UNA SOLUCION AL PROBLEMA INVERSO EN GEOMAGNETISMO

RAMIRO L. DIAZ
Profesor Asociado
Depto de Geociencias-Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Colombia

Díaz, R.L.: Una solución al problema inverso en geomagnetismo. Geofís. Colomb. **1**:53-56, 1992. ISSN 0121-2974

RESUMEN

Un tema importante en geofísica, es el problema inverso en geomagnetismo. En este trabajo se propone un método para resolverlo, que consiste en hallar la solución de un sistema móvil de ecuaciones no lineales a lo largo de un perfil magnético. Conociendo los datos de anomalías magnéticas y por medio de un programa que ejecuta un proceso iterativo eficiente, se determina la estructura bidimensional bajo el perfil muestreado.

ABSTRACT

An interesting aspect in Geophysics is the inverse problem in Geomagnetism. This paper proposes a method for solving it. So, the objective is to solve a mobil system of non linear equations along a magnetic profile. From knowed magnetic anomalies and using an efficient iterative process, it is possible to find a bidimensional structure below a sample profile.

1. INTRODUCCION

Encontrar el modelo que mejor interprete la estructura geológica a través de sus manifestaciones magnéticas, equivale a decir que se ha solucionado el problema inverso en geomagnetismo.
Se propone un método para encontrar una solución al problema inverso a partir del modelo propuesto por **Campbell & Hines** (1981). El método consiste en solucionar un sistema móvil de ecuaciones no lineales a lo largo de un perfil magnético, en lo posible perpendicular a la estructura. Es un proceso iterativo que se repite hasta lograr el modelo que cumpla con las condiciones requeridas (**Robert & Gex**, 1985).
La aplicación del método a un perfil magnético permite hacer un análisis de la convergencia y de las ventajas que presenta.

2. CONSIDERACIONES ANALITICAS

Campbell & Hines (1981), proponen el siguiente modelo en interpretación magnética:

$$\Delta T_i^c = M \Sigma_k P_k (Z_k, Z_{k+1}) \quad 1 \leq k \leq n \quad \textbf{[1]}$$

n : Número de vértices del polígono al cual se aproxima la sección transversal de la fuente magnética
ΔT_i^c: Campo magnético total calculado a partir de la estructura magnetizada
$M = 2 \chi T_o \; [1\text{-}Cos^2(I)\; Cos^2(S)]$
: Factor que determina las propiedades magnéticas de la estructura geológica

χ : Contraste de susceptibilidad magnética

T_o : Campo Geomagnético (Campo magnético inductor)

I : Inclinación magnética

S : Azimut de la estructura

$P_k\ (Z_k, Z_{k+1}) = \text{Sen}\ D[(C-B)\ \text{Sen}(U-D) + R\ \text{Cos}(U-D)]$:

Factor geométrico del modelo

$D = \text{Tan}^{-1}\ [(Z_{k+1} - Z_k)/(X_{k+1} - X_k)]$

$C = (\pi/2) - \text{Tan}^{-1}\ (Z_{k+1}/X_{k+1})$

$B = (\pi/2) - \text{Tan}^{-1}\ (Z_k/X_k)$

$U = \text{Tan}^{-1}\ [\text{Tan}(I)/\ \text{Tan}(S)]$

$R = \text{Ln}\ [\ \sqrt{(Z^2_{k+1} + X^2_{k+1})}/\ \sqrt{(Z_k^2 + X_k^2)}\ ]$

El modelo propuesto por **Campbell & Hines** (1981), permite calcular la anomalía magnética de la estructura bidimensional sobre un perfil determinado conociendo la posición y geometría de la fuente magnética. El problema así planteado, se denomina problema directo en geomagnetismo.
Se utiliza el modelo mencionado para dar solución al problema inverso; es decir, conociendo los datos de anomalías magnéticas en un perfil, se pretende determinar la estructura bidimensional.
Si se tienen **n** muestras de campo magnético total y se desea encontrar la profundidad de la interfase magnética bajo cada punto de muestreo, se debe pensar en un sistema de **n** ecuaciones con **n** incógnitas, lo cual no es conveniente cuando **n** es muy grande (**Velleman & Hoagiling**, 1981). Para solucionar el problema se propone un sistema móvil de tres ecuaciones que deben recorrer todo el perfil. Este proceso se debe repetir hasta que las desviaciones del campo calculado (ΔT_i^c), con respecto al campo observado en terreno (ΔT_i^o), se hagan mínimas.
Se considera un sistema de tres ecuaciones Q_j, Q_{i+1}, Q_{i+2}, evaluadas en las estaciones i, i+1, i+2, del perfil magnético con tres incógnitas Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2}. En el recorrido del sistema por el perfil cada punto interviene tres veces en la solución del sistema.

