EKONOMSKA ANALIZA
3, XVIII (1984), 241—257

DINAMIČKI MODEL JUGOSLOVENSKE PRIVREDE NA BAZI MATRICE RASTA

*Vesna PASETA**

U prvom delu rada teorijski se dokazuje valjanost dinamičkog modela na bazi matrice rasta kao osnove prezentovanja rasta ekonomskog sistema i utvrđuju neke njegove osobine. Dalje, na osnovu empirijskih podataka o kretanju društvenog proizvoda preko privrednih delatnosti, određuje se rast jugoslovenske privrede u periodu od 1974. do 1980. godine prema iznetom modelu.

1. IZVOĐENJE MODELA

Neka je posmatrani ekonomski sistem definisan sa n aktivnosti (sektora, delatnosti, RO i slično). Označimo sa Y_{it} nivo i-te aktivnosti u trenutku t, tako da su Y_{it} i Y_{it-1}, $i = 1, \ldots, n$ vrednosti i-te aktivnosti posmatranog ekonomskog sistema, kompletno opisanog sa n različitih aktivnosti u trenutku t i t—1. Apsolutna promena i-te aktivnosti u posmatranom periodu je

$$\Delta Y_{it} = Y_{it} - Y_{it-1}$$

Polazeći od pretpostavke da je promena i-te aktivnosti, u opštem modelu definisanom međusobno zavisnim aktivnostima, funkcija obima ostalih aktivnosti u periodu t izražena sa F_i i da ne zavisi eksplicitno od t, imamo da je

$$\Delta Y_{it} = F_i (Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Na bazi date relacije možemo dobiti sistem koji pokazuje vezu između aktivnosti u periodu t, odnosno t—1, naime

$$Y_{it} - F_i (Y_{1t}, \ldots, Y_{nt}) = Y_{it-1} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Prezentovani sistem može biti različit, zavisno od konkretnog oblika funkcija F_i, $i = 1, \ldots, n$, ali je njegova specifičnost u tome

* Ekonomski fakultet, Beograd.

što se promena nivoa posmatrane aktivnosti razmatra u funkciji obima ostalih aktivnosti u periodu t. S obzirom na koncepciju matrice rasta[1], ona kao linearno autonomno preslikavanje može prezentovati adekvatan tip međusobne zavisnosti aktivnosti. Specifičnost toga koncepta je što uspostavlja međusobne veze između posmatranih ekonomskih aktivnosti, koje definišu odgovarajući ekonomski sistem na osnovu strukture rasta. Naime, poznavajući odnose rasta posmatranih ekonomskih aktivnosti mogu se utvrditi njihove međusobne funkcionalne povezanosti na bazi kojih se izvode dinamički modeli posmatranog ekonomskog sistema.

Indirektne stope rasta definišu se kao odnos priraštaja i-te aktivnosti Y_{it} i vrednosti j-te aktivnosti u periodu t. Naime, imamo da je

$$r_{ijt} = \frac{\Delta Y_{it}}{Y_{jt}} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Dobijene parametre možemo izraziti u matričnom obliku preko matrice rasta, za period t

$$R_t = \begin{Bmatrix} r_{11t} & r_{12t} & \ldots & r_{1nt} \\ r_{21t} & r_{22t} & \ldots & r_{2nt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1t} & r_{2nt} & \ldots & r_{nnt} \end{Bmatrix}$$

gde elementi po glavnoj dijagonali predstavljaju direktne stope rasta ($i = j$), a ostali ($i \neq j$) indirektne stope u periodu t. Pri tome, indirektne stope rasta r_{ijt}, $i, j = 1, \ldots, n$ pokazuju relativni rast i-te aktivnosti u t-tom periodu. Skup svih indirektnih i direktnih stopa rasta, izražen preko matrice rasta, omogućava da se sagleda struktura rasta između aktivnosti i da se u najopštijem obliku izraze njihovi relativni odnosi, a samim tim i rast posmatranog ekonomskog sistema definisanog datim skupom aktivnosti.[2]

Potrebno je naglasiti da je široka aplikativnost jedno od osnovnih svojstava matrice rasta i modela na njoj zasnovanih, i to u dvostrukom smislu. Uvek je moguće određenom skupu ekonomskih aktivnosti, sa eksplicitnom ili implicitnom vremenskom dimenzijom, pridružiti odgovarajuću matricu rasta i, u zavisnosti od konkretnih uslova, definisati određeni model koji prezentuje posmatrane aktivnosti i omogućava detaljnu analizu. S druge strane, matrica rasta i modeli na njoj zasnovani, mogu se lako uključiti i u poznate ekonomske matematičke modele, čime neke od njih mogu približiti svojoj aplikativnosti, a isto tako i razrešiti neke probleme imanentne tim modelima.

