Revista Colombiana de Estadística
N° 3 - 1981

UNA EXTENSION DE LA PRUEBA DE FRIEDMAN

Jorge Ortiz P.
Instructor Asociado
Universidad Nacional

Introducción. Diversas generalizaciones de la prueba de Friedman a problemas de clasificación cruzada a tres o más vías son posibles tanto en el caso de una observación por celda como en el de varias observaciones por celda.

Damos en este artículo una ilustración para el caso de una clasificación cruzada a tres vías con una observación por celda.

Problema. Consideramos una o varias poblaciones cuyos elementos son clasificables según tres criterios diferentes A, B, C. La clasificación es posible dentro de I modalidades de A, J modalidades de B y K modalidades de C. Notamos x_{ijk} el elemento que presenta la modalidad i de A, la modalidad j de B y la modalidad k de C simultáneamente.

Suponemos que cada combinación de modalidades (i,j,k) está representada en el tablero de datos por un único elemento x_{ijk} (es decir, hay una observación por celda).

Tablero de datos

Criterio A	Criterio B	Criterio C		
		Mod.1	Mod.k	Mod.K
	Mod.1		⋮	
Mod.1	⋮		⋮	
⋮	Mod.J			
⋮	Mod.1			
Mod.i	⋮	. . .	x_{ijk}	
⋮	Mod.J			
⋮	Mod.1			
Mod.I	⋮			
	Mod.J			

Suponemos que los elementos x_{ijk} nos permiten una comparación de tipo ordinal entre ellos, de tal manera que para cada x_{ijk} podemos definir su rango dentro de un cierto subconjunto del tablero de datos.

Finalmente suponemos que las variables aleatorias X_{ijk} son mutuamente independientes.

Con el análisis que presentamos enseguida, tratamos de detectar si dentro de uno de los criterios A, B, C, existen modalidades que tienden a tener resultados más grandes que otra de las modalidades del mismo criterio.

HIPOTESIS

1. Para el criterio de clasificación A.

H_A^0: De acuerdo con el criterio de clasificación A, todas las posibles maneras de ordenar los elementos son igualmente probables.

H_A^1: En el criterio A, hay por lo menos una modalidad que tiende a tener valores más grandes que al menos una de las demás.

2. Para el criterio de clasificación B.

H_B^0: De acuerdo con el criterio de clasificación B, todas las maneras posibles de ordenar los elementos son igualmente probables.

H_B^1: Dentro del criterio de clasificación B hay por lo menos una modalidad que tiende a tener valores más grandes que al menos una de las demás.

3. Para el criterio de clasificación C.

Formulamos las hipótesis en forma análoga a las anteriores.

METODO. (Lo indicamos solamente para el criterio B)

Sea R_{ijk} el rango asociado a X_{ijk} dentro del conjunto

$$\{X_{i1k}, X_{i2k}, \ldots, X_{iJk}\}$$

bajo H_B^0, R_{ijk} toma los valores $1, 2, \ldots, J$ con igual probabilidad $1/J$.

Es fácil ver entonces que el valor esperado y la varianza de R_{ijk} son (bajo H_B^0),

$$E(R_{ijk}) = (J+1)/2$$

$$Var(R_{ijk}) = (J^2-1)/12$$

para todo $i = 1,\ldots,I$ y todo $k = 1,\ldots,K$.

Sea
$$R_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} R_{ijk}$$

entonces se tiene,

$$E(R_{\cdot j\cdot}) = IJ(J+1)/2$$

$$Var(R_{\cdot j\cdot}) = IJ(J^2-1)/12.$$

Y si definimos las variables Z_j mediante la expresión

$$Z_j = \frac{R_{\cdot j\cdot} - IK(J+1)/2}{\sqrt{IK(J^2-1)/12}}$$

entonces Z_j tiene valor esperado cero y varianza uno. Además siendo las variables $R_{\cdot j\cdot}$ idénticamente distribuídas con varianza finita no cero, podemos aplicar el teorema del límite central y concluír entonces que la distribución asintótica de Z_j es la distribución normal estándar.

De esta manera vemos que las variables

$$Z_j^2 = 12\,\frac{(R_{.j.}-IK(J+1)/2)^2}{IK(J^2-1)} \qquad j = 1,\ldots,J$$

tienen una distribución asintótica de Chi-2 con un grado de libertad. No debemos olvidar sin embargo que las variables $R_{.j.}$ no son independientes, puesto que se tiene la siguiente relación

$$\sum_{j=1}^{J} R_{.j.} = \sum_{j=1}^{J} \Big(\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} R_{ijk} \Big) = IKJ(J+1)/2$$

Se puede ver que la variable

$$T = \frac{J-1}{J} \sum_{j=1}^{J} Z_j^2$$

tiene una distribución asintótica de Chi-2 con $(J-1)$ grados de libertad. Así, para probar la hipótesis H_B^0 contra H_B^1 podemos utilizar

$$T = \frac{12}{IJK(J+1)} \sum_{j=1}^{J} (R_{.j.}-IK(J+1)/2)^2$$

$$= \frac{12}{IJK(J+1)} \sum_{j=1}^{J} R_{.j.}^2 - 3IK(J+1)$$

y sabiendo que $T \sim \chi^2_{J-1}$ asintóticamente, donde esta última expresión significa que la distribución asintótica de T es Chi-2 con $(J-1)$ grados de libertad.

