Revista Colombiana de Estadística
Nº 6 - 1982.

PRIMAS SIMPLES NETAS PARA UN SEGURO DE VIDA CONSIDERADAS COMO EL VALOR ESPERADO DEL TIEMPO RESTANTE DE VIDA

Luis G. Moreno O.

Profesor Asociado
Universidad Nacional.

1. Introducción.

El propósito de este artículo consiste en plantear el pago de un seguro como el valor esperado en función de una variable aleatoria que represente el tiempo que le resta de vida al tenedor de una póliza.

Sea T_x la variable aleatoria que indica el tiempo que le queda de vida a una persona de edad x. En esta forma, $0 < T_x < \omega - x$, siendo ω la edad máxima que puede alcanzar cualquier persona.

Ningún hecho basado en la experiencia sustenta la suposición de que una persona sobrevive n años pero no n años y un segundo. Por otra parte, las probabilidades de sobrevivir a edades avanzadas son muy pequeñas y en la práctica es útil asumir que ellas son insignificantes después de una edad específica. Desde este punto de vista es más realista asumir que los valores de las probabilidades $P\{T_x \geqslant t\}$ son insignificantes para $t > \omega$ y suponer entonces que, $0 < T_x < \infty$.

Cuando a una persona de edad x le queda un tiempo t de vida, esto es, $T_x = t$, indicamos por $b(t)$ el beneficio que paga la conpañía de seguros y por $v(t)$ la función de descuento. De esta manera, en el momento de la emisión de la póliza

$$U(t) = b(t)\cdot v(t)$$

representa el valor presente del beneficio pactado y el valor esperado $EU(T_x)$, representa la prima simple neta que corresponde a la suma asegurada $b(t)$.

2. Tiempo de vida discreto.

Supondremos inicialmente que la variable aleatoria T_x toma los valores $0,1,2,\ldots$. La función de distribución de esta variable en el instante t-1, se puede escribir en la forma

$$F_{T_x}(t-1) = P\{T_x \leqslant t-1\} = {}_tq_x$$

y su función de frecuencia está dada entonces por

$$P\{T_x = t\} = P\{T_x \leq t\} - P\{T_x \leq t-1\}$$
$$= {}_{t+1}q_x - {}_tq_x$$
$$= {}_{t/}q_x .$$

De esta manera, la prima simple neta para un seguro que provee un beneficio $b(t)$, puede considerarse como el valor esperado

$$EW(T_x) = \sum_{t=0}^{\infty} b(t)v(t) \cdot {}_{t/}q_x .$$

En la mayoría de las situaciones, $v(t) = v^{t+1}$, en donde v es el factor usual de descuento a la tasa de interés i , esto es, $v = 1/(1+i)$. De esta forma, mientras no se diga lo contrario, asumiremos que $v(t) = v^{t+1}$.

2.1. Seguros pagaderos al final del año en que se causan.

Consideremos ahora los tipos más comunes de seguros que tienen lugar. Un seguro que provee un pago sólo si la muerte ocurre dentro de un período límite, es conocido como un *seguro a término*. La prima simple neta a la edad x para tal seguro, con un período de n años y un beneficio 1, es indicada por $A^1_{x:\overline{n|}}$. En este caso,

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } t = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & \text{cuando } t = n,n+1,\ldots \end{cases}$$

Entonces

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} \quad \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \, .$$

Si el periodo se extiende hasta el final de la vida, de manera que el seguro es pagadero siempre y cuando la muerte ocurra, tenemos un *seguro de vida total* con prima simple neta A_x. En esta forma

$$b(t) = 1 \quad \text{para} \quad t = 0,1,2,\ldots$$

y así

$$A_x = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \, .$$

Cuando el pago se efectúa solo si la muerte ocurre luego de concluír un perído de n años y no después de $n+m$ años, tenemos un *seguro diferido* n años y por un término de m años con prima simple neta ${}_{n/m}A_x$. De esta manera,

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } t = n,n+1,\ldots,n+m-1 \\ 0 & \text{cuando } t \leqslant n-1 \text{ ó } t \geqslant n+m \end{cases}$$

teniéndose así

$${}_{n/m}A_x \quad \sum_{t=n}^{n+m-1} v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \, .$$

Un *seguro dotal* a n años de 1 provee un pago de 1 al final del año de muerte si el asegurado fallece dentro de n años o al final de los n años si el asegurado aûn vive. En estas circunstancias tenemos que

$$b(t) = 1 \quad \text{para} \quad t = 0,1,2,\ldots$$

$$v(t) = \begin{cases} v^{t+1} & \text{para} \quad t = 0,1,2,\ldots n-1 \\ v^{n} & \text{para} \quad t \geqslant n \end{cases}$$

Entonces, la prima simple neta que corresponde a este seguro viene dada por

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + v^{n} \sum_{t=n}^{\infty} {}_{t/}q_x \, .$$

Un *seguro creciente de vida total* provee un beneficio por muerte de 1 en el primer año, 2 en el segundo año, etc., incrementândose en 1 cada año hasta el final de la vida. En esta forma

$$b(t) = t+1 \quad \text{para} \quad t = 0,1,2,\ldots$$

y asî, la prima simple neta para este seguro a la edad x, viene dada por

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\infty} (t+1) v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \, .$$

