EKONOMSKA ANALIZA
2, XXIII (1989), 185—197

OTPLATA ZAJMA VARIJABILNIM ANUITETIMA*

*Mirta ŠILAC***

1. UVOD

U praksi je uobičajeno da se zajam otplaćuje konstantnim anuitetima. Varijabilni anuiteti zahtijevaju, obično, rad s kompliciranim matematičkim izrazima. Upotreba računskih strojeva uklanja ovaj nedostatak čime se omogućuje iskorištavanje velikih prednosti koje ima ovakav pristup u odnosu na otplatu zajma konstantnim anuitetima, osobito u uvjetima stalnog opadanja (odnosno rasta) novčanih vrijednosti.

Širok spektar mogućnosti otvara se već korišćenjem zajmova kod kojih se anuiteti mijenjaju aritmetički ili geometrijski. Zajmovi takvog tipa, s godišnjim promjenama anuiteta i godišnjim uplatama, već su obrađeni u literaturi (vidi [1], [5], [6]).

Da se prilikom ispodgodišnjih otplata ne bi primjenjivali dosadašnji aproksimativni postupci (vidi [3], str. 250), koji bi u slučaju visokih kamatnih stopa doveli do velikih grešaka, nužno je koristiti u praksi korektan postupak koji slijedi iz zakona složene kapitalizacije.

Na temelju suvremenog pristupa financijskoj matematici, sugeriranom u [2], ovaj rad obrađuje problem otplate zajma koji je odobren uz konstantnu kamatnu stopu, a otplaćuje se u konstantnim vremenskim intervalima promjenjivim anuitetima. Vrijednosti anuiteta variraju također u konstantnim vremenskim intervalima koji se ne moraju nužno podurati s intervalima otplate. Budući da „s računske točke gledišta nema nikakve razlike između uloga, rente ili anuiteta u užem smislu" ([1], str. 3), u radu će detaljno biti razrađen problem konačne vrijednosti ovakvih periodičnih svota, a sadašnja vrijednost i otplata zajma tretiraju se na osnovi konačne vrijednosti više periodičnih svota. Ujedno su navedeni i primjeri koji ilustriraju mogućnosti primjene u praksi.

---

* Rad je rađen u okviru potprojekta „Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem" kojeg, kao dio projekta „Fundamentalna istraživanja u ekonomiji", financira SIZ znanosti SR Hrvatske u razdoblju od 1987. do 1990. godine.

** Ekonomski fakultet u Osijeku.

2. KONAČNA VRIJEDNOST VIŠE PERIODIČNIH SVOTA

Uplate na kraju obračunskog razdoblja

Neka je p godišnji kamatnjak i neka je t vremenski razmak između dvije uzastopne uplate izražen u godinama.[1] Na primjer, ako su uplate mjesečne, $t = 1/12$; ako su uplate kvartalne, $t = 1/4$; ako su uplate dvogodišnje, $t = 2$; ako su uplate godišnje, $t = 1$ (ovaj specijalan slučaj razrađen je npr. u [1], [5] i [6]).

Označimo broj uplata sa m, veličine uplata sa $S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$, a kamatni faktor s r ($r = 1 + p/100$). Vrijeme koje je prošlo od prve uplate do kraja zadnjeg obračunskog razdoblja je očigledno mt (vidi sliku 1). Primijetimo da vrijeme koje je prošlo od početka prvog obračunskog razdoblja do kraja zadnjeg obračunskog razdoblja iznosi mt.

Slika 1.

Konačnu vrijednost periodičnih svota nakon vremena (m — 1) t od prve uplate dobivamo zbrajanjem konačnog reda:

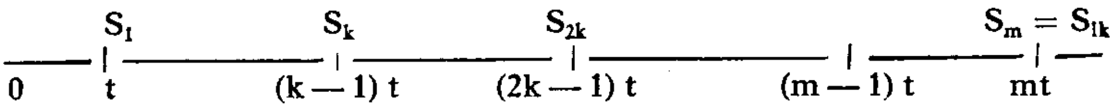
$$C_{mt} = \sum_{i=1}^{m} S_i r^{t(m-i)} \qquad (1)$$

Neka se uplate mijenjaju svakih k vremenskih intervala duljine t (vidi sliku 2). Npr., ako su uplate mjesečne, a mijenjaju se nakon svaka tri mjeseca (kvartalno) biti će: $t = 1/12$, $k = 3$.