$$Q_i\ (Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2}) = \Delta T_i^o - \Delta T_i^c$$

$$Q_{i+1}\ (Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2}) = \Delta T^o_{i+1} - \Delta T^c_{i+1}$$

$$Q_{i+2}\ (Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2}) = \Delta T^o_{i+2} - \Delta T^c_{i+2} \qquad [2]$$

Cada una de las ecuaciones del sistema se expande en términos de una serie de Taylor con el fin de encontrar la relación de recurrencia que se emplea en el proceso iterativo (**Bruce**, 1981)
Así:

$$\begin{aligned} Q_i = Q^o_i &+ [\delta Q^o_i/\delta Z_i]\ [Z_i - Z^o_i] \\ &+ [\delta Q^o_i/\delta Z_{i+1}]\ [Z_{i+1} - Z^o_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_i/\delta Z_{i+2}]\ [Z_{i+2} - Z^o_{i+2}] + Q_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{i+1} = Q^o_{i+1} &+ [\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_i]\ [Z_i - Z^o_i] \\ &+ [\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+1}]\ [Z_{i+1} - Z^o_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+2}]\ [Z_{i+2} - Z^o_{i+2}] + Q_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{i+2} = Q^o_{i+2} &+ [\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_i]\ [Z_i - Z^o_i] \\ &+ [\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+1}]\ [Z_{i+1} - Z^o_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+2}]\ [Z_{i+2} - Z^o_{i+2}] + Q_r \end{aligned} \qquad [3]$$

En donde,

Z_i : Profundidad real de la estructura

Z^o_i : Estimador de Z_i

Q_i : Función evaluada en (Z_i, Z_{i+1}, Z_{i+2})

Q^o_i : Función evaluada en (Z^o_i, Z^o_{i+1}, Z^o_{i+2})

$\delta Q^o_i/\delta Z_i$: Derivada de la función Q_i, evaluada en Z^o_i, Z^o_{i+1}, Z^o_{i+2}

Q_r : Residuo en la serie de Taylor.

Los valores Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2} y Q_r, deben tender a cero a medida que el campo calculado se aproxima al valor del campo observado; es decir, el modelo obtenido representa la estructura geológica.
Bajo estas condiciones el sistema [3] se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q^o_i = &[\delta Q^o_i/\delta Z_i]\ [Z^o_i - Z_i] \\ &+ [\delta Q^o_i/\delta Z_{i+1}]\ [Z^o_{i+1} - Z_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_i/\delta Z_{i+2}]\ [Z^o_{i+2} - Z_{i+2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^o_{i+1} = &[\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_i]\ [Z^o_i - Z_i] \\ &+ [\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+1}]\ [Z^o_{i+1} - Z_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+2}]\ [Z^o_{i+2} - Z_{i+2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^o_{i+2} = &[\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_i]\ [Z^o_i - Z_i] \\ &+ [\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+1}]\ [Z^o_{i+1} - Z_{i+1}] \\ &+ [\delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+2}]\ [Z^o_{i+2} - Z_{i+2}] \end{aligned} \qquad [4]$$

$$\begin{bmatrix} Q^o_i \\ Q^o_{i+1} \\ Q^o_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta Q^o_i/\delta Z_i & \delta Q^o_i/\delta Z_{i+1} & \delta Q^o_i/\delta Z_{i+2} \\ \delta Q^o_{i+1}/\delta Z_i & \delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+1} & \delta Q^o_{i+1}/\delta Z_{i+2} \\ \delta Q^o_{i+2}/\delta Z_i & \delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+1} & \delta Q^o_{i+2}/\delta Z_{i+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^o_i - Z_i \\ Z^o_{i+1} - Z_{i+1} \\ Z^o_{i+2} - Z_{i+2} \end{bmatrix}$$

De modo que:

$$Q^o = J\,(Z^o - Z)$$
$$Z = Z^o - J^{-1}\,Q^o \qquad [5]$$

Z : Matriz cuyos elementos son los valores que más se aproximan a los Z_i reales
Z^o : Matriz que contiene los estimadores de Z_i
Q^o : Matriz de desviaciones
J : Jacobiano del sistema

El proceso se realiza utilizando un programa cuyo algoritmo se plantea en la ecuación de recurrencia [5]. Se inicia con una primera aproximación a la estructura geológica y se ajusta el modelo, mediante aproximaciones sucesivas, hasta obtener la estructura que mejor satisface el muestreo magnético del campo total. En el programa se usó una tolerancia de $|0.1|$ para los Q_i.