[1] D. Stojanović: *Teorijski i praktični aspekti materice rasta*, SA, Beograd 1978; takođe od autora »A matrix of growth optimization model for the production activity of cooperating enterprises«, *Operational Research Quarterly*, No. 4, London, 1977; »Intersectorial model on the basis of matrix of growth«, European Congress of Econometric Society, Vienna, 1977.

[2] Op. cit., strana 6.

Funkcionalne veze F_i iz (1) mogu se izraziti preko odgovarajućih vrsta matrice rasta. Tako imamo da je

$$Y_{it} - \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} r_{ijt} Y_{jt} = Y_{it-1} \qquad i = 1, \ldots, n$$

ili u matričnom obliku

$$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\} Y_t = Y_{t-1}, \tag{2}$$

gde su I i R_{ind} jedinična matrica i matrica indirektnih stopa rasta, a Y_t i Y_{t-1} vektori aktivnosti u periodu t i t—1. Na taj način, zapravo, definišu se kretanja aktivnosti preko autonomnog dinamičkog sistema na bazi matrice rasta.

Rešavanjem dobijenog sistema u mogućnosti smo da, na osnovu poznatog vektora aktivnosti u periodu t—1 i matrice rasta indirektnih stopa, ocenimo vektor aktivnosti u narednom periodu t, uz pretpostavku da je

$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ nesingularna matrica. Imamo, naime, da je

$$Y_t = \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1} Y_{t-1}.$$

Uočimo da je sistem (2) definisan na osnovu matrice rasta indirektnih stopa. Pri tome potrebno je istaći da skup indirektnih stopa determiniše direktne stope rasta svih aktivnosti, pa sledi da je dinamički sistem posmatranih aktivnosti kompletno određen preko matrice indirektnih stopa rasta.

Analizirajmo detaljnije koje uslove treba da zadovolji sistem zasnovan na matrici indirektnih stopa rasta, da bi na adekvatan način odražavao dinamiku određenog ekonomskog sistema opisanog datim aktivnostima. S obzirom da vektor Y_t predstavlja vektor nivoa aktivnosti, ekonomski uslovi nalažu da Y_t mora biti nenegativan za svako t iz posmatranog perioda. U tom smislu, ispitajmo uslove koje treba da zadovolji matrica

$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$, odnosno R_{ind} da bi dinamički sistem, na njoj zasnovan, generisao nenegativna rešenja.

Interesuju nas uslovi koje treba da zadovolji matrica

$$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\} \quad \text{da bi rešenje sistema,}$$

$$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\} Y_t = Y_{t-l}$$

bilo negativno za, po pretpostavci, nenegativni vektor Y_{t-1}. U ispitivanju tih uslova može nam pomoći poznata Hawkins-Simon-ova teorema, odnosno Hawkins-Simon-ovi uslovi[3] koji se upravo odnose na takve probleme.

Prema tome, da bi ispitali da li sistem (2) daje nenegativno rešenje za nenegativno Y_{t-1}, potrebno je odrediti sve glavne minore matrice sistema. Ako je u pitanju sistem manjih dimenzija to nije poseban problem. Međutim, ako operišemo sa matricom većih dimenzija, odnosno ako je posmatrani ekonomski sistem određen velikim brojem aktivnosti, direktno ispitivanje navedenih uslova podrazumeva izračunavanje velikog broja determinanti. Da bi to izbegli poslužimo se teoremom koja tvrdi da matrica

$$\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\} \quad \text{zadovoljava Hawkins-Simon-ove uslove,}$$

ako i samo ako ima kvazi dominantnu dijagonalu.[4]

---

[3] Za matricu $A = \{a_{ij}\}$ kažemo da zadovoljava Hawkins-Simon-ove uslove ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni, odnosno,

$$a_{ii} > 0 \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad |A| > 0$$

Ako matrica A zadovoljava navedene uslove, tada sistem $Ax = y$ ima nenegativno rešenje x za bilo koji nenegativni vektor y, gde su x, y vektori dimenzije n, a A kvadratna matrica nxn. (Dokaz, originalno dat kod Hawkins D., Simon H. »Note: Some conditions of macroeconomic stability«, *Econometrica* 17, 1949, st. 245—48, može se naći i kod Nikaido H.: *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North-Holland Pub. Com., Amsterdam, 1970, st. 13—19, ili Murata Y.: *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, New York, 1977, st. 51—53.)

[4] Matrica $A = \{a_{ij}\}$ ima kvazi dominantnu dijagonalu ako postoje pozitivni skalari d_j, $j = 1, \ldots, n$ takvi da za bilo koji neprazni podskup indeksa J iz $N = \{1, \ldots, n\}$,

$$d_j \, |a_{jj}| \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} d_i \, |a_{ij}| \quad za \quad j \in J$$

sa striktnom nejednakošću za neko $j \in J$.

