y(n)\}$ el cual obedece el modelo ARMA (2,1)

$$Y(n) + B_1Y(n-1) + B_2Y(n-2) = X(n) + A_1X(n-1) \qquad (5)$$

donde $\{X(n)\}$ es el proceso definido anteriormente en la expresión (2) y llamado **proceso de innovaciones**; B_1, B_2 y A_1 son constantes tales que el proceso es estacionario.

Entonces

$$\begin{aligned} Y(n|n) &= Y(n) \\ Y(n+1|n) &= -B_1Y(n)-B_2Y(n-1)+A_1X(n) \\ Y(n+2|n) &= -B_1Y(n+1|n) - B_2Y(n) \\ &= \alpha_1(2)Y(n+1|n) + \alpha_o(2)Y(n). \end{aligned}$$

donde $\alpha_1(2) = -B_1$, $\alpha_o(2) = -B_2$.

$$\begin{aligned} Y(n+3|n) &= -B_1Y(n+2|n)-B_2Y(n+1|n) \\ &= (B_1^2 - B_2)Y(n+1|n) + B_1B_2Y(n) \\ &= \alpha_1(3)Y(n+1|n) + \alpha_o(3)Y(n) \end{aligned}$$

donde $\alpha_1(3) = B_1^2 - B_2$ y $\alpha_o(3) = B_1 B_2$.

En general

$$Y(n+k|n) = \alpha_1(k)Y(n+1|n)+\alpha_o(k)Y(n), \quad k = 2,3,...$$

donde $\alpha_1(k)$ y $\alpha_2(k)$ son funciones de B_1, B_2 y k.

Considerando a $Y(n)$ y $Y(n+1|n)$ como vectores en el espacio con producto interno de las variables aleatorias con media cero, se puede decir que $Y(n+k|n)$, $k = 0,1,...$ pertenece al subespacio generado por $\{Y(n),Y(n+1|n)\}$, el cual coincide con $P(n)$.

Si $\rho_1 = \mathrm{Corr}(Y(n),Y(n-1))$ y $\mathrm{Corr}(Y(n),X(n))$, ambos son diferentes de ± 1, con $\sigma_Y^2 > 0$, entonces el conjunto $\{Y(n), Y(n-1),X(n)\}$ es independiente linealmente. Por lo tanto $Y(n)$ y $Y(n+1|n) = B_1 Y(n)+B_2 Y(n-1)+A_1 X(n)$ son independientes linealmente.

En consecuencia

(a) $\{Y(n),Y(n+1|n)\}$ es una base para $P(n)$

(b) $\dim(P(n)) = 2$.

Un modelo de estados para este proceso es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} V(n+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_2 & -B_1 \end{bmatrix} V(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ -B_1+A_1 \end{bmatrix} X(n+1) \\ Y(n) &= [1,0] \; V(n) \;, \end{aligned}\right\}$$

donde $V(n) = [Y(n),Y(n+1|n)]'$.

En efecto:

Considerar la base $\{Y(n),Y(n+1|n)\}$ de $P(n)$. $Y(n)$ y $Y(n+1|n)$

son los 2 (= $\dim(P(n))$) primeros elementos del

$$\{Y(n+k|n) \mid k = 0,1,\ldots\}.$$

Además constituyen el primer conjunto máximo de elementos independientes linealmente dentro de la sucesión $\{Y(n+k|n)\}_k$.

Sea $V(n) = [Y(n), Y(n+1|n)]'$. Entonces

$$V(n+1) = [Y(n+1), Y(n+2|n+1)]'$$

de lo cual

$$V(n+1|n) = [Y(n+1|n),\ Y(n+2|n)]'.$$

Si se interpreta la esperanza condicional $E(Y|X_1,X_2,\ldots)$ como la proyección* del vector aleatorio Y sobre el espacio generado por las variables aleatorias $X_1,X_2,\ldots$ entonces existen escalares **únicos** α_i, $i = 1,2,\ldots$ tales que

$$E(Y|X_1,X_2,\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_i.$$

Usando la idea anterior se obtiene que

$$V(n+1|n) = AV(n) \tag{6}$$

donde A es una matriz 2×2 única, que se puede asumir independiente del tiempo (pues el proceso es estacionario y el sistema invariante en el tiempo).