Zbog jednostavnosti pretpostavimo da ie m djeljivo s k, tj. $m = lk$, iako se razmatranja mogu provesti i bez ove pretpostavke.

Primijetimo da l predstavlja broj međusobno različitih uplata.

Npr., ako su uplate mjesečne tokom tri godine, a mijenjaju se svakih pola godine biti će: $t = 1/12$, $m = 48$, $k = 6$, $l = 8$, tj. imamo 8 uplata koje se međusobno razlikuju.



Slika 2.

Označimo:

$$S_1 = S_2 = \dots = S_k = R_1 \ ,$$

$$S_{k+1} = S_{k+2} = \dots \ S_{2k} = R_2 \ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{(l-1)\,k+1} = \dots = S_{lk} = R_l \ .$$

[1] Odnosno, vremenski interval mora biti izražen u vremenskim jedinicama na koje se odnosi kamatnjak.

Konačna vrijednost ovakvih uplata je:

$$C_{mt} = \sum_{i=1}^{m} R_{[(i-1)/k]+1}\, r^{(m-i)t}, \tag{2}$$

gdje je [x] oznaka za njaveće cijelo od x, tj.

$$[x] = \begin{cases} x, & ako\ x \in Z \\ najveći\ cijeli\ broj\ manji\ od\ x, & ako\ x \notin Z \end{cases}$$

2.1. *Uplate se mijenjaju aritmetički*

Pretpostavimo da se uplate mijenjaju po zakonu:

$$R_j = R + (j-1)\, q\,, \qquad j = 1, \ldots, l \tag{3}$$

dakle, uplate se mijenjaju dodavanjem uvijek istog iznosa q.

Uvrštavanjem (3) u izraz (2) dobivamo konačnu vrijednost ovakvih svota nakon vremenskog perioda (m — 1)t od prve uplate:

$$C_{mt} = R \sum_{i=1}^{m} r^{(m-i)t} + q \sum_{i=1}^{m} [(i-1)/k]\, r^{(m-i)t}, \tag{4}$$

Prvi član na desnoj strani u (4) dolazi od nepromjenjivog dijela uplate R. Kao za slučaj konačne vrijednosti više periodičnih jednakih svota (vidi npr. [5], [6]) on iznosi:

$$R\,\frac{r^{mt}-1}{r^{t}-1}\,.$$

Drugi član u (4), nastao od promjenjivog dijela uplate, može se transformirati u:

$$q\,\frac{r^{kt}-1}{r^{t}-1}\left[\frac{r^{mt}-r^{kt}}{(r^{kt}-1)^2} - \frac{l-1}{r^{kt}-1}\right]$$

Na taj način dobivamo pojednostavljenu formulu za konačnu vrijednost više periodičnih uplata koje se mijenjaju po zakonu (3):

$$C_{mt} = R\,\frac{r^{mt}-1}{r^{t}-1} + q\,\frac{r^{kt}-1}{r^{t}-1}\left[\frac{r^{mt}-r^{kt}}{(r^{kt}-1)^2} - \frac{l-1}{r^{kt}-1}\right] \tag{5}$$

gdje je:

R — iznos prve uplate.

q — iznos koji se dodaje prilikom svake promjene uplate.

t — duljina vremenskog intervala između dvije uzastopne uplate,
m — broj uplata,
kt — duljina vremenskog intervala između dvije uzastopne promjene uplata,
l = m/k.

Napomena 1. Pogledajmo slučaj konstantnih uplata kroz n godina. Ako u (5) stavimo: t = 1, m = n, k = n, l= 1, dobivamo dobro poznatu formulu konačne vrijednosti takvih svota (vidi npr. [5], [6]):

$$C_n = R = \frac{r^n - 1}{r - 1} \tag{5.1}$$

Napomena 2. U slučaju da se uplate mijenjaju prilikom svake uplate. tj. k = 1. Iz (5) dobivamo:

$$C_{mt} = R \frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} + q \left[\frac{r^{mt} - r^t}{(r^t - 1)^2} - \frac{m - 1}{r^t - 1} \right] \tag{5.2}$$

2.2. *Uplate se mijenjaju geometrijski s pomakom*

2.2.1. Pretpostavimo da se uplate mijenjaju po zakonu:

$$R_j = R + bq^{j-1} , \qquad j = 1, \ldots , l , \quad q \neq r^{kt} . \tag{6}$$

Iz izraza (6) vidljivo je da prva uplata iznosi R + b, a slijedeće, promjenjene uplate dobivaju se množenjem jednog dijela (konkretno b) uvijek istim iznosom q koji je različit od kt potencija kamatnog faktora r. (Matematički postupak prilikom računanja konačne vrijednosti zahtijeva da se slučaj q = r^{kt} posebno obradi.)