Iz definicije neposredno sledi da ako A ima kvazi dominantnu dijagonalu tada su svi njeni dijagonalni elementi različiti od nule. Takođe, ako je A sa dominantnom dijagonalom, odnosno ako postoje pozitivni skalari d_i, $i = 1, \ldots, n$ takvi da

Ispitujemo da li matrica sistema (2) $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ označimo je sa A gde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\dfrac{1}{n-1} r_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

ima kvazi dominatntnu dijagonalu.[5] Prema definiciji potrebno je da utvrdimo da li postoje pozitivni skalari d_i, takvi da

$$d_j \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} d_i \left| \frac{1}{n-1} r_{ij} \right| \quad j \in J \tag{3}$$

za bilo koji neprazni podskup indeksa J iz $N = \{1, \ldots, n\}$, gde za neko $j \in J$ nejednakost važi striktno.

Iz (3) imamo da

$$(n-1) \, d_j \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} d_i \, |r_{ij}| \qquad j \in J$$

te s obzirom na definiciju indirektne stope rasta, $r_{ij} = \dfrac{\Delta Y_i}{Y_j}$ dobijamo da

$$(n-1) \, d_j \cdot Y_j \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} d_i \, |\Delta Y_i| \qquad j \in J \tag{4}$$

obzirom da je Y_j, $j = 1, \ldots, n$ kao element vektora nivoa aktivnosti po pretpostavci pozitivna veličina.

S druge strane, pretpostavimo da je u posmatranom dinamičkom ekonomskom sistemu direktni rast aktivnosti po apsolutnoj vrednosti

---

$$d_j \, |a_{jj}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ i = j}} d_i \, |a_{ij}| \quad za \quad j = 1, \ldots, n$$

tada matrica A ima kvazi dominantnu dijagonalu.

Sa aspekta rešavanja sistema bitna je teorema koja pokazuje da ako matrica A ima kvazi dominantnu dijagonalu tada je to nesingularna matrica. Dokaz teoreme, kao i mnoga druga interesantna svojstva matrica sa dominantnom dijagonalom, odnosno kvazi dominantnom dijagonalom dati su kod Murata Y., op. cit., st. 21—30.

[5] Paseta Vesna: *Analiza stabilnosti dinamičkih ekonomskih modela*, doktorska disertacija, Beograd, 1982, st. 164.

manji ili jednak jedinici za sve aktivnosti. Data pretpostavka ne predstavlja neko posebno ograničenje, obzirom da je u opštim uslovima rasta ekonomske aktivnosti ispunjavaju. Pri datoj pretpostavci da $|r_{ii}| \leqslant 1$ možemo eksplicitno pokazati da je matrica sistema (2) ona matrica koja ima kvazi dominantnu dijagonalu. Naime, stavimo da je

$$d_i = \frac{1}{Y_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

prema (4) imamo da je

$$(n-1)\frac{1}{Y_j} Y_j \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} \frac{1}{Y_i} |\Delta Y_i| \qquad j \in J$$

odnosno

$$(n-1) \geqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |r_{ii}|$$

gde smo uzeli da je $J = N$.

Neka je $r_{max} = \max_i |r_{ii}|$, $i = 1, \ldots, n$, maksimalna direktna stopa rasta posmatranih aktivnosti po apsolutnoj vrednosti, tada

$$(n-1) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} r_{max}$$

Odnosno $(n-1) \geqslant (n-1) r_{max}$, sledi da je nejednakost zadovoljena obzirom da je $r_{max} \leqslant 1$, po pretpostavci. Pošto navedena relacija važi za bilo koji neprazni podskup indeksa, možemo zaključiti da postoje pozitivni skalari d_i takvi da je

$$d_j \geqslant \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} d_i \left| \frac{1}{n-1} r_{ij} \right| \quad j \in J$$

zadovoljeno za bilo koji neprazni podskup indeksa J iz $N = \{1, \ldots, n\}$ i sa striktnom nejednakošću za neko $j \in J$, obzirom da postoji $j \in J$ za koje je $r_{max} > |r_{jj}|$.

Gore određeni skalari $d_i = \dfrac{1}{Y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ nisu jedini koji

zadovoljavaju uslove kvazi dominantnosti matrice $\left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$

Naime, u konkretnim uslovima moguće je na drugi način definisati d_i.

