EKONOMSKA ANALIZA,
2, XXIV (1990), 199—256

OPTIMALIZACIJA KONVEKSNIH MODELA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA
PREGLED OBLASTI
II dio
KARAKTERIZACIJA OPTIMALNOG ULAZA

*Igor JEMRIĆ**

1. UVOD

Oslanjajući se na prvi dio ovog pregleda, objavljen u časopisu "Ekonomska analiza" br. 4/89, u kojem je izložena osnovna ideja procesa stabilne optimalizacije modela matematičkog programiranja (modela MP), te pregled rezultata vezanih uz analizu stabilnosti konveksnih modela MP, ovaj dio pregleda daje prikaz rezultata vezanih uz karakterizaciju optimalnosti konveksnih modela MP.

Podsjetimo se, ukratko, da je predmet izučavanja ovog procesa konveksni model MP (K, θ):

$$\min f^{o}(x, \theta)$$

uz ograničenja:

$$f^{i}(x, \theta) \leq 0, \ i \in P,$$

$$\theta \in I,$$

gdje je $x = [x_j] \in R^n$ vektor varijabli (odlučivanja), $\theta = [\theta_k] \in R^p$ vektor parametara (ulaznih podataka), $P = \{1, 2, \ldots, m\}$ *konačan* skup indeksa ograničenja, $f^i(x, \theta)$, $i \in \{0\} \cup P$, funkcije *neprekinute* po x i po θ te *konveksne* po x za neko $\theta \in I$, dok je $I \subset R^p$ konveksan kompakt.[1]

* Ekonomski fakultet, Zagreb.

[1] $\theta \in I$ nije ograničavajuća pretpostavka — I može biti i čitav R^p, ali se pretpostavlja da za većinu realnih sistema variranje parametara najčešće ima smisla samo unutar nekog zadanog konveksnog kompakta (intervala).

Svakako fiksno $\theta \in I$ određuje korektnu realizaciju modela, tj. pripadni matematički program.

Model (K, θ) promatra se kao "crna kutija" koja za svaki ulaz $\theta \in I$ generira odgovarajući izlaz $\{F(\theta), \tilde{F}(\theta), \tilde{f}(\theta)\}$, pri čemu je

$$F(\ ) = \{x \in R^n : f^i(x, \theta) \leq 0, i \in P\} \text{ — dopustiv skup,} \tag{1.1}$$

$$\tilde{x}(\theta) \text{ — optimalno rješenje,}$$

$$\tilde{F}(\theta) = \{\tilde{x}(\theta)\} \text{ — skup optimalnih rješenja,} \tag{1.2}$$

$$\tilde{f}(\theta) = f^o(\tilde{x}(\theta), \theta) \text{ — funkcija optimalne vrijednosti.} \tag{1.3}$$

Pri tome, model (K, θ) uvijek se promatra obzirom na neko referentno, početno stanje $\theta = \theta^o$, odnosno početnu realizaciju (K, θ^o). Primjena optimalizacije modela MP ograničava se samo na modele (K, θ) s takvim funkcijama cilja $f^o(x, \theta)$ za koje početno stanje $\theta = \theta^o$ generira omeđen i neprazan skup optimalnih rješenja $\tilde{F}(\theta^o)$. Za takve funkcije cilja kaže se da su realistične u θ^o.

Osnovni zadatak optimalizacije modela matematičkog programiranja jest određivanje "najprihvatljivije" *stabilne* putanje od inicijalnog (početnog) ulaza θ^o do lokalno optimalnog ulaza θ^* tj. ulaza koji lokalno optimalizira funkciju optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\theta)$. Tada je pripadni program (K, θ^*) lokalno optimalna realizacija modela (K, θ) obzirom na početni ulaz θ^o. Naravno, lokalno optimalni ulaz i pripadna lokalno optimalna realizacija modela nisu jedinstveni jer njihovo određivanje ovisi o početnom ulazu θ^o (za različite θ^o mogu se dobiti bitno različiti θ^*) te o izboru strategije kojom se poboljšava vrijednost funkcije cilja.

Proces optimalizacije modela matematičkog programiranja odvija se u četiri etape:

I etapa: lokalna analiza stabilnosti modela (K, θ) pri početnom ulazu $\theta = \theta^o$;

II etapa: konstrukcija stabilne putanje od početnog ulaza $\theta = \theta^o$ do nekog "boljeg" ulaza θ, tj. stabilne putanje po kojoj se smanjuje vrijednost funkcije optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\theta)$;

III etapa: identifikacija lokalno optimalnog ulaza θ^* i pripadne lokalno optimalne realizacije modela (K, θ^*);

IV etapa: izbor "najbolje", tj. najprihvatljivije putanje $\alpha(\theta)$ između svih stabilnih putanja $\theta^o \rightarrow \theta^*$.

Prva etapa detaljno je izložena u prvom dijelu ovog pregleda dok se ovdje mogu naći rezultati vezani uz treću etapu ovog procesa. Druga i četvrta etapa numeričke su prirode i njihovo provođenje ovdje je samo skicirano.

Kao matematička priprema u ovom dijelu pregleda ukratko je izložena tzv. BBZ teorija uvjeta optimalnosti u konveksnom programiranju, na čije se rezultate oslanja treća etapa stabilne optimalizacije konveksnih modela MP. Analiza neprekinutosti funkcija Lagreange-ovih multiplikatora modela MP pripremno je poglavlje za centralni dio rada — prikaz nužnih i dovoljnih uvjeta optimalnosti ulaza konveksnih modela MP. Također je izložena i skica metode za određivanje optimalnog ulaza, bazirane na tzv. formuli za marginalnu vrijednost. Na kraju, spomenuto je i nekoliko specifičnih problema optimizacije modela MP (komplementarni problem, vremenski ovisna optimalizacija modela MP te primjena optimalizacije modela MP u nelinearnom programiranju, uz što je vezan i novi koncept tzv. strukturne optimalnosti). U zaključnom dijelu spomenuta su trenutna ograničenja optimalizacije modela MP te neke mogućnosti njene primjene u ekonomiji.