Uvrštavanjem zakona (6) u (2) dobivamo konačnu vrijednost ovakvih svota nakon vremenskog intervala (m — 1) t od prve uplate:

$$C_{mt} = \sum_{i=1}^{m} (R + bq^{[(i-1)/k]}) \, r^{(m-i)t} ,$$

što se može transformirati u izraz:

$$C_{mt} = R \frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} + b \frac{r^{kt} - 1}{r^t - 1} \frac{q^l - r^{mt}}{q - r^{kt}} , \tag{7}$$

gdje je:

R + b — iznos prve uplate,
R — fiksan dio uplate,
b — dio prve uplate koji se prilikom svake promjene množi s q.

Ostale oznake odgovaraju oznakama u točki 2.1.

Napomena 3. U slučaju da se uplate promjenjivih svota po zakonu (6) mijenjaju prilikom svake uplate, tj. k = 1. Iz (7) dobivamo:

$$C_{mt} = R \frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} + b \frac{q^m - r^{mt}}{q - r^t} \qquad (7.1)$$

Napomena 4. U slučaju da se uplate i promjene uplata događaju godišnje n godina i da je fiksan dio uplate R = 0, uvrštavanjem vrijednosti: t = 1, k = 1, m = n, R = 0, u (7) dobivamo:

$$C_n = b \frac{q^n - r^n}{q - r}, \qquad (7.2)$$

što predstavlja dobro poznat izraz za konačnu vrijednost uloga koji se mijenjaju godišnje, geometrijski prilikom svakog uloga (vidi npr. [5], [6]).

Napomena 5. Naizmjenično jednake uplate dobivamo birajući q = —1 u zakonu (6). Mijenjaju se uplate:

$R_1 = R + b \quad i \quad R_2 = R - b$.

Konačnu vrijednost m naizmjenično jednakih uplata koje se događaju u vremenskim intervalima t, a mijenjaju u vremenskim intervalima kt, dobijemo uvrštavajući q = 1 u ()7.

$$C_{mt} = R \frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} - b \frac{r^{kt} - 1}{r^t - 1} \frac{(-1)^l - r^{mt}}{1 + r^{kt}} \qquad (7.3)$$

Specijalno, ako se dvije naizmjenično jednake uplate smjenjuju polugodišnje, a tako se i uplaćuju, tokom n godina, konačna vrijednost iznosi:

$$C_n = R \frac{r^n - 1}{\sqrt{r} - 1} - b \frac{1 - r^n}{1 + \sqrt{r}} \qquad (7.4)$$

2.2.2. Pretpostavimo da se uplate mijenjaju po zakonu:

$$R_j = R + b r^{kt(j-1)}, \qquad j = 1, \ldots, l . \qquad (8)$$

U ovom slučaju prva uplata također iznosi R + b ali je faktor kojim se množi dio b specificiran da bude kt potencija kamatnog faktora r. Uvrštavanjem zakona (8) u (2) dobivamo izraz za konačnu vrijednost ovakvih svota nakon vremena (m — 1) t od prve uplate koji se može transformirati u:

$$C_{mt} = R\,\frac{r^{mt} - 1}{r^{t} - 1} + bl\,\frac{r^{mt}}{r^{kt}}\,\frac{r^{kt} - 1}{r^{t} - 1}, \tag{9}$$

gdje je b dio prve uplate koji se prilikom svake promjene množi sa r^{kt} a ostale oznake odgovaraju oznakama u točki 2.2.1.

Napomena 6. Neka se uplate promjenjivih svota po zakonu (8) mijenjaju prilikom svake uplate, tj. k = 1.