Podemos observar que bajo H_B^0 esperamos que $R_{.j.}$ sea aproximadamente igual a su valor esperado $IK(J+1)/2$ para todo $j = 1,\ldots,J$ y en este caso T tiene un valor pequeño. Si hay alguno de los $R_{\cdot j \cdot}$ que difiere considerablemente de su valor esperado, T es más grande. De esta manera los valores grandes de T conducen a rechazar H_B^0.

Estadísticas análogas pueden obtenerse para probar las hipótesis H_A^0 contra H_A^1 y H_C^0 contra H_C^1.

Es interesante observar que si por ejemplo $K=1$, es decir que si solo hay dos criterios de clasificación (A y B) entonces la estadística T se reduce a

$$T = \frac{12}{IJ(J+1)} \sum_{j=1}^{J} R_{\cdot j}^2 - 3I(J+1)$$

que es la estadística de Friedman.

<u>Ejemplo práctico</u>. Se usan cuatro fertilizantes diferentes, uno en cada uno de seis terrenos diferentes; el experimento se repite usando tres tipos diferentes de semilla. Se observa la producción por área obteniéndose los siguientes resultados:

Semilla	Fertilizante	Terreno 1	2	3	4	5	6
1	1	80.5	87.0	86.1	82.1	79.3	84.2
	2	90.1	83.4	82.4	84.9	87.1	89.3
	3	87.0	89.1	91.0	84.4	92.2	85.3
	4	88.0	90.3	86.1	83.1	90.8	84.7
2	1	79.1	77.6	84.1	83.3	76.6	81.0
	2	87.0	82.0	80.6	79.5	86.2	84.1

Semilla	Fertilizante	Terreno 1	2	3	4	5	6
2	3	82.6	81.4	89.0	86.3	84.0	88.1
	4	81.5	87.9	80.4	83.1	87.4	85.0
3	1	85.4	89.2	90.0	83.4	87.1	82.3
	2	92.3	90.1	88.1	85.3	86.3	92.9
	3	92.0	90.2	87.2	94.3	88.4	95.1
	4	89.3	93.6	90.8	87.6	93.7	82.9

H_B^0 Ninguno de los fertilizantes tiende a tener valores de producción más grande que ninguno de los demás.

H_B^1 Existe por lo menos uno de los fertilizantes que tiende a tener valores de producción más grandes que al menos uno de los demás.

Nota. Este ejemplo es extraído de Conover (1971) pág. 172 donde el problema es resuelto mediante una prueba de la mediana.

En este problema particular tenemos:

$$I = 3, \quad J = 4, \quad K = 6$$

y las sumas de rangos para los fertilizantes son

$$R_{.1.} = 26.5 \qquad R_{.2.} = 47$$

$$R_{.3.} = 56 \qquad R_{.4.} = 50.5$$

(En caso de encontrar datos iguales asignamos el ran go medio) Reemplazando estos valores en la expresión dada para T encontramos

$$T = 16.5833.$$

A título de comparación damos el valor 14.0 obtenido mediante la utilización de la estadística de la mediana; ambos valores son resultado de variables cuya distribución asintótica es la de Chi-2 con tres grados de libertad. Sin que ello constituya una prueba, podemos observar que la estadística T basada en rangos pone en mayor evidencia el rechazo de H_B^0 que la estadística de la mediana.

<u>Conclusiones y observaciones</u>. Al conocimiento del autor del artículo, la estadística propuesta no aparece estudiada en la literatura. La idea de su existencia es sugerida por Conover (1971).

La distribución exacta de la estadística T bajo la hipótesis nula H_B^0 puede encontrarse enumerando los $(J!)^{IK}$ arreglos posibles de los rangos; pero esto resulta bastante largo y engorroso (en el caso del ejemplo citado hay 6.979147035×10^{24} arreglos equiprobables bajo H_B^0!). Este inconveniente es aún más serio en problemas de más de tres vías; sin embargo la convergencia hacia la ley asintótica es en estos casos mucho más rápida que en el caso de dos vías.

* * *

BIBLIOGRAFIA

[1] Conover,W.J., *Practical Nonparametric Statistics*, John Wiley, N.York, (1971).

*

POST-GRADO EN ESTADISTICA

El Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia ofrece cursos de postgrado en Estadística, conducentes a optar al título de *Magister Scientiae en Estadística*.

Para mayores informes dirigirse a:

Director Académico
Postgrado en Estadística
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.

Teléfono 2-699111 Extensión 867