2. MATEMATIČKA PRIPREMA

U konveksnom programiranju, najpoznatiji uvjeti optimalnosti su Karush-Kuhn-Tuckerovi (KKT) uvjeti te Fritz Johnovi (FJ) uvjeti optimalnosti. Međutim, ni jedni ni drugi uvjeti ne daju potpunu karakterizaciju optimalnosti konveksnih programa, već su potrebne neke dodatne pretpostavke na strukturu ograničenja programa, poznate kao „kvalifikacija ograničenja" (čije je zadovoljenje potrebno da bi Karuch-Kuhn-Tuckerovi uvjeti bili i nužni, a ne samo dovoljni), odnosno „redukcioni uvjeti" (čije je zadovoljenje potrebno da bi Fritz Johnovi uvjeti bili dovoljni, a ne samo nužni). Ben-Tal — Ben-Israel — Zlobec (BBZ) teorija uvjeta optimalnosti, predmet izlaganja ovog poglavlja, prva daje nužne i dovoljne uvjete optimalnosti konveksnih programa bez ikakvih dodatnih pretpostavki na strukturu programa. Ona je konstruktivne prirode a pristupa karakterizaciji optimalnosti neke dopustive točke konveksnog programa korištenjem podskupova skupa aktivnih ograničenja u toj točki. BBZ teorija uvjeta optimalnosti obuhvaća i neke nekonveksne programe. Međutim, kako se ovaj rad ograničava samo na konveksne modele, ovdje je izložen kratki prikaz osnovnih rezultata BBZ teorije koji se odnose na konveksne diferencijabilne i nediferencijabilne programe, a koji predstavljaju osnovu na kojoj se bazira karakterizacija optimalnosti konveksnih modela matematičkog programiranja. (Rezultati su navedeni bez dokaza koji se nalaze u npr. [01], [12]. Osnovni pojmovi korišteni u ovim rezultatima, iako definirani i u prvom dijelu ovog pregleda, navode se i ovdje radi lakšeg razumijevanja.

2.1. Osnovni pojmovi

Definicija 2.1.

Neka je $F \subseteq R^n$ zatvoren konveksan skup i neka je $x^* \in F$. Tada vektor $d \in R^n$ predstavlja dopustivu smjer na F u x^* ako postoji $T > 0$ takvo da je

$$x^* + td \in F \; \forall t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

Skup svih dopustivih smjerova na F u x^* označava se s $D(F, x^*)$.

Definicija 2.2.

Za neku funkciju $f: R \to R^n$ i točku $x^* \in dom\, f$ te za neku relaciju „R", definira se skup

$$D_f^R(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) R f(x^*) \; \forall t \in [0, T]\}. \tag{2.2}$$

Konkretno, za "R"="<","=" itd, definiraju se

$$D_f^<(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) < f(x^*) \; \forall t \in [0, T]\}. \tag{2.3}$$

(skup smjerova opadanja funkcije f u x^*),

$$D_f^=(x^*) = \{d \in R^n : \exists T > 0 \ni f(x^* + td) = f x^*) \; \forall t \in [0, T]\}. \tag{2.4}$$

(skup smjerova konstantnosti funkcije f u x^*), itd.

Za skup funkcija $\{f^k : k \in \Omega \subseteq P\}$ koriste se slijedeće oznake:

$$D_k^R(x^*) = D_{f^k}^R(x^*), \tag{2.5}$$

$$D_\Omega^R(x^* = \bigcap_{k \in \Omega} D_k^R(x^*), \tag{2.6}$$

gdje se za $\Omega = 0$, $D_0^R(x^*$ interpretira kao R^n.

Skup $D_f^=(x^*)$ kao i skup $D_f^{\leqq}(x^*))$ je po definiciji konus dok je skup $D_f^<(x^*)$ tupi konus.[2] Ako je f konveksna funkcija, $D_f^<(x^*)$ i $D_f^{\leqq}(x^*)$ su konveksni dok je $D_f^=(x^*)$ konveksan konus ako je f konveksna funkcija i diferencijabilna u x^*. Za diferencijabilne funkcije vrijedi i

$$D_f^<(x^*) = \{d : \nabla f(x^*)^T d < 0\} \tag{2.7}$$

[2] Za neki skup C kaže se da je konus ako vrijedi:
$x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$,
a da je tupi konus ako vrijedi:
$x \in C, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C$.

(što će se koristiti u prikazu uvjeta optimalnosti diferencijabilnih konveksnih programa pomoću gradijenata). Nadalje, za konveksne funkcije vrijedi i slijedeće:

$$D_f^{\leq}(x^*) = D_f^{<}(x^*) \cup D_f^{=}(x^*). \tag{2.8}$$

Za tzv. vjerno konveksne funkcije[3] može se pokazati da skup smjerova konstantnosti od f u x* ne ovisi o x*, tj. da je

$$D_f^{=}(x^*) = N\left(\begin{bmatrix} A_T \\ a \end{bmatrix}\right) \tag{2.9}$$

gdje je N(A) nula-prostor matrice A.

Definicija 2.3.

Neka je konveksan skup F reprezentiran konačnim skupom ograničenja (nejednadžbi):

$$F = \{x \in R^n : f^i(x) \leq 0,\ i \in P\} \tag{2.10}$$

gdje je P konačni skup indeksa a f^i, $i \in P$, konveksne funkcije. Tada je za neko $x^* \in F$

$$P(x^*) = \{i \in P : f^i(x^*) = 0\}, \tag{2.11}$$

skup indeksa aktivnih ograničenja u x^*.

Nadalje, definira se skup

$$P^{=} = \bigcap_{x \in F} P(x) = \{i \in P : f^i(x) = 0\ \forall x \in F\}, \tag{2.12}$$

minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja na skupu F.

Obzirom da je $P^{=} \subseteq P(x^*) \subseteq P$, uvode se i slijedeće oznake:

$P^{<}(x^*) = P(x^*) \setminus P^{=}$ — komplement od $P^{=}$ obzirom na $P(x^*)$ (2.13)

$P^{<} = P \setminus P^{=}$ — komplement od $P^{=}$ obzirom na P. (2.14)

Za konveksan skup F (definiran kao u definiciji 2.3) moguće je pomoću skupa $P(x^*)$ uspostaviti vezu između skupa dopustivih smje-

---

[3] Funkcija $f: R^n \to R$ je vjerno konveksna ako se može prikazati kao

$$f(x) = h(Ax + b) + a^T x + c, \tag{2.F1}$$

gdje je A matrica reda m x n, a i b vektor-stupci reda n i m respektivno, c skalar a $h : R^m \to R$ striktno konveksna funkcija.
U vjerno konveksne funkcije spadaju sve analitičke konveksne funkcije.