Se puede reescribir (6) de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} Y(n+1|n) \\ Y(n+2|n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(n) \\ Y(n+1|n) \end{bmatrix} .$$

Así

$$Y(n+1|n) = a_{11}Y(n) + a_{12}Y(n+1|n)$$

$$Y(n+2|n) = a_{21}Y(n) + a_{22}Y(n+1|n).$$

* proyección ortogonal.

Pero

$$Y(n+1|n) = 0Y(n) + 1Y(n+1|n)$$

$$Y(n+2|n) = -B_2Y(n) - B_1Y(n+1|n).$$

Como $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ es única entonces

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_2 & -B_1 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que el conocimiento del modelo ARMA para el proceso, permite obtener A más concretamente.

Ahora

$$V(n+1) - V(n+1|n) = W(n+1)$$

donde $w(n+1)$ es ortogonal a $P(n)$. Como $X(n+1) = Y(n+1)-Y(n+1|n)$ también es ortogonal a $P(n)$, entonces existe una matriz B, 2×1, **única** tal que

$$w(n+1) = BX(n+1). \tag{7}$$

Por lo tanto

$$V(n+1) = AV(n) + BX(n+1). \tag{8}$$

Sea $B = [b_1, b_2]'$, entonces (8) puede reescribirse así:

$$Y(n+1) = Y(n+1|n) + b_1X(n+1) \tag{9}$$

$$Y(n+2|n+1) = -B_2Y(n)-B_1Y(n+1|n) + b_2X(n+1) \tag{10}$$

De (9), $b_1 = 1$ y (10) puede escribirse así:

$$Y(n+2|n+1) = -B_2Y(n)-B_1[Y(n+1)-X(n+1)]+b_2X(n+1)$$

$$= -B_1Y(n+1)-B_2Y(n) + (B_1+b_2)X(n+1).$$

Por lo tanto

$$Y(n+2) = -B_1Y(n+1)-B_2Y(n)+X(n+2)+(B_1+b_2)X(n+1) \tag{11}$$

Por la unicidad del modelo ARMA de (5) se sigue que

$$A_1 = B_1 + b_2$$

ó

$$b_2 = -B_1 + A_1.$$

Se ha usado nuevamente el modelo ARMA para conocer explícitamente a b_2. Empleando la función de respuesta al impulso, b_2 puede ser interpretado sin acudir a esa representación. En efecto:

Supóngase que

$$Y(n) = X(n)+\psi_1X(n-1)+\psi_2X(n-2)+\dots$$
$$= (1+\psi_1L+\psi_2L^2+\dots)X(n)$$

donde L es el operador de retardo. Entonces, de (11) se obtiene que

$$(1+B_1L+B_2L^2)Y(n) = (1+(B_1+b_2)L)X(n),$$

luego

$$(1+B_1L+B_2L^2)(1+\psi_1L+\psi_2L^2+\dots) = 1+(B_1+b_2)L,$$

lo cual implica que

$$\psi_1 + B_1 = B_1 + b_2,$$

por tanto

$$b_2 = \psi_1.$$

Esto significa que b_2 es la respuesta al impulso de $\{Y(n)\}$ en el retardo 1.

Aquí hay un hecho para destacar: sea

$V(n) = [V_1(n),V_2(n)]'$ entonces $V_1(n) = Y(n|n)$ y $V_2(n) = Y(n+1|n)$.

b_2 es obtenido al considerar $V_2(n) = Y(n+1|n)$ y 1 es el retardo de n con respecto a $n+1$.

Una interpretación análoga se tiene para b_1, pues $1=b_1$ es la respuesta al impulso de $\{Y(n)\}$ en el retardo 0, y b_1 aparece al considerar $V_1(n) = Y(n|n)$.

Finalmente $C = [1,0]$ pues $V_1(n) = Y(n)$.

EJEMPLO 2.

Sea $\{Y(n)\}$ un proceso bivariado, es decir,

$$Y(n) = [Y_1(n),Y_2(n)]' ,$$

tal que

$$Y(n)+B_1Y(n-1)+B_2Y(n-2)+B_3Y(n-3) = X(n)+A_1X(n-1) \qquad (12)$$

donde $X(n) = [X_1(n),X_2(n)]'$ y

$$B_1 = \begin{bmatrix} -b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{12} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b_{21} & 0 \\ 0 & -b_{22} \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_{32} \end{bmatrix}, \quad y$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se asume que B_1,B_2,B_3 y A_1 son tales que el proceso $\{Y(n)\}$ es estacionario e invertible(1).