Iz (9) dobivamo jednostavniji izraz:

$$C_{mt} = R\,\frac{r^{mt} - 1}{r^{t} - 1} + blr^{mt-t} \tag{9.1}$$

Napomena 7. Konačnu vrijednost m periodičnih uplata koje se događaju na početku svakog od vremenskih intervala duljine t, dobivamo sumirajući konačan red:

$$C_{mt} = r^{t} \sum_{i=1}^{m} S_i r^{t(m-i)} \tag{10}$$

Usporedimo li izraz (10) s izrazom (1) vidimo da konačnu vrijednost periodičnih uplata koje se uplaćuju na početku razdoblja možemo dobiti iz izraza za konačnu vrijednost svota koje se uplaćuju na kraju razdoblja množeći ih s r^t.

Napomena 8. Sadašnju vrijednost više periodičnih svota koje se uplaćuju u vremenskim intervalima duljine t tokom m takvih intervala dobivamo sumirajući konačan red:

$$C_o = r^{-mt} [\, r^{t} \sum_{i=1}^{m} S_i r^{t(m-i)}] \tag{11}$$

za uplate na početku razdoblja, odnosno

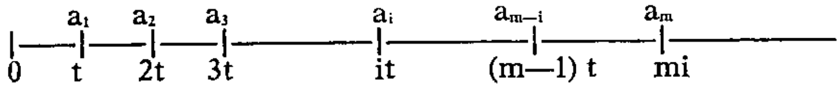
$$C_o = r^{-mt} \sum_{i=1}^{m} S_i r^{t(m-i)} \tag{12}$$

za uplate na kraju razdoblja.

Usporedimo li ove izraze s izrazima (1) i (10) vidimo da sadašnju vrijednost periodičnih uplata možemo dobiti iz konačne vrijednosti množeći je izrazom r^{-mt}.

3. OTPLATA ZAJMA VARIJABILNIM ANUITETIMA PLATIVIM KRAJEM OBRAČUNSKOG RAZDOBLJA

Neka je K zajam koji treba otplatiti s m rata i neka je vremenski razmak između dvije uzastopne otplate konstantan i iznosi t godina. Primijetimo da vrijeme potrebno da zajam bude otplaćen iznosi mt. Označimo s O_{st} ostatak duga na kraju s-tog vremenskog intervala duljine t, a s a_i iznos i-tog anuiteta (s = 1, . . . , m) (vidi sliku 3).



Slika 3.

Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
O_t &= Kr^t - a_1 \\
O_{2t} &= Kr^{2t} - a_1 r^t - a_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
O_{st} &= Kr^{st} - \sum_{i=1}^{s} a_i r^{(e-i)t} \qquad s = 1, \dots, m
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Budući da dug treba otplatiti za m vremenskih intervala duljine t, mora biti $O_{mt} = O$. Iz (13), uz s = m, imamo:

$$
Kr^{mt} = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{(m-i)t} \tag{14}
$$

Pretpostavimo da se otplate mijenjaju svakih k vremenskih intervala duljine t i da je m = 1 k (kao u točki 2).

Uspoređivanjem relacija (13) s relacijom (1) vidimo da i u ovom slučaju možemo iskoristiti izraze (5), (7) i (9) da bismo izračunali ostatak duga za pojedine zakone promjena anuiteta.

3.1. *Anuiteti se mijenjaju aritmetički*

Za anuitete koji se mijenjaju dodavanjem uvijek istog iznosa q, tj. za anuitete koji se mijenjaju po zakonu:

$$
a_j = a + (j - 1)\, q, \qquad j = 1, \dots, l, \tag{15}
$$

ostatak duga na kraju s-tog vremenskog intervala duljine t možemo izračunati iz izraza:

$$
O_{st} = Kr^{st} - a\,\frac{r^{st} - 1}{r^t - 1} + q\,\frac{r^{kt} - 1}{r^t - 1}\left[\frac{r^{st} - r^{kt}}{(r^{kt} - 1)^2} - \frac{l - 1}{r^{kt} - 1}\right] \tag{16}
$$

Time relacija (14) prelazi u:

$$Kr^{mt} = a\frac{r^{mt}-1}{r^t-1} + q\frac{r^{kt}-1}{r^t-1}\left[\frac{r^{mt}-r^{kt}}{(r^{kt}-1)^2} - \frac{l-1}{r^{kt}-1}\right] \tag{17}$$

gdje je:

a — iznos prvog anuiteta.
q — iznos koji se dodaje prilikom svake promjene anuiteta,
t — vremenski interval između dvije uzastopne otplate, m broj otplata,
kt — vremenski interval između dvije uzastopne promjene otplata,
l = m/k.