ıova i skupa nerastućih smjerova funkcija ograničenja:

$$D(F, x^*) = D_{P(x^*)}^{\leq}(x^*), \tag{2.15}$$

tj. skup mogućih smjerova na skupu F u x* jednak je presjeku skupova nerastućih smjerova svih aktivnih ograničenja u x*.

Definicija 2.4.

Skup svih vektora $x \in R^n$ koji zadovoljavaju ograničenja aktivna na čitavom skupu F označava se s $F^=$ i definira na slijedeći način:

$$F^= = \{x \in R^n : f^i(x) = 0 \ \forall i \in P^=\}, \tag{2.17}$$

pri čemu je $F^= = R^n$ za $P^= = 0$.

Treba primijeniti da je $F^=$ moguće zapisati i kao

$$F^= = \{x \in R^n : f^i(x) \leq 0 \ \forall i \in P^=\}, \tag{2,17}$$

što je posljedica (2.16).

Može se pokazati da za vjerno konveksne funkcije ograničenja vrijedi

$$F^= = x^o + \bigcap_{i \in P} D_i^=(x^o), \tag{2.18}$$

gdje je $x^o \in F$ proizvoljna ali fiksna točka u F.

Definicija 2.5.

Neka je F neprazan skup u R^n. Tada je F^+ polarni (ili dualni) skup od F tj. skup svih vektora $y \in R^n$ koji daju nenegativan skalarni produkt sa svakim $x \in F$:

$$F^+ = \{y \in R^n : x \in F \Rightarrow y^T x \geq 0\}. \tag{2.19}$$

Polarni skup svakog skupa zatvoren je konveksan konus. Pojam polarnog skupa koristi se u određivanju uvjeta optimalnosti u dualnoj formi, primjenom tzv. teorema separacije (u BBZ teoriji koristi se poopćeni teorem Dubovitskii-Milyutin-a, vidjeti [01]).

Obzirom da ovaj prikaz uključuje i uvjete optimalnosti za nediferencijabilne konveksne programe, uvodimo i sljedeći pojam:

Definicija 2.6.

Vektor $y \in R^n$ je subgradijent funkcije $f : R^n \to R$ u x^* ako je

$$f(z) \geq f(x^*) + y^T (z - x^*) \ \forall z. \tag{2.20}$$

Skup svih subgradijenata naziva se subdiferencijal i označava s $\partial f(x^*)$.

Za općenitu funkciju f, subgradijent nije jedinstven. Međutim, ako je f konveksna i diferencijabilna, njezin subgradijent u nekoj točci jedinstven je i upravo jednak njenom gradijentu u toj točci, tj. $\partial f(x^*) = \{\nabla f(x^*)\}$.

2.2. *Karakterizacija optimalnosti konveksnih programa pomoću podskupova skupa aktivnih ograničenja*

Promatra se konveksan program (K):

$$\min f^o(x)$$
$$p.o.$$
$$f^i(x) \leq 0,\ i \in P$$

gdje su $f^i : R^n \to R$, $i \in \{0\} \cup P$, neprekinute konveksne funkcije i $P = \{1, 2, \ldots, m\}$, konačan skup indeksa.

U konveksnom programiranju optimalnost se karakterizira pomoću odsustva dopustivih smjerova koji poboljšavaju (smanjuju) vrijednost funkcije cilja f^o (tzv. korisnih smjerova):
dopustiva točka x^* programa (K) optimalna je ako, i samo ako, je

$$D_o^{<}(x^*) \cap D_{P(x^*)}^{\leq}(x^*) = 0 \tag{2.21}$$

(podsjetimo se da je skup dopustivih smjerova jednak $D_{P(x^*)}^{\leq}(x^*)$).

Teorem 2.1. (Multi-Ω karakterizacija optimalnosti)

Dopustivo rješenje x^* od (K) optimalno je ako, i samo ako, za svaki podskup Ω od $P(x^*)$ vrijedi:

$$D_o^{<}(x^*) \cap D_{P(x^*)\setminus\Omega}^{<}(x^*) \cap D_{\Omega}^{=}(x^*) = 0, \tag{2.22}$$

odnosno, dualno, za svaki podskup Ω od $P(x^*)$ postoje vektori

$y^i \in (D_i^{<}(x^*))^+$, $i \in \{0\} \cup (P(x^*)\setminus\Omega)$, ne svi nula, takvi da je

$$\sum_{i \in \{0\} \cup (P(x^*)\setminus\Omega)} y^i \in -[D_{\Omega}^{=}(x^*)]^+.$$

Ovaj uvjet optimalnosti moguće je za diferencijabilne funkcije izraziti i jednostavnije, pomoću gradijenata:

Korolar 2.1.

Dopustivo rješenje x^* difrencijabilnog konveksnog programa (K) optimalno je ako, i samo ako, za svaki podskup Ω od $P(x^*)$, sistem

$$\nabla f^o (x^*)^T d < 0,$$
$$\nabla f^i (x^*)^T d < 0, \quad i \in P(x^*) \setminus \Omega \tag{2.24}$$
$$d \in D_\Omega{}^=(x^*)$$

nema rješenja, odnosno dualno, ako, i samo ako, je za svaki podskup Ω *od* $P(x^*)$, *sistem*

$$u_o \nabla f^o (x^*) + \sum_{i \in P(x^*) \setminus \Omega} u_i \nabla f^i (x^*) \in [D_\Omega{}^=(x^*)]^+$$

$$u_o \geq 0,\ u_i \geq 0,\ i \in P(x^*) \setminus \Omega,\ \text{ne svi nula},$$
rješiv.

Analogni rezultat moguće je dobiti i za nediferencijabilne konveksne programe zamjenom gradijenata subdiferencijalima (čime se za svaki Ω dobiva skupovna relacija). (Za detaljniju informaciju vidjeti [01], [15].)