Kvazi dominantnost dijagonale $\left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ povlači da sistem (2) ima rešenje, obzirom da postoji odgovarajuća inverzna matrica i da je ono nenegativno za nenegativno Y_{t-1}. Istovremeno to implicira da je matrica $\left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1}$ nenegativna sa pozitivnim elementima po glavnoj dijagonali. Naime, $\left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ zadovoljava Hawkins-Simon-ove uslove, pa je rešenje sistema (2) $Y_t = \left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1} Y_{t-1} \geqslant 0$ za bilo koje $Y_{t-1} \geqslant 0$. No, pošto je Y_{t-1} po pretpostavci a Y_t na osnovu navedenih uslova nenegativni, sledi da matrica $\left\{ I - \dfrac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1}$ nenegativna i različita od nule, zaista je nenegativna sa pozitivnom glavnom dijagonalom. Time je dokazano da dinamički model, definisan matricom rasta, daje ekonomski konzistentna rešenja i da u tom smislu, pod navedenim uslovom, može činiti osnovu modeliranja dinamičkih ekonomskih fenomena.

2. OSOBINA RELATIVNE STABILNOSTI MODELA

Polazeći od osnovne relacije koja povezuje nivoe aktivnosti u periodu t i t—1, na osnovu matrice rasta možemo zamenom odgovarajućih vrednosti za $t = 1, \ldots, k$ dobiti

$$Y_1 = \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{1,ind} \right\}^{-1} Y_0$$

$$Y_2 = \left\{ I - \frac{1}{n-2} R_{2,ind} \right\}^{-1} \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{1,ind} \right\}^{-1} Y_0$$

. . . .

$$Y_k = \prod_{t=1}^{k} \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{t,ind} \right\}^{-1} Y_o$$

gde $R_{t,ind}$ predstavlja matricu rasta indirektnih stopa u periodu t. Ako pretpostavimo da se radi o stacionarnom autonomnom sistemu, što praktično znači da je matrica sistema nepromenljiva u vremenu, tada umesto niza matrice $R_{t,ind}$ u definisanom proizvodu figuriše neka nepromenljiva matrica indirektnih stopa rasta za svako t, R_{ind}. Pri tome bitna je ocena elemenata te matrice kako bi oni na najbolji način sadržali i održavali preslikavanje posmatranih ekonomskih aktivnosti ukupnog perioda posmatranja.

Kao što je pokazano, matrica sistema zadovoljava Hawkins-Simon-ove uslove te postoji njena inverzna matrica koja daje nenegativna rešenja za nenegativne vrednosti vektora Y_{t-1}.

Pretpostavimo da je matrica $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ nerazloživa.[6] Data pretpostavka nije posebno ograničenje za dinamički model zasnovan na matrici rasta.[7] Naime, iz definicije modela sledi da ona podrazumeva postojanje dovoljnog broja međusobno zavisnih aktivnosti u ekonomskom sistemu koji se posmatra, kao i promenljivost apsolutnih vrednosti njegovih aktivnosti ($\Delta Y_i \neq 0$ za dovoljan broj indeksa i iz skupa indeksa $N = 1, \ldots, n$). Ako bilo koja aktivnost zavisi od svih drugih aktivnosti u sistemu, i istovremeno sve ostale od posmatrane aktivnosti, tada je matrica $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ uz pretpostavku

$\Delta Y_{it} \neq 0$ i $= 1, \ldots, n$, za neko t iz posmatranog perioda, sigurno nerazloživa. Naime, u tom slučaju $r_{ij} \neq 0$ za svako »i« i »j«, pa je nerazloživost matrice sistema očigledna. No, istaknimo da uslov nerazloživosti dopušta postojanje $r_{ij} = 0$ za neke vrednosti indeksa »i« i »j«.

Uz pretpostavku o nerazloživosti matrice $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ može se pokazati[8] da je i njena inverzna matrica nerazloživa što je od bitnog značaja za dalje ispitivanje ponašanja modela. Naime, ako je matrica $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1}$ nerazloživa, a ranije je pokazano da je ona nenegativna sa pozitivnim elementima po glavnoj dijagonali (obzirom da $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}$ zadovoljava Hawkins-Simon-ove uslove), sledi da je $\left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1}$ prosta matrica.[9] Nerazloživa kvadratna matrica koja ima na glavnoj dijagonali elemente različite od nule prosta je matrica (ponekad se naziva i primitivnom matricom).

Prema tome, u homogenom diferencnom sistemu zasnovanom na konstantnoj matrici rasta, R_{ind},

$$Y_t = \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind} \right\}^{-1} Y_{t-1}$$