Da bismo mogli odrediti anuitete za neki zajam K i izraditi otplatnu osnovu, potrebno je fiksirati iznos prvog anuiteta a ili iznos q koji će se dodavati prilikom svake promjene anuiteta.

Primjetimo da će se kamata na neki iznos C u vremenskom intervalu t izračunati iz izraza:

$$I = Cr^t - C. \tag{18}$$

Primjer 1. Zajam od 10 000 NJ (novčanih jedinica) treba otplatiti tokom dvije godine mjesečnim otplatama na kraju mjeseca. Zajam je odobren uz 100% godišnje kamate.

a) Ako se zajam otplaćuje konstantnim anuitetima, oni iznose (vidi [3]):

$$a = Kr^2\frac{r^{1/12}-1}{r^2-1} = 793\ NJ.$$

b) Ako se anuiteti mijenjaju svakih pola godine dodavanjem nekog iznosa q, a prvi anuiteti otplaćuju samo kamatu za dano razdoblje, iz (17) i (18) dobivamo:

$$a_1 = Kr^{1/12} - K = 595\ NJ,$$

$$q = \left[Kr^{mt} - a_1\frac{r^{mt}-1}{r^t-1}\right]\left\{\frac{r^{kt}-1}{r^t-1}\left[\frac{r^{mt}-r^{kt}}{(r^{kt}-1)^2} - \frac{l-1}{r^{kt}-1}\right]\right\}^{-1} = 183\ NJ,$$

$a_2 = 778$ NJ, $a_3 = 961$ NJ, $a_4 = 1144$ NJ.

Iz zakona (15) vidljivo je da za $q > 0$ anuiteti rastu, a za $q < 0$ opadaju s vremenom. U slučaju da anuiteti rastu ekonomski je opravdano zahtijevati da prvi anuiteti otplaćuju barem kamatu za dano razdoblje, odnosno treba biti:

$$a_1 \geq K(r^t - 1). \tag{19}$$

Povezujući relaciju (17) i uvjet (19) lako dobivamo da diferencija q u tom slučaju mora zadovoljavati zahtjev:

$$q \leq K \frac{r^t - 1}{r^{kt} - 1} \left[\frac{r^{mt} - r^{tk}}{(r^{kt} - 1)^2} - \frac{l - 1}{r^{kt} - 1} \right]^{-1}.$$

3.2. *Anuiteti se mijenjaju geometrijski s pomakom*

3.2.1. Za anuitete koji se mijenjaju množenjem jednog dijela prvog anuiteta uvijek istim faktorom q, koji je različit od r^{kt} tj. za anuitete koji se mijenjaju po zakonu:

$$a_j = a + bq^{(j-1)}, \qquad j = 1, \ldots, l, \qquad q \neq r^{kt}, \tag{20}$$

ostatak duga na kraju s-tog vremenskog intrervala duljine t možemo izračunati iz izraza:

$$O_{st} = Kr^{st} - a \frac{r^{st} - 1}{r^t - 1} + b \frac{r^{st} - 1}{r^t - 1} \, \frac{q^l - r^{st}}{q - r^{kt}}. \tag{21}$$

Tada relacija (14) prelazi u:

$$Kr^{mt} = a \frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} + b \frac{r^{kt} - 1}{r^t - 1} \, \frac{q^l - r^{mt}}{q - r^{kt}}, \tag{22}$$

gdje je:

a + b — iznos prve otplate,
a — fiksan dio otplate,
b — dio prve otplate koji se prilikom svake promjene množi s q, a ostale oznake podudaraju se s oznakama iz točke 3.1.

U ovom slučaju anuitet određuje tri parametra: a, b i q. Da bismo odredili anuitete za neki zajam K i izradili otplatnu osnovu potrebno je fiksirati (ili na neki drugi način odrediti) dva od njih. Preostali parametar se tada može odrediti iz izraza (22). (U literaturi se često fiksira a = 0, tj. cijeli anuitet se množi nekim iznosom q. (vidi [5], [6]))

Problem određivanja parametra a, uz poznavanje b i q, i b, uz poznavanje a i q, iz jednadžbe (22), predstavlja linearnu jednadžbu koja je lako rješiva, ali pri određivanju parametra q, uz poznavanje a i b, to je nelinearni problem određivanja nul-točke polinoma stupnja $l-1$. Za rješavanje ovog problema mogu se koristiti različiti iterativni postupci (vidi npr. [4]).