El *seguro creciente a termino*, provee un beneficio por muerte de 1 en el primer año, incrementándose en 1 cada año, pero, a diferencia del anterior, ningún pago se hace si la muerte ocurre después de n años. En este caso

$$b(t) = \begin{cases} t+1 & \text{para} \quad t = 0,1,2,\dots,n-1 \\ 0 & \text{para} \quad t = n,n+1\dots \end{cases}$$

Entonces, la prima simple neta para este seguro, a la edad x, se puede expresar en la forma

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \ .$$

Finalmente, consideremos un *seguro decreciente a termino*. Este seguro provee un beneficio inicial por muerte de n, disminuyendo en 1 cada año, sin pago alguno, si la muerte ocurre después de n años. De lo anterior, se desprende que

$$b(t) = \begin{cases} n-t & \text{para} \quad t = 0,1,\dots,n-1 \\ 0 & \qquad\quad\; t = n,n+1,\dots \end{cases}$$

Por tanto, la prima simple neta para este seguro, a la edad x, se puede expresar como sigue

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (n-t)v^{t+1} \cdot {}_{t/}q_x \ .$$

3. Tiempo de vida continuo.

Supondremos ahora que la variable aleatoria T_x es continua. La función de distribución de esta variable se puede expresar en la forma

$$F_{T_x}(t) = P\{T_x \leqslant t\} = {}_tq_x .$$

Antes de establecer la función de densidad de la variable T_x, recordemos que la probabilidad de que una persona de edad x muera antes de cumplir la edad $x+t$, se puede escribir en la forma

$${}_tq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+t}}{\ell_x}$$

en donde ℓ_x representa el número de personas que vi ven a la edad x. De esta manera,

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}$$

representa la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a la edad $x+t$.

Teniendo en cuenta que la tasa instantánea de mortalidad μ_{x+t} para una vida de edad $x+t$ viene dada por

$$\mu_{x+t} = - \frac{1}{\ell_{x+t}} \frac{d\,\ell_{x+t}}{dt}$$

vemos que la función de densidad de la variable T_x esta dada por

$$f_{T_x}(t) = F^1_{T_x}(t) = -\frac{1}{f_x}\frac{d}{dt} f_{x+t}$$

$$= {}_tp_x \, \mu_{x+t}$$

En esta forma, la prima simple neta para un seguro que provee un beneficio $b(t)$ puede considerarse como el valor esperado

$$EU(T_x) = \int_0^\infty b(t)v(t)\cdot {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt.$$

Puesto que en la mayoría de las situaciones, $v(t) = v^t$ en donde v es el factor usual de descuento; mientras no se diga lo contrario, asumiremos que se cumple esta igualdad.

3.1. Seguros pagaderos en forma inmediata.

Consideremos ahora los seguros de vida que se pagan a los beneficiarios en el momento de la muerte de la persona asegurada. En estas circunstancias se presentan los mismos tipos de seguros vistos en el caso discreto, razón por la cual, sólo señalaremos las expresiones que indican las primas simples netas, sin entrar en detalle sobre las características de cada una de las distintas modalidades de seguros.

En este caso se utiliza una línea horizontal para señalar que el seguro se paga en forma inmediata.

Seguro a término

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad 0 < t \leqslant n \\ 0 & \text{cuando} \quad t > n \end{cases}$$

y

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

Seguro de vida total

$$b(t) = 1 \quad \text{para} \quad 0 < t < \infty$$

y

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

Seguro diferido

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } n < t \leqslant n+m \\ 0 & \text{cuando } t \leqslant n \text{ ó } t > n+m \end{cases}$$

y

$${}_{n/m}\bar{A}_x = \int_n^{n+m} v^t \cdot {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

Seguro Dotal

$$b(t) = 1 \quad \text{para} \quad 0 < t < \infty$$

$$v(t) = \begin{cases} v^{t} & \text{cuando } 0 < t \leq n \\ v^{n} & \text{cuando } t > n \end{cases}$$

y

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + v^{n} \cdot {}_{n}p_{x}$$

Seguro creciente de vida total

$$b(t) = [t+1] \quad \text{para } 0 < t < \infty$$

en donde $[t+1]$ indica la parte entera de $t+1$, y así

$$(I\bar{A})_{x} = \int_{0}^{\infty} [t+1]\, v^{t} \cdot {}_{t}p_{x}\, \mu_{x+t}\, dt$$

Seguro creciente a término

$$b(t) = \begin{cases} [t+1] & \text{cuando } 0 < t < n \\ 0 & \text{cuando } t \geq n \end{cases}$$

y

$$(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_{0}^{n} [t+1]\, v^{t} \cdot {}_{t}p_{x}\, \mu_{x+t}\, dt$$

Seguro decreciente a término

$$b(t) = \begin{cases} n-[t] & \text{cuando } 0 < t < n \\ 0 & \text{cuando } t \geq n \end{cases}$$

y

$$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}} = \int_{0}^{n} (n-[t])\, v^{t} \cdot {}_{t}p_{x}\, \mu_{x+t}\, dt$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Jordan, C.W., *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Second Edition, 1975.

* *