---

[6] Kvadratna matrica A razloživa je ako se permutovanjem vrsta i kolona permutacionom matricom P može izraziti sa

$$P A P^T = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{Bmatrix}$$

gde su A_{11} i A_{22} kvadratne matrice reka kxk, odnosno lxl, 0 je nula matrica lxk i A_{12} je kxl, $l + k = n$. Ako se matrica A ne može simultanom permutacijom redova i kolona izraziti u datom obliku, kaže se da je nerazloživa. Napomenimo da se P sastoji od jediničnih vektora međusobno nezavisnih pa je $P^T = P^{-1}$, te se ponekad u definiciji razložive matrice pojavljuje P^{-1}. U konkretnim istraživanjima, ako je matrica A velikih dimenzija, ispitivanje njene razloživosti prema definiciji nije jednostavno. Naime, potrebno je definisati sve kombinacije jediničnih vektora u matrici P i ispitati da li postoji ona kombinacija koja permutuje matricu A u definisani oblik. U tom smislu uočimo, da ako je neka matrica $A = \{a_{ij}\}$ nerazloživa tada postoji indeks $k \neq i$, takav da je $a_{ik} \neq 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$, odnosno postoji kolona matrice A čiji su svi elementi različiti od nule i postoji neki indeks $h \neq j$ takav da $a_{hj} \neq 0$ za svako $j = 1, \ldots, n$, odnosno postoji red čiji su svi elementi različiti od nule.

[7] To ne podrazumeva da svi modeli zasnovani na matrici rasta imaju matricu sistema nerazloživu. Naime, primena matrice rasta je veoma široka i u tom smislu postoje specijalni modeli u kojima data pretpostavka nije neophodna.

[8] Paseta Vesna: op. cit., str. 173.

[9] Nerazloživa kvadratna matrica A je složena ako postoji permutaciona matrica P takva da

$$PAP^{-1} = \begin{Bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Bmatrix}$$

gde su 0, nula submatrice i A_{ij} nenula submatrice od A, sa kvadratnim nula submatricama po glavnoj dijagonali. Ako se A ne može transformisati u navedeni oblik bilo kojom simultanom permutacijom njenih redova i kolona, A se naziva prostom matricom. Važna osobina je da, ako je A prosta nerazloživa nenegativna kvadratna matrica, tada postoji neki pozitivni ceo broj k, takav da je $A^k > 0$.

matrica sistema je nerazloživa i prosta nenegativna kvadratna matrica, te iterativnom supstitucijom za t = 1, 2, ... dobijamo

$$Y_t = \left[\left\{I - \frac{1}{n-1} R_{ind}\right\}^{-1}\right]^t Y_o.$$

Prema utvrđenim osobinama matrice sistema možemo zaključiti da postoji neki ceo pozitivan broj k, takav da je

$\left[\left\{I - \frac{1}{n-1} R_{ind}\right\}^{-1}\right]^k > 0$ i Frobenius-ov koren λ_1 matrice

$\left\{I - \frac{1}{n-1} R_{ind}\right\}^{-1}$ veći od bilo

kog drugog karakterističnog korena matrice sistema. Naime, poznato je da je nerazloživa nenegativna kvadratna matrica prosta ako i samo ako je njen Frobenius-ov koren veći od bilo kog drugog karakterističnog korena posmatrane matrice po modulu.

Prema tome, za bilo koje nenegativno Y_o, odnosno $Y_o \geq 0$, imamo da je $Y_t > 0$ za neko t, i

$$Y_t \to c\,\lambda_1^t\, Y^1 \quad \text{kada} \quad t \to \infty$$

gde je λ_1 Frobenius-ov koren matrice $\left\{I - \frac{1}{n-1} R_{ind}\right\}^{-1}$, Y^1 karakteristični vektor posmatrane matrice koji odgovara λ_1 i čiji su svi elementi pozitivni, c je pozitivna konstanta koja zavisi od inicijalnih uslova.

Neka je Y^1_i i-ti element karakterističnog vektora uz λ_1 i Y_{it} i-ti ekment vektora Y_t. Tada sledi da,

$$\frac{Y_{it}}{\lambda^t_1 Y^1_i} \to c \quad \text{za svako} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{kada} \quad t \to \infty.$$

To povlači da svaki element vektora aktivnosti Y_t teži da raste proporcionalno u odnosu na elemente putanje uravnoteženog rasta određenog sa $\lambda^t_1 Y^1$, bez obzira na inicijalni vektor $Y_o \geq 0$. Time smo, zapravo, dokazali da opisani model rasta, na bazi matrice rasta, ima svojstvo relativne stabilnosti. Prema tome, pokazalo se da, uz navedene pretpostavke vezane za dobro definisanje modela, dinamički model na bazi matrice rasta ima svojstvo da generiše putanju maksimalnog proporcionalnog rasta, odnosno da odražava ravnotežna ponašanja ekonomskog sistema.

3. KRETANJE JUGOSLOVENSKE PRIVREDE U RAZDOBLJU OD 1974. DO 1980. GODINE

Cilj ovog dela je da, koristeći empirijske podatke o kretanju privrednih delatnosti, odredi preslikavanje koje aproksimira kretanje privrede u posmatranom periodu na osnovu dinamičkog modela na bazi matrice rasta i da, preko osobine relativne stabilnosti modela, utvrdi maksimalni proporcionalni rast u posmatranom periodu.