(1) Se asume además que los polinomios matriciales $h(Z) = I+B_1Z+B_2Z^2+B_3Z^3$ y $q(Z) = I+A_1Z$ no tienen factores izquierdos comunes. Así la representación (12) es única, según el criterio de Hannan (1969).

El modelo (12) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\ y_1(n-1) \\ b_{12}\ y_2(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{21}\ y_1(n-2) \\ b_{22}\ y_2(n-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{32}\ y_2(n-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(n) \\ X_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} aX_1(n-1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

de la cual

$$y_1(n) = b_{11}y_1(n-1)+b_{21}y_1(n-2)+X_1(n)+aX_1(n-1)$$

$$y_2(n) = b_{12}y_2(n-1)+b_{22}y_2(n-2)+b_{32}y_2(n-3)+X_2(n).$$

El espacio predictor $P(n)$ de este proceso es el espacio vectorial generado por el

$$\{y_j(n+k|n) : j = 1,2,; \quad k = 0,1,\ldots\}.$$

Para hallar una base de $P(n)$ se puede proceder de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
y_1(n|n) &= y_1(n) \\
y_2(n|n) &= y_2(n) \\
y_1(n+1|n) &= b_{11}y_1(n)+b_{21}y_1(n-1)+aX_1(n) \\
y_2(n+1|n) &= b_{12}y_2(n)+b_{22}y_2(n-1)+b_{32}y_2(n-2) \\
y_1(n+2|n) &= b_{11}y_1(n+1|n)+b_{21}y_1(n) \\
y_2(n+2|n) &= b_{12}y_2(n+1|n)+b_{22}y_2(n)+b_{32}y_2(n-1) \\
y_1(n+3|n) &= b_{11}y_1(n+2|n)+b_{21}y_1(n+1|n) \\
y_2(n+3|n) &= b_{12}y_2(n+2|n)+b_{22}y_2(n+1|n)+b_{32}y_2(n) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Se observa que $y_1(n+2|n)$ y $y_j(n+k|n)$, $j = 1,2$, $k = 3,4,\ldots$ son combinación lineal del

$$\{y_1(n|n), y_2(n|n), y_1(n+1|n), y_2(n+1|n), y_2(n+2|n)\} = G(n) ,$$

por lo tanto $P(n)$ es generado también por $G(n)$.

Sean

$\{\rho_i(k)\}$ la función de autocorrelación de $\{Y_i(n)\}$, $i=1,2$.

$\{\rho_{12}(k)\}$ la función de autocorrelación cruzada entre $\{Y_1(n)\}$ y $\{Y_2(n)\}$.

$\{\rho_{ij}^{(YX)}(k)\}$ la función de autocorrelacón cruzada entre $\{Y_i(n)\}$ y $\{X_j(n)\}$, $i,j = 1,2$.

Se puede demostrar que si ninguna de estas funciones toman los valores ± 1 para todo $k \geqslant 1$ entonces $G(n)$ es independiente linealmente.

En consecuencia,

(a) $G(n)$ es una base para $P(n)$, y

(b) $\dim(P(n)) = 5$.

Nótese que $G(n)$ está conformado por las 5 primeras variables independientes linealmente de la sucesión

$$Y_1(n|n), Y_2(n|n), Y_1(n+1|n), Y_2(n+1|n), \ldots$$

Además es el máximo número de variables independientes linealmente de $P(n)$.

A continuación se obtendrá un modelo de estados para $\{Y(n)\}$:

Sea $V(n) = G(n)'$, considerando $G(n)$ como un vector fila. Entonces

$$V(n+1) = G(n+1)'$$
$$= [y_1(n+1), y_2(n+1), y_1(n+2|n+1), y_2(n+2|n+1), y_2(n+3|n+1)]',$$

en virtud de la estacionariedad del proceso.