Ako sa p^* označimo kardinalni broj od $P(x^*)$, teorem 2.1 (odnosno korolar 2.1) daje 2^{p^*} nužnih uvjeta optimalnosti — po jedan za svaki podskup Ω. Na primjer, ako se za Ω odabere prazan skup (što je također podskup or $P(x^*)$), dualna tvrdnja korolara 2.1. daje (zbog $(R^n)^+ = \{0\}$):
"dopustivo rješenje x^* diferencijabilnog konveksnog programa (K) optimalno je samo ako sistem

$$u_o \nabla f^o (x^+) + \sum_{i \in P(x^*)} u_i \nabla f^i (x^*) = 0 \tag{2.26}$$

$$u_o \geq 0,\ u_i \geq 0,\ i \in P(x^*),\ \text{ne svi nula}$$

ima rješenje".

U gornjoj tvrdnji može se prepoznati tzv. Fritz Johnov nužan uvjet optimalnosti. Pod određenim uvjetima, tzv. redukcionim uvjetima, ovaj uvjet predstavlja i dovoljan uvjet optimalnosti. Jedan takav uvjet je da su sve funkcije ograničenja, aktivnih u x^*, striktno konveksne. Drugi redukcioni uvjet je da se sve varijable koje daju ne-nultu parcijalnu derivaciju funkcije cilja pojavljuju u restrikcijama funkcija svih ograničenja koja su aktivna u x^*.[4]

---

[4] Ako za funkciju $f^k : R^n \to R$ označimo s $[k]$ skup indeksa varijabli o kojima f^k zaista ovisi ($j \in [k]$ ako postoji $n-1$ vrijednosti $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n$ takvih da je $f^k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \xi_{j-1}, \zeta_{j+1}, \ldots, \zeta_n)$ različito od konstante), tada je $f^{[k]} : R^{\mathrm{card}[k]} \to R$ restrikcija funkcije f^k, definirana kao

$$f^{[k]}(x_{[k]}) = f^k(x)\ \forall\ x \in R^n, \tag{2.F2}$$

pri čemu je $x_{[k]}$ podvektor vektora $x = [x_j] \in R^n$, definiran $x_{[k]} = [x_j]$, $j \in [k]$. (Za detalje pogledajte [04].)

Vidljivo je da je izbor $\Omega = 0$ pogrešan jer, bez uključivanja ostalih podskupova od P(x*) ne osigurava dovoljnost uvjeta optimalnosti (bez dodatnih pretpostavki). Međutim, postoji samo jedan konkretan podskup od P(x*) koji daje potpunu karakterizaciju optimalnosti dopustive točke x*, a to je $P^=$. Naime, minimalni skup indeksa aktivnih ograničenja $P^=$ ima određena svojstva koja to omogućavaju, a to su:

a) $P^=$ je maksimalan podskup od P(x*) sa svojstvom da, za svako $i \in \Omega$, vrijedi

$$d \in D(F, x^*) \Rightarrow d \in D_i^=(x^*), \tag{2.27}$$

b) ako je $P^<(x^*) \neq 0$, tada za svaki podskup Ω od $P^=$ vrijedi:

$$D_{P(x^*)\setminus\Omega}^<(x^*) \cap D_\Omega^=(x^*) \begin{cases} = 0 \text{ ako je } \Omega = P^= \\ \neq 0 \text{ ako je } \Omega \neq P^=, \end{cases} \tag{2.28}$$

c) konus $D_P = {}^=(x^*)$ je konveksan.

Ova svojstva omogućavaju slijedeću karakterizaciju optimalnosti za konveksne programe:

Teorem 2.2. ($P^=$ karakterizacija optimalnosti)

Dopustivo rješenje x programa (K) je optimalno ako, i samo ako, vrijedi*

$$D_o^<(x^*) \cap D_P <_{(x^*)}^<(x^*) \cap D_P = {}^=(x^*) = 0, \tag{2.29}$$

odnosno dualno, ako, i samo ako, postoje vektori

$$O \neq y^o \in (D_o^<(x^*))^+ \; i \; y^i \in (D_i^<(x^*))^+, \; i \in P^<(x^*), \text{ takvi da je}$$

$$y^o + \sum_{i \in P^<(x^*)} y^i \in -[D_P = {}^=(x^*)]^+. \tag{2.30}$$

I ovaj teorem moguće je pojednostaviti za diferencijabilne programe, pomoću gradijenata (odnosno subdiferencijala za nediferencijabilne konveksne programe):

Korolar 2.2.

Dopustivo rješenje x diferencijabilnog konveksnog programa (K) optimalno je ako, i samo ako, sistem*

$$\begin{aligned} &\nabla f^o(x^*)^T d < O, \\ &\nabla f^i(x^*)^T d < O, \; i \in P^<(x^*), \\ &d \in D_P = {}^=(x^*) \end{aligned} \tag{2.31}$$

nema rješenja, odnosno dualno, ako, i samo ako, sistem

$$\nabla f^o (x^*) + \sum_{i \in P^<(x^*)} u_i \nabla f^i (x^*) \in [D_P = {}^= (x^*)]^+ , \tag{2.32}$$

$u_i \geq 0,\ i \in P^<(x^*)$, *ne svi nula,*

ima rješenje.

U specijalnom slučaju, kada je $P^= = 0$, dualna tvrdnja korolara 2.2. kaže:

»dopustivo rješenje x* diferencijabilnog konveksnog programa (K) optimalno je ako, i samo ako, sistem

$$\nabla f^o b(x^*) + \sum_{i \in P (x^*)} u_i \nabla f^i (x^*) = 0 \tag{2.33}$$

$$u_i \geq 0,\ i \in P (x^*)$$

ima rješenje.«

Sistemu (2.33) ekvivalentan je sistem

$$\nabla f^o (x^*) \sum_{i \in P} u_i \nabla f^i (x^*) = 0 , \tag{2.34}$$

$$u_i f^i(x^*) = 0,\ i \in P, \tag{2.35}$$

$$u_i \geq 0,\ i \in P, \tag{2.36}$$

što, u stvari, predstavlja poznate Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete optimalnosti (pri čemu su uvjeti (2.35) tzv. uvjeti komplementarnosti). U stvari, pretpostavka $P^= = 0$ predstavlja tzv. Slaterov uvjet:

$$\exists \hat{x} : f^i (\hat{x}) < 0,\ \forall\, i \in P, \tag{2.37}$$

u BBZ formalizmu. Poznato je da je zadovoljenje Slaterovog uvjeta (ili neke druge kvalifikacije ograničenja kao npr. uvjeta da su gradijenti svih ograničenja aktivnih u x* nenegativno linearno nezavisni) pretpostavka nužnosti Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta. Ovdje se vidi da oni predstavljaju samo jedan, prilično restriktivan specifičan slučaj u okviru karakterizacije optimalnosti pomoću skupa $P^=$.