Napomena 9. Za primjene je interesantno proučiti kako se neki ekonomski zahtjevi odražavaju na mogućnosti izbora parametara anuiteta a, b i q. Razmatranje će biti provedeno uz pretpostavku da je b > 0. (Za b < o mogu se dobiti analogni izrazi.)

Da bismo dobili rastuće, odnosno padajuće, anuitete (za b > 0) nužno je da q bude veće od 0. Ovakav zahtjev matematički znači da prilikom rješavanja jednadžbe (22) po q mora postojati pozitivno rješenje.

Budući da se izraz (22) može transformirati u:

$$f(q) = 0,$$

gdje je:

$$f(q) = q^{l-1} + q^{l-2}r^{kt} + \ldots + qr^{kt(l-2)} + r^{kt(l-1)} -$$

$$- \left[Kr^{mt} - a\frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} \right] \frac{r^t - 1}{b\,(r^{kt} - 1)} \tag{23}$$

i da je $q^{l-1} + q^{l-2}r^{kt} + \ldots + qr^{kt(l-2)} > 0$ za $q > 0$,

zahtjev za egzistencijom pozitivne nul-točke ovog polinoma traži da vrijedi:

$$r^{kt(l-1)} - \left[Kr^{mt} - a\frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} \right] \frac{r^t - 1}{b\,(r^{kt} - 1)} < 0.$$

To znači da a i b moraju biti izabrani tako da vrijedi relacija:

$$b\frac{r^{mt}}{r^{kt}} + a\frac{r^{mt} - 1}{r^{kt} - 1} < Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^k - 1}. \tag{24}$$

Uočimo da ako postoji pozitivna nul-točka polinoma zadanog s (23), onda je ona jedinstvena. Budući da je funkcija zadana s (23) monotono rastuća u području pozitivnih realnih brojeva, ako je f (1) < 0 pozitivna nul-točka polinoma će biti veća od 1. Ako je f (1) > 0 i pozitivna nul-točka postoji, ona će biti manja od 1. Kako za q > 1 anuiteti rastu, a za q < 1 opadaju, iz izraza:

$$f(1) = \frac{r^{mt} - 1}{r^{kt} - 1} - \left[Kr^{mt} - a\frac{r^{mt} - 1}{r^t - 1} \right] \frac{r^t - 1}{b\,(r^{kt} - 1)}$$

vidljivo je da je zajam moguće otplatiti anuitetima koji rastu po zakonu (20) jedino ako su a i b izabrani tako da vrijedi

f (1) < 0, tj.

$$a + b < Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^{mt} - 1}. \tag{25}$$

Za zajmove za koje vrijedi (24) i

$$a + b > Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^{mt} - 1}, \tag{26}$$

anuiteti će opadati.

Ekonomski zahtjev da prvi anuiteti otplaćuju barem kamatu za dano razdoblje donosi novo ograničenje na a i b u vidu izraza:

$$a + b \geq K(r^t - 1) \tag{27}$$

Napomena 10. U slučaju zajmova kod kojih se fiksira a = 0 (prilikom promjene anuiteta množi se cijeli anuitet nekim faktorom q) navedeni uvjeti postaju nešto jednostavniji. Prije svega, u tom slučaju nema ekonomskog smisla proučavati zajmove kod kojih je b < 0. Rastuće anuitete dobivamo za

$$0 \leq b \leq Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^{mt} - 1}, \tag{28}$$

pri čemu će prvi anuiteti otplaćivati barem kamatu za dano razdoblje ako je

$$K(r^t - 1) \leq b \leq Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^{mt} - 1}. \tag{29}$$

Padajuće anuitete dobivamo za

$$Kr^{mt}\frac{r^t - 1}{r^{mt} - 1} \leq b \leq Kr^{kt}\frac{r^t - 1}{r^{kt} - 1}. \tag{30}$$

Primjer 2. Zajam od 50.000 NJ, koji je odobren uz 100% godišnje kamate, treba biti otplaćen u roku od 3 godine, kvartalnim uplatama anuiteta koji se mijenjaju polugodišnje po zakonu:

$$a_j = bq^{j-1}, \qquad j = 1, \ldots, 6.$$

Anuiteti trebaju biti rastući, a prvi anuitet treba otplaćivati barem kamatu za dano razdoblje.