Ahora

$$V(n+1|n) = [y_1(n+1|n), y_2(n+1|n), y_1(n+2|n), y_2(n+2|n), y_2(n+3|n)]'.$$

Como cada componente de $V(n+1|n)$ pertenece a $P(n)$ entonces existe una matriz A de dimensión 5×5, **única**, tal que

$$V(n+1|n) = AV(n). \tag{13}$$

Sea $A = (a_{ij})_{5\times5}$ entonces (13) implica que

$$V_i(n+1|n) = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} V_j(n); \quad i = 1,\dots,5.$$

Por lo tanto

$$V_1(n+1|n) = y_1(n+1|n) = a_{11}y_1(n|n)+a_{12}y_2(n|n)+a_{13}y_1(n+1|n)$$
$$+ a_{14}y_2(n+1|n)+a_{15}y_2(n+2|n).$$

Como $G(n)$ es base de $P(n)$ y $y_1(n+1|n) = V_1(n+1|n)$ pertenece a $G(n)$ entonces

$$a_{11} = a_{12} = a_{14} = a_{15} = 0 \quad y \quad a_{13} = 1.$$

$$V_2(n+1|n) = y_2(n+1|n)$$
$$= a_{21}y_1(n)+a_{22}y_2(n)+a_{23}y_1(n+1|n)+a_{24}y_2(n+1|n)$$
$$+ a_{25}y_2(n+2|n).$$

Así $a_{24} = 1$ y $a_{2j} = 0$, $j = 1,2,3,5$.

$$V_3(n+1|n) = Y_1(n+2|n)$$
$$= b_{11}Y_1(n+1|n) + b_{21}Y_1(n),$$

donde se ha usado el modelo (12). Luego

$$a_{31} = b_{21},\quad a_{33} = b_{11},\quad a_{32} = a_{34} = a_{35} = 0.$$

$V_4(n+1|n) = Y_2(n+2|n)$ así $a_{45} = 1$ y $a_{4j} = 0$; $j = 1,2,3,4$.

$V_5(n+1|n) = Y_2(n+3|n)$, el cual no pertenece a $G(n)$. Pero usando el modelo (12) se obtiene que:

$$Y_2(n+3|n) = b_{32}Y_2(n)+b_{22}Y_2(n+1|n)+b_{12}Y_2(n+2|n),$$

por lo tanto

$$a_{51} = 0,\ a_{52} = b_{32},\ a_{53} = 0,\ a_{54} = b_{22},\ a_{55} = b_{12}.$$

En consecuencia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{22} & b_{12} \end{pmatrix}$$

Nótese que si $V_i(n+1|n)$ pertenece a $G(n)$ entonces la i-ésima fila de A contiene un solo 1 y las demás entradas son cero.

En seguida se obtendrá la matriz $B = (d_{ij})_{5\times 2}$:
De la ecuación

$$V(n+1) = AV(n) + BX(n+1)$$

se obtiene que:

(1) $y_1(n+1) = y_1(n+1|n) + d_{11}X_1(n+1)+d_{12}X_2(n+1)$.

Como $X_1(n+1|n) = y_1(n+1)-y_1(n+1|n)$ entonces

$$(d_{11}-1)X_1(n+1)+d_{12}X_2(n+1) = 0.$$

Si Var[X(n+1)] es no singular entonces $X_1(n+1)$ y $X_2(n+1)$ son independientes linealmente, luego

$$d_{11}-1 = 0 = d_{12}$$

así

$$d_{11} = 1 \quad y \quad d_{12} = 0.$$

(2) $y_2(n+1) = y_2(n+1|n)+d_{21}X_1(n+1)+d_{22}X_2(n+1)$

por tanto

$$d_{21}X_1(n+1) + (d_{22}-1)X_2(n+1) = 0$$

así

$$d_{21} = 0 \quad y \quad d_{22} = 1.$$

De nuevo se ha supuesto que Var[X(n+1)] es no singular. En lo sucesivo se seguirá con esta hipótesis.

(3) $y_1(n+2|n+1) = b_{21}y_1(n)+b_{11}y_1(n+1\ n)+d_{31}X_1(n+1)+d_{32}X_2(n+1)$

luego

$$\begin{aligned} y_1(n+2) &= y_1(n+2|n+1)+X_1(n+2) \\ &= b_{11}y_1(n+1)+b_{21}y_1(n)+X_1(n+2)+(d_{31}-b_{11})X_1(n+1) \\ &\quad + d_{32}X_2(n+1). \end{aligned}$$

Esta ecuación escalar es equivalente a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1-b_{11}L-b_{21}L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(n+2) = \begin{pmatrix} 1+(d_{31}-b_{11})L & 0 \\ 0 & d_{32}L \end{pmatrix} X(n+2)$$

donde L es el operador retardo.