Ova karakterizacija (teorem 2.2. i korolar 2.2) daje nužne i dovoljne uvjete optimalnosti izražene samo jednim sistemom (koji odgovara $P^=$) nasuprot 2^{P*} sistema u multi-Ω karakterizaciji (teorem 2.1. i korolar 2.1), što je čini znatno operativnijom i ovoj potonjoj dodjeljuje samo historijski značaj kao prvoj potpunoj karakterizaciji optimalnosti u konveksnom programiranju.

$P^=$ — karakterizacija optimalnosti ilustrirana je primjerom:

Primjer 2.1.

Promatra se sljedeći konveksan program:

$$Min\ f^o(x) = x_1 + x_2(x_2 - 1)$$

p. o.

$$f^1(x) = -x_1 + x_2^2 + 1 \leq 0,$$

$$f^2(x) = x_1 - x_2 - 2 \leq 0,$$

$$f^3(x) = x_1 - 1 \leq 0.$$

Ovdje je očigledno $P^= = \{1, 3\}$. Testirajući optimalnost dopustivog rješenja $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ korištenjem dualne tvrdnje korolara 3.2. ($P^=$ karakterizacija optimalnosti za diferencijabilne konveksne programe), dobiva se sistem:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in R^2,$$

$$u_2 > 0$$

koji očigledno ima rješenje. Dakle, x^* jest optimalno rješenje ovog programa. Lako je pokazati da ovo rješenje ne zadovoljava Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete optimalnosti (sistem 2.34—2.36. nema rješenja — izraz 2.34. daje $u_2 = -1$ tj. kontradikciju s 2.36), što je posljedica činjenice da je $P^= \neq 0$.

2.3. Karakterizacija optimalnosti konveksnih programa pomoću ograničene sedlaste točke

Poznato je da su Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti ekvivalentni tvrdnji da je (uz zadovoljenje Slaterovog uvjeta) dopustivo rješenje x^* konveksnog programa (K) optimalno ako, i samo ako, postoji $u^* = [u_i] \in R^m_+$ (R^m_+ je nenegativni ortant od R^m a $m = card(P)$, tj. broj ograničenja) takav da je $u_i^* f^i(x^*) = 0, i \in P$, a da je par (x^*, u^*) sedlasta točka Lagrange-ove funkcije:

$$L(x, u) = f^o(x) + \sum_{i \in P} u_i f^i(x), \tag{2.42}$$

tj. da vrijedi tzv. nejednakost sedla:

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*) \quad \forall\, x \in R^n, \forall\, u \in R^m_+. \tag{2.43}$$

Ukoliko konveksan program (K) ne dozvoljava Slaterov uvjet, gornji uvjet je samo dovoljan (dovoljan je i za nekonveksne programe) ali ne i nužan. To znači da se može dogoditi da program ima optimalno rješenje ali da Lagrange-ova funkcija nema sedlastu točku.

Korištenjem instrumentarija BBZ teorije uvjeta optimalnosti moguće je dati analognu karakterizaciju bez ikakvog zahtjeva za kvalifikacijom ograničenja. To se postiže korištenjem tzv. ograničene Lagrange-ove funkcije, definirane na slijedeći način:

$$L^{<}(x, u) = f^{o}(x) + \sum_{i \in P^{<}} u_i f^{i}(x) \tag{2.44}$$

Ova funkcija poklapa se s „običnom" Lagrange-ovom funkcijom u slučaju kada je $P^{=} = 0$ tj. kada je zadovoljen Slaterov uvjet.

Teorem 2.3. (sedlasta karakterizacija optimalnosti)

Neka točka $x^* \in F^{=}$ je optimalno rjšeenje konveksnog programa (K) ako, i samo ako, postoji nenegativan vektor $u^* = [u_i]$, $i \in P^{<}$, takav da je par (x^*, u^*) ograničena sedlasta točka,[5] tj. da vrijedi:

$$L^{<}(x^*, u) \leq L^{<}(x^*, u^*) \leq L^{<}(x, u^*) \;\; \forall\, x \in F^{=}, \; \forall\, u \in R^{q}_{+}, \tag{2.45}$$

gdje je R^{q}_{+} nenegativan ortant od R^q a $q = card\,(P^{<})$

Važno je uočiti da je primjena ograničene Lagrange-ove funkcije uzrokovala dodatnu promjenu u nejednakosti sedla u smislu potrebe njenog zadovoljenja za svako $x \in F^{=}$ a ne više za svako $x \in R^n$, što je posljedica isključivanja iz Lagrange-ove funkcije onih ograničenja koja su aktivna na čitavom dopustivom skupu.

Ukoliko je zadovoljen Slaterov uvjet, teorem 2.4. poklapa se s Karush-Kuhn-Tuckerovom karakterizacijom pomoću sedlaste točke jer tada je ne samo $L(x, u) = L^{<}(x, u)$ već i $F^{=} = R^n$.

Karakterizacija optimalnosti pomoću ograničene sedlaste točke izložena je u [23], u kontekstu teorije dualnosti u konveksnom programiranju. Za temu ovog pregleda ona je posebno značajna jer karakterizacija optimalnosti ulaza u optimalizaciji modela matematičkog programiranja predstavlja njeno prirodno proširenje na konveksne modele matematičkog programiranja.

Sedlasta karakterizacija optimalnosti ilustrirana je jednostavnim primjerom iz prethodnog odjeljka:

Primjer 2.2.