Privredne delatnosti se posmatraju na principu čistih delatnosti u stalnim cenama. Razmatra se period od 1974. do 1980. godine, a prema stalnim cenama iz 1972. godine. Podaci o kretanju privrednih delatnosti su dati u tabeli 1.

Za svaku od posmatranih godina formirana je tabela apsolutnih promena, prema relaciji $\Delta Y_{it} = Y_{it} - Y_{it-1}$, $i = 1, \ldots, 11$, za posmatrane privredne delatnosti. Ovo je dato u tabeli 2.

Prema definiciji matrice rasta, za svaku od posmatranih godina, određena je matrica rasta privrednih delatnosti, prema

$$R_t = \{\Delta Y_{it}\} \cdot \{\frac{1}{Y_{it}}\} \quad \begin{array}{l} t = 75, \ldots, 80. \\ i = 1, \ldots, 11 \end{array}$$

gde su $\{\Delta Y_{it}\}$ i $\{\frac{1}{Y_{it}}\}$ odgovarajući vektor kolona i vektor vrsta.

Elementi po glavnoj dijagonali dobijenih matrica rasta predstavljaju direktne stope rasta privrednih delatnosti, a ostali elementi su indirektne stope rasta za svaku posmatranu godinu. Pri tome, indirektne stope rasta pokazuju relativni rast i-te delatnosti u odnosu na vrednost j-te delatnosti u posmatranom periodu. Skup svih direktnih i indirektnih stopa rasta, izražen preko matrice rasta, omogućava da se sagleda struktura rasta između delatnosti i da se izraze njihovi relativni odnosi. Time se izražava privredni rast preko matrice rasta posmatranih delatnosti.

Dalje, za svaku dobijenu matricu rasta određuje se matrica indirektnih stopa rasta, odnosno matrica $\left\{I - \frac{1}{n-1} R_{ind,t}\right\}$ i njena inverzna matrica koja određuje dinamički sistem na bazi matrice rasta. Te matrice predstavljaju linearne aproksimacije realnih kretanja privrednih delatnosti po pojedinim godinama. Potrebno je istaći da pojedine inverzne matrice u nekim godinama ne zadovoljavaju sve uslove vezane za obezbeđenje relativne stabilnosti modela. Naime, neke od matrica, usled stagnacije ili pada nivoa proizvodnje posmatranih delatnosti, imaju negativne komponente te ne zadovoljavaju uslov nenegativnosti. U tom smislu, karakteristični koren sa maksimalnim realnim delom ne mora biti realan, već može biti kompleksan, pa je dinamički sistem, definisan tim matricama, relativno nestabilan.

Tabela 1. *Društveni proizvod*[1]

Po principu čistih delatnosti u cenama 1972. godine

(u milionima dinara)

Privredne delatnosti	Godine 1974.	1975.	1976.	1977.	1978.	1979.	1980.
1. Industrija i rudarstvo	100.725	107.154	111.042	121.595	132.101	142.901	148.820
2. Poljoprivreda i ribarstvo	46.627	45.288	48.412	51.079	48.213	50.921	51.018
3. Šumarstvo	2.764	2.835	2.793	3.044	3.008	3.077	2.978
4. Vodoprivreda	893	837	926	1.065	1.065	1.087	1.108
5. Građevinarstvo	27.050	29.958	31.426	34.348	38.233	41.881	42.741
6. Saobraćaj i veze	24.766	24.826	25.380	26.953	26.690	30.895	31.447
7. Trgovina	51.341	52.011	52.515	56.713	62.610	66.360	67.025
8. Ugostiteljstvo i turizam	8.223	8.457	8.690	9.289	9.857	10.449	10.594
9. Zanatstvo (proizvodni deo)	8.766	9.354	9.707	10.223	10.811	11.347	11.814
10. Komunalna delat. (proizv. deo)	1.380	1.337	1.377	1.432	1.580	1.706	1.757
11. Ostale proizvodne delatnosti	7.150	7.837	8.924	9.578	10.632	11.695	11.812

[1] Statistički godišnjak Jugoslavije 1981. godine, SZS Beograd.