Si se asume que

$$Y(n+2) = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{1j}L^j & \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{2j}L^j \\ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{3j}L^j & \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{4j}L^j \end{pmatrix} X(n+2)$$

entonces, en particular

$$\left.\begin{aligned} (1-b_{11}L-b_{21}L^2) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{1j}L^j &= 1 + (d_{31}-b_{11})L \\ (1-b_{11}L-b_{21}L^2) \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{2j}L^1 &= 0 \\ 0 &= d_{32}L \end{aligned}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene que $d_{32} = 0$ y de la primera que $d_{31} = \psi_{11}$, la respuesta impulso de $\{Y_1(n)\}$ a la entrada $\{X_1(n)\}$ en el retardo 1. La segunda implica que $\psi_{2j} = 0$ para todo $j \geqslant 1$, así que $\{X_2(n)\}$ no causa $\{Y_1(n)\}$.

Como

$$(1-b_{11}L-b_{21}L^2)Y_1(n) = (1+aL)X_1(n)$$

entonces

$$\psi_{11} = a + b_{11}.$$

(4) $Y_2(n+2|n+1) = Y_2(n+1|n)+d_{41}X_1(n+1)+d_{42}X_2(n+1)$.

Procediendo como en (3) se encuentra que $d_{41} = 0$ y que $d_{42} = \psi_{21}$, la respuesta impulso de $\{Y_2(n)\}$ a la entrada $\{X_2(n)\}$ en el retardo 1.

Como
$$(1-b_{12}L-b_{22}L^2-b_{32}L^3)Y_2(n) = X_2(n)$$
entonces $\psi_{21} = b_{12}$.

(5) $$Y_2(n+3|n+1) = b_{32}Y_2(n)+b_{22}Y_2(n+1|n)+b_{12}Y_2(n+2|n) + d_{51}X_1(n+1) + d_{52}X_2(n+1).$$

$Y_2(n+3|n+1)$ pertenece al espacio $P(n+1) = P(n)\oplus<\{X_1(n+1, X_2(n+1)\}>$, donde "< >" significa espacio generado. Por lo tanto $Y_2(n+3\ n+1) = A(n) + B(n+1)$, donde $A(n) \in P(n)$ y $B(n+1) \in <\{X_1(n+1),X_2(n+1)\}>$. $A(n)$ y $B(n)$ son únicos en el sentido de que existen escalares únicos $\beta_1,\ldots,\beta_5$, α_1,α_2 tales que
$$A(n) = \beta_1Y_1(n|n)+\beta_2Y_2(n|n)+\beta_3Y_1(n+1|n)+\beta_4Y_2(n+1|n)+\beta_5Y_2(n+2|n)$$
y $B(n) = \alpha_1X_1(n+1) + \alpha_2X_2(n+2)$.

Supóngase que
$$Y_2(n+3) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{1j}L^j\right)X_1(n+3) + \left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_{2j}L^j\right)X_2(n+3)$$
entonces
$$Y_2(n+3|n+1) = [\psi_{13}X_1(n)+\psi_{14}X_1(n-1)+\ldots+\psi_{23}X_2(n)+X_{24}X_2(n-1)+\ldots] + [\psi_{12}X_1(n+1)+\psi_{22}X_2(n+1)]. \tag{14}$$

Como
$$P(n) = <\{X_j(n-k) : j = 1,2 ; k = 0,1,\ldots\}>$$
entonces el término en el primer paréntesis a la derecha de (14) pertenece a $P(n)$. Luego, por la unicidad de $A(n)$ y $B(n+1)$, se obtiene que
$$\psi_{12} = d_{51} \quad y \quad \psi_{22} = d_{52} .$$

NOTA. Este razonamiento para obtener d_{51} y d_{52} puede efectuarse para obtener los resultados de (1)-(4) arriba.

ψ_{12} y ψ_{22} son las respuestas impulso de $\{Y_2(n)\}$, en el retardo 2, a $\{X_1(n)\}$ y $\{X_2(n)\}$, respectivamente.

Como

$$(1-b_{12}L-b_{22}L^2-b_{32}L^3)Y_2(n) = X_2(n)$$

entonces

$$\psi_{12} = 0 \quad y \quad \psi_{22} = b_{12}^2 + b_{22}.$$

De (1)-(5) se obtiene que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a+b_{11} & 0 \\ 0 & b_{12} \\ 0 & b_{12}^2+b_{22} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ya que las dos primeras componentes de $V(n)$ son $Y_1(n)$ y $Y_2(n)$.