Promatra se konveksni program iz primjera 2.1. Za testiranje optimalnosti dopustivog rješenja $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, konstruira se ograničena Lagrange-ova funkcija:

$$L^{<}(x, u) = x_1 + x_2^2 - x_2 + u_2 (x_1 - x_2 - 2).$$

[5] U literaturi (npr. [17]) koristi se termin „restriktivna sedlasta točka".

Uz izbor $u^*_2 = 0$, nejednakost sedla 2.44. izgleda ovako:

$$1 - u_2 \leq 1 \leq x_1 + x_2^2 - x_2$$

pa je, stoga, zadovoljena za svako nenegativno u_2 i za svako $x \in F^=$ (uočimo da je $F^= = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$). Prema tome, dopustivo rješenje x^* zadovoljava i ovaj kriterij optimalnosti.

3. FUNKCIJE LAGRANGE-OVIH MULTIPLIKATORA

3.1. Lagrange-ove funkcije i funkcije Lagrange-ovih multiplikatora

U prethodnom poglavlju prikazana je karakterizacija optimalnosti neke točke $x^* \in F^=$ konvekesnog programa (K) pomoću sedlaste točke ograničene Lagrange-ove funkcije. Kako se svaki konveksni program (K) može promatrati kao konkretna realizacija konveksnog modela, recimo (K, θ^o) (za neko fiksno $\theta = \theta^o$), teorem 2.4. moguće je proširiti i na konveksni model (K, θ) za neko proizvoljno $\theta \in I$. Tada ograničena Lagrange-ova funkcija postaje:

$$L^<(x, u; \theta) = f^o(x, \theta) + \sum_{i \varepsilon P^<(\theta)} u_i f^i(x, \theta), \tag{3.1}$$

a nejednakost sedla (2.45) iz teorema 2.4. za $\tilde{x}(\theta) \in F^=(\theta)$ postaje:

$$L^<(\tilde{x}(\theta), u; \theta) \leq L^<(\tilde{x}(\theta), \tilde{u}(\theta); \theta) \leq L^<(x, \tilde{u}(\theta); \theta) \tag{3.2}$$

za svako $x \in F^=(\theta)$ i svako $u \in R_+^{q(\Theta)}$, gdje je $R_+^{q(\Theta)}$ nenegativan ortant od $R^{q(\Theta)}$, a $\varphi(\theta) = \text{card } P^<(\theta)$.

Pripadno višeznačno preslikavanje $U: \theta \rightarrow \{\tilde{u}_i(\theta) : i \in P^<(\theta)\}$ koje se pojavljuje u (3.2) jest pripadna *funkcija Lagrnage-ovih multiplikatora.*[6]

Ako je zadovoljen Slaterov uvjet u θ, vrijedi $P^=(\theta) = 0$ *i* $P^<(\theta) = P$. Tada ograničena Lagrange-ova funkcija postaje klasična Lagrange-ova funkcija s pripadnom funkcijom Lagrange-ovih multiplikatora $U(\theta) = \{\tilde{u}_i(\theta) : i \in P\}$. Dakle, svakom konveksnom modelu (K, θ) moguće je pridružiti dvije funkcije Lagrange-ovih multiplikatora — $U(\theta)$ i $U^<(\theta)$, koje odgovaraju dvjema Lagrange-ovim funkcijama — klasinčoj i ograničenoj, respektivno.

[6] Ovaj termin nije u potpunosti prikladan, jer se radi o višeznačnom preslikavanju a ne funkciji (vrijednost Lagrange-ovih multiplikatora ne mora biti jednoznačno određena za svako θ). Međutim, ovaj termin se koristi u literaturi (npr. [09], [10], [15] i drugdje) pa je i ovdje zadržan.

Ako se promatraju lokalna svojstva modela (K, θ) u okolini nekog fiksnog ulaza $\theta = \theta^o \in I$ (što je svojstveno optimalizaciji modela MP), moguće je konstruisati i slijedeću Lagrange-ovu funkciju:

$$L_o^{<}(x, u; \theta) = f^o(x, \theta) + \sum_{i \in P^{<}(\theta^o)} u_i f^i(x, \theta). \tag{3.3}$$

Ako sa (3.2a) označimo izraz (3.2) uz zamjenu $L^{<}(x, u; \theta)$ s $L_0^{<}(x, u; \theta)$, tada je

$$U_o^{>}(\theta) = \{\tilde{u}_i(\theta) : i \in P^{<}(\theta^o)\} \tag{3.4}$$

funkcija Lagrange-ovih multiplikatora koja zadovoljava (3.2a) za svako $u \in R_+^{q(\Theta^o)}$ i za svako $x \in F^{=}(\theta)$.[7]

Lagrange-ova funkcija $L_o^{<}(x, u; \theta)$ ima ključnu ulogu u karakterizaciji optimalnog ulaza konveksnog modela (K, θ), u smislu ispitivanja egzistencije sedlaste točke te funkcije. Međutim, kao što će se vidjeti u 4. poglavlju, postoje različiti uvjeti optimalnosti nekog ulaza θ^*, u kojima se nejednakost sedla (3.2a) ispituje za različite vrijednosti x, što uvjetuje različitost pripadnih funkcija Lagrange-ovih multiplikatora. Stoga, uz $U_o^{<}((\theta)$, treba uvesti i slijedeće funkcije Lagrange-ovih multiplikatora:

$$U_o^{<}(\theta) = \{\tilde{u}_i(\theta) : i \in P^{<}(\theta^o)\}, \tag{3.5}$$

koja zadovoljava izraz (3.2a) za svako $u \in R_+^{q(\Theta^o)}$ i svako $x \in F^{=}_o(\theta)$, te

$$U_o^{<}(\theta) = \{\tilde{u}_i(\theta) : i \in P^{<}(\theta^o)\}, \tag{3.6}$$

koja zadovoljava izraz (3.2a) za svako $u \in R_+^{q(\Theta^o)}$ i svako $x \in F^{=}(\theta^o)$.[8]