3. CONVERGENCIA Y EXACTITUD DEL METODO

Se considera el perfil magnético cuyos datos se consignan en la Tabla 1, con origen en el punto A. Observando los resultados de los cálculos suministrados por el programa (Tablas 2 a 5), se infiere que, a partir de una burda aproximación, en más o menos cinco iteraciones se consigue un modelo ajustado a la estructura geológica, lo cual garantiza su eficiencia.
Los puntos 1 y 8 son de amarre en el modelo. La topografía se mide como una altura sobre el nivel del mar y los valores de Z son profundidades bajo el nivel del mar.

Tabla 1
Datos del perfil magnético

Estac	Anomalía(γ)	Dist.Horiz(m)	Topogr(m)
A	235.7	0.0	0.1
B	-33.4	400.0	50.0
C	-44.1	1000.0	40.0
D	-111.0	1600.0	0.1
E	-64.6	2200.0	30.0
F	-66.8	3000.0	60.1
G	-52.4	3800.0	70.1
H	288.8	4800.0	0.1

Tabla 2
Datos de la I Iteración

i	Z_i^o (m)	ΔT_i^c (γ)	Q_i (γ)	Z_i (m)
1	0.1	-	-	0.1
2	870.0	-45.6	6.8	927.5
3	860.0	-62.1	4.7	1408.4
4	830.0	-62.9	1.6	1162.2
5	800.0	-110.7	0.2	764.0
6	840.0	-43.1	0.9	775.3
7	850.0	-25.1	8.2	495.9
8	0.1	-	-	0.1

Tabla 3
Datos de la II Iteración

i	Z_i^o (m)	ΔT_i^c (γ)	Q_i (γ)	Z_i (m)
1	0.1	-	-	0.1
2	927.5	-54.2	-1.8	917.6
3	1408.4	-66.7	0.1	1328.0
4	1162.2	-64.5	0.1	1106.1
5	764.0	-110.7	0.2	690.8
6	775.3	-44.1	0.0	756.7
7	495.9	-33.4	0.0	500.5
8	0.1	-	-	0.1

Tabla 4
Datos de la III Iteración

i	Z_i^o (m)	ΔT_i^c (γ)	Q_i (γ)	Z_i (m)
1	*0.1*	-	-	*0.1*
2	*917.6*	*-53.4*	*-1.1*	*900.6*
3	*1328.0*	*-66.8*	*0.0*	*1297.3*
4	*1106.1*	*-64.6*	*0.0*	*1106.7*
5	*690.8*	*-111.0*	*0.0*	*690.3*
6	*756.7*	*-44.1*	*0.0*	*753.3*
7	*500.5*	*-33.4*	*0.0*	*499.1*
8	*0.1*	-	-	*0.1*

Tabla 5
Datos de la V Iteración

i	Z_i^o (m)	ΔT_i^c (γ)	Q_i (γ)	Z_i (m)
1	*0.1*	-	-	*0.1*
2	*900.7*	*-52.4*	*-0.1*	*900.5*
3	*1296.4*	*-66.8*	*0.0*	*1296.4*
4	*1105.5*	*-64.6*	*0.0*	*1105.4*
5	*690.4*	*-111.0*	*0.0*	*690.4*
6	*753.2*	*-44.1*	*0.0*	*753.2*
7	*499.0*	*-33.4*	*-0.1*	*499.0*
8	*0.1*	-	-	*0.1*

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una solución al problema inverso en geomagnetismo. El algoritmo que se emplea ofrece eficiencia y facilidad para manejar grandes cantidades de información, con un método de análisis numérico sencillo.

REFERENCIAS

Campbell, D.L. & Hines. (1981): Manual of Geophysical hand Calculator programs. SEG, USA.

Bruce, E. (1981): Introducción al Análisis numérico con Fortran. Univ. Ped. Tec. Colomb., Tunja.

Robert, A. & P. Gex. (1985): interprétation géophysique rapide. Logiciel BASIC pour micro-ordinateur. Bulletin de l'Institut de Géophysique, Nº6. Université de Lausanne.

Velleman, P.F. & D.C. Hoagiling. (1981): Applications Basics and Computing of exploratory Data Analysis. Duxbury Press, Boston, Massachusetts.