Uočavajući (29) dobivamo da prvi anuitet možemo izabrati iz intervala [9461, 10812].

Ako izaberemo $a_1 = b = 9461$ NJ, iz (22) možemo odrediti q rješavanjem jednadžbe:

$$q^5 + q^4\sqrt{2} + 2q^3 + 2q^2\sqrt{2} + 4q + 4\sqrt{2} - 19.3 = 0.$$

Primjenom npr. Newton-Raphsonove metode za rješavanje ove jednadžbe (vidi [4]) dobivamo $q = 1.08357$.

Napomena 11. Zajmove koji se otplaćuju naizmjenično jednakim anuitetima dobivamo kao specijalan slučaj zakona promjene anuiteta (20) i to za $q = -1$.

Prema tome, ostatak duga nakon s vremenskih intervala duljine t dobivamo iz izraza:

$$O_{st} = Kr^{st} - a\frac{r^{st}-1}{r^t-1} - b\frac{r^{st}-1}{r^t-1}\,\frac{(-1)^l - r^{mt}}{1+r^{st}}, \tag{31}$$

a izraz (22) poprima oblik:

$$Kr^{mt} = a\frac{r^{mt}-1}{r^t-1} - b\frac{r^{kt}-1}{r^t-1}\,\frac{(-1)^l - r^{mt}}{1+r^{kt}}, \tag{32}$$

pri čemu sve oznake odgovaraju oznakama iz formule (22). Anuiteti koji se smjenjuju su: $a_1 = a + b$, $a_2 = a - b$.

3.2.2. Za anuitete koji se mijenjaju množenjem jednog dijela anuiteta uvijek istim iznosom r^{kt}, tj. po zakonu:

$$a_j = a + b\,(r^{kt})^{j-1}, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

ostatak duga nakon s vremenskih intervala duljine t možemo izračunati iz izraza:

$$O_{st} = Kr^{mt} - a\frac{r^{st}-1}{r^t-1} + bl\frac{r^{st}}{r^{kt}}\,\frac{r^{kt}-1}{r^t-1}. \tag{33}$$

Tada relacija (14) poprima oblik:

$$Kr^{mt} = a\frac{r^{mt}-1}{r^t-1} + bl\frac{r^{mt}}{r^{kt}}\,\frac{r^{kt}-1}{r^t-1}, \tag{34}$$

gdje je b dio prve otplate koji se prilikom svake otplate množi s r^{kt}, a ostale oznake odgovaraju oznakama u točki 4.2.1.

Budući da je $r^{kt} > 1$, ovakvi anuiteti uvijek rastu. Možemo izabrati parametre a ili b tako da prvi anuiteti otplaćuju barem kamatu za dano razdoblje iz uvjeta:

$$a + b \geq K(r^t - 1).$$

Napomena 12. Za otplatu zajma anuitetima koji se uplaćuju na početku obračunskog razdoblja mogu se dobiti analogni rezultati.

Primljeno: 26. 01. 1989.
Prihvaćeno: 23. 02. 1989.

LITERATURA

[1] Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Informator, Zagreb, 1980.

[2] V. Muškardin, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Ekonomska analiza IX—1, 1985. pp 75—99.

[3] R. Scitovski, *Ispodgodišnje ukamaćivanje*, Ekonomska analiza XXI—1, 1987. pp 243—257.

[4] D. Đ. Tošić, *Uvod u numeričku analizu*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[5] B. Trklja, *Finansijska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1985.

[6] V. Ž. Veselinović, *Finansijska matematika*, Naučna knjiga, Beograd, 1960.

PERIODICAL PAYMENTS BY VARIABLE AMOUNTS

Mirta ŠILAC

Summary

This paper presents periodical payments by variable amounts. It is shown that very useful formulae can be obtained by application compound interest calculation and simple mathematical methods. In order to explain the payment models only some natural assumptions are needed. These are; constant time-intervals of payments, constant time-intervals of amounts variation and fixed interest rate. The time-amount variation and both of them need not be identical with time-in-amount variation and both of them neednot be identical with time-interval of interest rate.

The cases of the rules presented here, according to which the amounts may vary, give enough space to satisfy many demands in

practice. This can be done by convenient choice of the rule, parameters and time-intervals, even in the case of money value increase (decrease).

It is also shown how to treat certain economic conditions on some credit models.

Credit payable with annuities at the beginning of the accounting period is not explained here because it can be done by analogy.