Kako su skupovi $F^{=}(\theta)$, $F^{=}(\theta^o)$ i $F^{=}_o(\theta)$ općenito različiti, i ova tri preslikavanja su različita. U stvari, za razliku od preslikavanja $U_o^{<}(\theta)$ koje postoji za svaki konveksan model (K, θ) na proizvoljnom području stabilnosti (naravno, vezanom uz θ^o), egzistenciju preslikavanja $U_0^{<}(\theta)$ i $u_o^{<}(\theta)$ na proizvoljnom području stabilnosti (vezanom uz θ^o) osiguravaju tek neki dodatni uvjeti na strukturu modela (tzv. ulaz-

---

[7] U gornje dvije oznake ($L_o^{<}(x, u; \theta)$ i $U_o^{<}(\theta)$), donji indeks "o" označava da se sumacija, odnosno određivanje Lagrange-ovih multiplikatora, odnosi na ograničenja čiji indeksi pripadaju skupu $P^{<}(\theta^o)$. Ukoliko se fiksirani ulaz u čijoj okolini se promatraju svojstva modela (K, θ) označi na drugačiji način, mijenjaju se i ove oznake. Konkretno, u kontekstu karakterizacije optimalnog ulaza modela (K, θ), taj ulaz označava se s θ^* pa se i ove funkcije označavaju s $L_*^{<}(x, u; \theta)$ i $U_*^{<}(\theta)$ respektivno.

[8] Za ove funkcije vrijedi ista napomena kao za $L_o^{<}(x, u; \theta)$ i $U_o^{<}(\theta)$.

na kvalifikacija ograničenja, vidjeti 4. poglavlje, odeljak 4.3). Jedino što je moguće reći u kontekstu usporedbe ovih preslikavanja je da na proizvoljnom području stabilnosti $S(\theta^o)$ vrijedi (ukoliko $U^<(\theta^o)$ postoji):

$$U_o^<(\theta) \subseteq u_o^<(\theta)\ \forall\theta \in N(\theta^o) \cap S(\theta^o), \tag{3.7}$$

gdje je $N(\theta^o)$ neka okolina od θ^o. Izraz (3.7) je posljedica činjenice da na području stabilnosti $S(\theta^o)$ vezanom uz θ^o vrijedi $F^=_o(\theta) \subseteq F^=(\theta)$ za svako $\theta \in N(\theta^o) \cap S(\theta^o)$.

3.2. Neprekinutost funkcija Lagrange-ovih multiplikatora

Funkcije Lagrange-ovih multiplikatora $U^<(\theta)$, $U^<(\theta)$ i $U^<(\theta)$ općenito nisu neprekinute na proizvoljnom području stabilnosti od θ^o. Međutim, kao što će se vidjeti u 4. poglavlju, odeljak 4.4, za formulaciju jednostavnijih uvjeta optimalnosti za diferencijabilne konveksne modele, potrebno je utvrditi uvjete pod kojima su ova višeznačna preslikavanja poluneprekinuta odozgo unutar proizvoljnog područja stabilnosti. Uvjeti koji osiguravaju to svojstvo za preslikavanje $u_o^<(\theta)$ iskazani su u slijedećem teoremu (za detaljniju informaciju vidjeti [15]):

Teorem 3.1.

Promatra se konveksan model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\theta = \theta^o$, na proizvoljnom području stabilnosti $S\theta^o$). Tada:

(i) za proizvoljni niz $\{\theta^k\} \subseteq S(\theta^o)$, $\theta^k \to \theta^o$, niz $\{u_o^<(\theta^k)\}$ je uniformno omeđen za svako dovoljno veliko k;

(ii) ako je preslikavanje $F^=_o: \theta \to F^=_o(\theta)$ poluneprekinuto odozdo u θ^o, obzirom na $S(\theta^o)$, za proizvoljan niz $\{\theta^k\} \subseteq S(\theta^o)$, $\theta^k \to \theta^o$, skup svih graničnih točaka niz $\{u_o^<(\theta^k)\}$ je neprazan i sadržan u $u_o^<(\theta^o)$.

Ukoliko preslikavanja $U_0^<(\theta)$ i $U_0^<(\theta)$ postoje, tj. ukoliko su zadovoljeni uvjeti njihove egzistencije, za njih također vrijedi tvrdnja (i) teorema 3.1. Za validnost tvrdnje (ii) istog teorema za preslikavanje $U_0^<(\theta)$ pretpostavku poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^=_o$ potrebno je zamijeniti pretpostavkom zadovoljenja tog svojstva za preslikavanje $F^=$. Za preslikavanje $U_o^<(\theta)$ tvrdnja (ii) vrijedi bez ikakvih pretpostavki na $F^=_o$ ili $F^=$, tj. preslikavanje $U_o^<(\theta)$ je (ukoliko postoji) uvijek poluneprekinuto odozgo.

Teorem 3.1. odnosi se na proizvoljno područje stabilnosti u θ^o. Međutim, neka područja stabilnosti (npr. $V_1(\theta^o)$) po definiciji zadovoljavaju pretpostavku poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^=_o$ te je stoga za sve konveksne modele (K, θ) (s realističnom funkcijom cilja u θ^o) funkcija Lagrange-ovih multiplikatora $u_o^<(\theta)$ poluneprekinuta odozgo u θ^o na takvim područjima stabilnosti. (Isto se može reći i za funkciju Lagrange-ovih multiplikatora $U_o^<(\theta)$, obzirom da npr. područje $V(\theta^o)$ zadovoljava pretpostavku poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^=$.)

Valja uočiti da teorem 3.1. i komentar koji mu slijedi daju uvjete poluneprekinutosti odozgo funkcija Lagrange-ovih multiplikatora. Međutim, ti uvjeti ne osiguravaju njihovu neprekinutost, tj. i uz njihovo zadovoljenje ova preslikavanja ne moraju biti poluneprekinuta odozdo.

Već je spomenuto da ukoliko model (K, θ) zadovoljava Slaterov uvjet u θ^o, tada, zbog $P^=(\theta^o) = 0$ i $F^=(\theta^o) = R^n$, ograničena Lagrange-ova funkcija postaje klasična Lagrange-ova funkcija (pripadnu funkciju Lagrange-ovih multiplikatora označavamo s $U(\theta)$). Tada je također moguće za proizvoljno područje stabilnosti $S(\theta^o)$ odabrati okolinu $N\theta^o$)od θ^o. U tom slučaju, dakle, ako konveksan model (K, θ) zadovoljava Slaterov uvjet u $\theta = \theta^o$, teorem 3.1. daje sljedeći klasičan rezultat (vidjeti npr. [03], [04], a također i [10]):

Korolar 3.1.