Tabela 2. *Tabela apsolutnih promena privrednih delatnosti*

Po principu čistih delatnosti u cenama 1972. godine

(u milionima dinara)

Privredne delatnosti / Apsolutne promene $Y\Delta_{it}$	Godine Δ75.	Δ76.	Δ77.	Δ78.	Δ79.	Δ80.
1. Inustrija i rudarstvo	6.429	3.888	10.553	10.506	10.800	5.919
2. Poljoprivreda i ribarstvo	—1.339	3.124	2.667	—2.866	2.708	97
3. Sumarstvo	71	—42	251	—36	69	—99
4. Vodoprivreda	—56	89	139	0	22	21
5. Građevinarstvo	2.908	1.468	2.922	3.885	3.648	860
6. Saobraćaj i veze	60	554	1.573	—263	4.205	552
7. Trgovina	670	504	4.198	5.897	3.750	665
8. Ugostiteljstvo i turizam	234	233	599	568	592	145
9. Zanatstvo (proizv. deo)	588	353	516	588	536	467
10. Komunalne delatnosti (proizv. deo)	—43	40	55	148	126	51
11. Ostale proizvodne delatnosti	687	1.087	654	1.054	1.063	117

Tabela 3. *Matrica M*

1.0062	0.1139	1.8886	5.4291	0.1501	0.1997	0.0923	0.5771	0.5238	3.6011	0.5431
0.0042	1.0020	0.1812	0.5013	0.0148	0.0183	0.0092	0.0561	0.0508	0.3539	0.0513
0.0002	0.0006	1.0026	0.0284	0.0008	0.0011	0.0005	0.0031	0.0029	0.0204	0.0031
0.0002	0.005	0.0086	1.0041	0.0007	0.0009	0.0004	0.0027	0.0024	0.0169	0.0025
0.0144	0.0379	0.6261	1.8200	1.0077	0.0667	0.0308	0.1925	0.1748	1.2030	0.1824
0.0055	0.0148	0.2494	0.7038	0.0191	1.0030	0.0120	0.0749	0.0683	0.4645	0.0686
0.0137	0.0367	0.6057	1.7161	0.0476	0.0645	1.0041	0.1844	0.1679	1.1513	0.1715
0.0022	0.0057	0.0940	0.2696	0.0075	0.0100	0.0046	1.0045	0.0262	0.1800	0.0270
0.0028	0.0074	0.1227	0.3559	0.0098	0.0130	0.0060	0.0376	1.0055	0.2345	0.0356
0.0003	0.0008	0.0138	0.0380	0.0010	0.0014	0.0006	0.0041	0.0037	1.0025	0.0037
0.0044	0.0114	0.1894	0.5508	0.0153	0.0202	0.0094	0.0584	0.0529	0.3646	1.0088

Karakteristični koreni matrice M:

1. λ 1 = 0.6810 + J 0.0000
2. λ 2 = 0.6810 + J 0.0000
3. λ 3 = 1.3041 + J —0.2302
4. λ 4 = 1.3041 + J 0.2302
5. λ 5 = 1.1426 + J 0.0000
6. λ 6 = 1.4047 + J 0.0000
7. λ 7 = 0.6810 + J 0.0000
8. λ 8 = 0.6810 + J 0.0000
9. λ 9 = 1.1426 + J 0.0000
10. λ10 = 1.0560 + J —0.3592
11. λ11 = 1.0560 + J 0.3592

Maksimalni karakteristični koren je: 1.4047

Međutim, o ponašanju ekonomskog sistema pogrešno je suditi na osnovu privrednih kretanja u pojedinim godinama, već je potrebno izvesti analizu kroz duži period posmatranja. Drugim rečima, da bi se dobila stvarna slika o posmatranom ekonomskom sistemu u periodu od 1974. do 1980. godine, potrebno je odrediti matricu koja sintetički izražava kretanja u posmatranom periodu, kao proizvod svih dobijenih inverznih matrica, po pojedinim godinama. Označimo tu matricu sa M, tako da je

$$M = \prod_{t=75}^{80} \left\{ I - \frac{1}{n-1} R_{ind,t} \right\}^{-1}$$

Pokazalo se da dobijena matrica M zadovoljava tražene uslove za konzistentno definisanje dinamičkog ekonomskog sistema. Naime, bilo koji nenegativni vektor nivoa privrednih delatnosti pomnožen sa matricom M daje ekonomski konzistentne rezultate. To se može videti na osnovu njenih elemenata koji su nenegativni. Matrica M, sa svojim karakterističnim korenima, data je u tabeli 3. Ona treba da prikazuje kretanja privrednih delatnosti u posmatranom periodu. Da bismo to neposredno proverili, matrica M se množi sa vektorom nivoa posmatranih delatnosti u 1974. godini. Dobijeni rezultati predstavljaju ocenjene veličine vrednosti proizvodnje po pojedinim delatnostima u 1980. godini, prema dinamičkom modelu na bazi matrice rasta. Kada uporedimo dobijene ocene sa stvarnim iznosima možemo utvrditi da su odstupanja neznatna, što se može videti iz tabele 4. Time je neposredno pokazano da matrica M, kao linearno preslikavanje, definisana na bazi matrica rasta, adekvatno reprezentuje kretanja veličina u sistemu i, prema tome, predstavlja realan opis tih kretanja u posmtranom periodu.