Otro modelo de estados para este proceso es el siguiente:

$$Z(n+1) = \left(\begin{array}{c:c:c} 0 & I_2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_2 \\ \hdashline -B_3 & -B_2 & -B_1 \end{array}\right) Z(n) + \left(\begin{array}{c} I_2 \\ \hdashline \psi_1 \\ \hdashline \psi_2 \end{array}\right) X(n+1) \tag{15}$$

$$Y(n) = \left[\begin{array}{c:c:c} I_2 & 0 & 0 \end{array}\right] Z(n) ,$$

donde

$$Z(n) = [Y'(n), Y'(n+1|n), Y'(n+2|n)]'$$

I_2 es la matriz identidad de orden 2

$$\psi_1 = A_1 - B_1$$

$$\psi_2 = -B_1\psi_1 - B_2.$$

El modelo (15) tiene las siguientes desventajas frente al modelo obtenido vía el espacio predictor:

(a) Dimensión de $Z(n) = 6$, mayor que la de $V(n)$.

(b) $\mathrm{Var}(Z(n))$ singular, pues una componente es combinación lineal de las otras.

(c) Número de parámetros no cero = 17, mayor que el número de parámetros no cero del otro que es 15.

En la guía del usuario del SAS/ETS (1984) aparece la deducción del modelo general del tipo (15), la cual se basa en el modelo ARMA que obedece al proceso. Pero el modelo así obtenido no es adecuado, en el sentido de (a), (b) y (c). A juicio del autor del presente trabajo, existe una falla en la demostración que presenta la guía al no advertir este hecho.

3. CONCLUSIONES.

Una vía para identificar un modelo de estados para una serie temporal estacionaria, con media cero y gaussiana, es utilizar el espacio predictor del proceso que genera los datos.

Si la dimensión del espacio predictor $P(n)$ es finita y la varianza del proceso es no singular entonces:

(a) La dimensión del vector del estado $V(n)$ es igual a la dimensión del espacio predictor.

(b) Las componentes de $V(n)$ son los elementos de una base de $P(n)$. Generalmente la base se selecciona escogiendo el conjunto de las p primeras variables independientes linealmente de $P(n)$, donde p es la dimensión de $P(n)$. Esta representación se denomina la representación **canónica** del proceso (Akaike (1976)).

(c) Las entradas de la matriz de transición A se determinan proyectando $V(n+1)$ sobre $P(n)$. Más concretamente, si

$$V_i(n+1|n) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} V_i(n); \quad i = 1,\dots,p$$

entonces la i-ésima fila de A es igual a $(a_{i1},\dots,a_{ip})$.

(d) La componente (i,s) de la matriz de entrada B es la respuesta impulso de $\{Y_j(n)\}$ a la entrada $\{X_s(n)\}$ en el retardo k, si $V_i(n) = Y_j(n+k|n)$, donde $i = 1,\dots p$; $j,s = 1,\dots,r$, k depende de i, y r es la dimensión del proceso $\{Y(n)\}$.

(e) La matriz de salida C es igual a $[I_r \mid 0]$ donde I_r es la matriz identidad de orden r y 0 denota una matriz $r\times(p-r)$ de ceros.

En este trabajo $r = 1$ ó 2, $p = 2$ ó 5, pero la demostración para todo r y todo p aparece en Akaike (1976).

Este modelo de estados es **único** para la base escogida de $P(n)$, luego el modelo ARMA que se derive de él también es único.

La demostración para el caso en que $\mathrm{Var}(Y(n))$ sea singular está en Akaike (1976).

BIBLIOGRAFIA

Akaike, H., (1974), "Markovian Representation of Stochastic Processes and its aplication of the analysis of ARMA processes", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 26, 363-387.

———————, (1976), "Canonical Correlation Analysis of Time series and the use of an Information Criterion", Mehra R. and Lainiotis D.G. (editors), Advances and Case Studies in System Identification, Academic Press.

Hannan, E.J. (1969), "The identification of vector mixed autoregressive - moving average systems", Biometrika, 56, 223-225.

Kalman, R.E. (1960), "A new approach to linear filtering and prediction problems", Journal of Basic Enginering, Series D82, 34-45.

SAS Institute Inc., (1984), SAS/ETS User's Guide, Version 5 Edition, Cary, N.C., SAS Institute Inc.

West, M. and Harrison, J., (1989), Bayesian Forecasting and Dynamic Models, Springer-Verlag.

*