Tabela 4. *Ocenjene vrednosti proizvodnje i odstupanja od stvarnih veličina za 1980. godinu*

(u milionima dinara)

Delatnosti	Ocenjena vrednost proizvodnje u 1980. godini	Odstupanje od stvarnih veličina u 1980. godini (u %)
1.	148.664,69	—0,10
2.	51.185,01	0,32
3.	3.025,29	1,57
4.	1.112,15	0,37
5.	43.148,66	0,95
6.	30.886,15	—1,81
7.	66.540,91	—0,72
8.	10.599,49	0,05
9.	11.882,88	0,58
10.	1.714,33	—2,48
11.	12.044,48	1,96

Iz dobijenih rezultata za karakteristične korene matrice M, vidi se da u posmatranom periodu privredne delatnosti pokazuju tendenciju uravnoteženog rasta opisanog matricom M. Naime, u posmatranom periodu od 1974. do 1980. godine, ukupni maksimalni rast iznosio je 40,47%, odnosno prosečna godišnja stopa maksimalnog proporcionalnog rasta bila je 5,82%.[10]

Potrebno je istaći da je maksimalna prosečna proporcionalna stopa rasta privrede dobijena preko matrice M, rezultat posmatranja ne samo jedne agregatne veličine, društvenog proizvoda, već posmatranjem kretanja njegovih sastavnih elemenata, odnosno preko čistih delatnosti. U tom smislu, rezultat je dobijen ne samo kao posledica rasta posmatranih kategorija pojedinačno, već i kao rezultat njihovih međusobnih interakcija. Pored toga, poznavajući maksimalni proporcionalni rast, u mogućnosti smo da odredimo ravnotežnu strukturu društvenog proizvoda preko delatnosti, kao karakteristični vektor koji odgovara maksimalnom karakterističnom korenu.

Primljeno: 7. 12. 1982.
Prihvaćeno: 10. 05. 1984.

LITERATURA

Morishima, M., *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

Morishima, M., *Theory of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1969.

Murata, M., *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, N. York, 1977.

Nikaido, H., *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North-Holland Pub. Com. Amsterdam, 1970.

Paseta, V., *Analiza stabilnosti dinamičkih ekonomskih modela*, doktorska disertacija, Ekonomski fakultet, Beograd, 1982.

Steenge, A., »The verification of efficient growth: An approach via Stojanović's matrix of growth«, *Journal of Macroeconomics*, №. 3, 1981, 271—81.

Stojanović, D., »The matrix of economic growth — projection of the national product for Yugoslav economy until 1985 on the basis of the matrix of growth«, *Economisko Mathematicky obzor*, 12/4, 1976, Praha, 21—35.

Stojanović, D., »A matrix of growth optimization model for the production activity of cooperating enterprises«, *Operation Research Quarterly*, 4, London, 1977, 763—765.

Stojanović, D., »Intersectorial model on the basis of the matrix of growth«, European Congress of the Econometric Society, Vienna, 1977.

Stojanović, D., *Teorijski i praktični aspekti matrice rasta*, Savremena administracija, Beograd, 1978.

[10] Mada se direktno ne mogu vršiti poređenja, obzirom da se radi o nešto različitim periodima posmatranja, navedimo da je društveni proizvod Jugoslavije, posmatran kao agregatna veličina u periodu 1976—1980. godine, rastao po prosečnoj godišnjoj stopi od 5,7%. *Statistički godišnjak Jugoslavije 1981*, tabela 102—9, SZS, Beograd, 1982.

DYNAMIC MODEL OF YUGOSLAV ECONOMY ON THE GROWTH MATRIX BASIS

Vesna PASETA

Summary

Validity of the dynamic model on the growth matrix basis (that is considered to be a footing for presenting the growth of an economic system) is proved in the first part of the article. The proof is deduced from the quasi dominancy characteristic of the model-defining diagonal system matrix. Namely, it is proved that the system matrix $\{I - 1/(n-1) R_{ind}\}$, *which is the basis of the model (here,* R_{ind} *denotes the growth matrix of indirect growth rates), satisfies Hawkins-Simon condition. Hence, the solution of the model* $Y_t = \{I - 1/(n-1) R_{ind}\}^{-1} Y_{t-1}$ *is nonnegative for any nonnegative* Y_{t-1}. *This means that system provides the economically consistent solutions and that* $|r_{ii}|$ *is not greater than unity, under fixed condition. So, it can be a basis for modelling the economic dynamic phenomena.*

Further, it is shown that dynamic model on the growth matrix basis generates, under certain assumptions, the maximal proportional growth path, i.e., that it represents the equilibrium behaviour of an economic system.

In the end, the dynamic model of Yugoslav economy is defined on the empirical grounds of the gross national product data that have been obtained from the pure material production activites. Acoording to that model, the average rate of maximal equilibrium growth of Yugoslav economy in the period 1974—1980 was 5,82% per annum.