Promatra se konveksan model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\theta = \theta^o$. Pretpostavimo da u $\theta = \theta^o$ vrijedi Slaterov uvjet. Ako je funkcija Lagrange-ovih multiplikatora $U(\theta)$ jedinstvena za svako θ iz neke okoline $N(\theta^o)$ od θ^o, tada je $U(\theta)$ neprekinuta u θ^o.

4. KARAKTERIZACIJA OPTIMALNOSTI U KONVEKSNIM MODELIMA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA

4.1. *Optimalan ulaz i optimalna realizacija modela MP*

Već je rečeno da se proces optimalizacije modela matematičkog programiranja svodi na stabilno preturbiranje modela (K, θ) iz nekog početnog stanja $\theta = \theta^o$, u svrhu poboljšavanja optimalne vrijednosti funkcije cilja. U tom kontekstu, pojam optimalnosti promatra se na nivou različitom od uobičajenog. Dok se u matematičkom programiranju pod optimalnim rješenjima programa podrazumijeva ono dopustivo rješenje $x^* \in R^n$, koje optimalizira funkciju cilja $f^o(x)$ na čitavom dopustivom skupu, optimalizacija modela matematičkog programiranja pojam optimalnosti veže uz *ulaz* modela (K, θ). Naime, unutar parametarskog prostora R^s (odnosno njegovog relevantnog podskupa I) kao *optimalan ulaz* odabire se onaj vektor ulaznih podataka (parametara) $\theta^* \in I$ koji na skupu I optimalizira (minimizira) funkciju optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\theta)$, odnosno za koji pripadno optimalno rješenje $\tilde{x}(\theta^*)$ daje najbolju (najnižu) vrijednost funkcije cilja $f^o(\tilde{x}\theta^*), \theta^*$.

Obzirom na lokalni karakter stabilnih perturbacija na koje se optimalizacija modela MP ograničava, moguća je karakterizacija samo lokalno optimalnog ulaza, definiranog na slijedeći način:

Definicija 4.1.

Promatra se konveksni model (K, θ) u nekom stanju $\theta = \theta^* \in I$. Neka je $S(\theta^*)$ područje stabilnosti u θ^*. Ako je

$$\tilde{f}(\theta^*) \leq \tilde{f}(\theta), \tag{4.1}$$

za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, gdje je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^*, tada je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$.

Pripadni matematički program (K, θ^*) je lokalno optimalna realizacija modela (K, θ), a pripadna vrijednost $\tilde{f}(\theta^*) = f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*)$ je lokalno optimalna vrijednost modela (K, θ).

4.2. *Potpuna karakterizacija optimalnog ulaza*

U ovom odeljku daju se uvjeti koji su istovremeno i nužni i dovoljni za lokalnu optimalnost nekog ulaza $\theta^o \in I$ na nekom proizvoljnom području stabilnosti od θ^* konveksnog modela (K, θ). Ovi uvjeti izraženi su pomoću nejednakosti sedla ograničene Lagrange-ove funkcije $L_*^<(x, u; \theta)$, definirane u prethodnom poglavlju (izraz (3.3), gdje je donji indeks "o" zamijenjen s "*" u skladu s oznakom ulaza na koji se ta funkcija odnosi), te pomoću preslikavanja $F^=_*(\theta)$[9] Podsjetimo se da je $\varphi(\theta) = \text{card}\, P^<(\theta)$ i $R_+^{q(\theta^*)}$ nenegativan ortant od $R^{q(\theta^*)}$. Karakterizacija slijedi (vidi [15] i [26]):

Teorem 4.1.

Promatra se konveksni model (K, θ) s realističnom funkkcijom cilja u neom $\theta^* \in I$. Neka je $\tilde{x}(\theta^*)$ pripadno optimalno rješenje i neka je $S(\theta^*)$ proizvoljno područje stabilnosti u θ^*. Tada je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$ ako, i samo ako, postoji okolina $N(\theta^*)$ i nenegativna vektorska funkcija

$$U_*^<: N(\theta^*) \cap S(\theta^*) \to R_+^{q(\theta^*)}$$

takva da, za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, vrijedi

$$L_*^<(\tilde{x}(\theta^*), u; \theta^*) \leq L_*^<(\tilde{x}(\theta^*), u_*^<(\theta^*); \theta^*) \leq L_*^<(x, u_*^<(\theta); \theta) \tag{4.2}$$

za svako $u \in R_+^{q(\theta^*)}$ i svako $x \in F^=_*(\theta)$.

Napomena: Obzirom na značaj dokaza ovog teorema za razumijevanje slijedećeg odeljka, ovdje je izložen čitav dokaz. U dokazu se koristi

[9] Preslikavanje $F^=_o(\theta)$ (ovdje s prilagođenim indeksom "*") definirano je u prvom dijelu rada, u okviru analize stabilnosti modela (K, θ). Da se podsjetimo, ovo preslikavanje definirano je kao:

$$F^=_*(\theta) = \{x \in R^n : f^i(x, \theta) \leq 0,\ i \in P^=(\theta^*)\}.$$

teorem o separaciji hiperravninama[10] i nužan uvjet stabilnih perturbacija (vidjeti prvi dio pregleda).

Dokaz: (nužnost)

Bez gubitka oćenitosti, može se pretpostaviti da prvih $q(\theta^*)$ indeksa iz P sačinjava $P^{<}(\theta^*)$. Sada se za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$ konstruiraju slijedeća dva skupa u $R_+^{(b\theta^*)+1}$:

$$K_1(\theta) = \left\{ y : y \geq \begin{bmatrix} f^o(x,\theta) \\ f^1(x,\theta) \\ \cdots \\ f^{q(\theta^*)}(x,\theta) \end{bmatrix} \quad za\ barem\ jedno\ x \in F^{=}_{*}(\theta) \right\}, \tag{4.3}$$

$$K_2 = \left\{ y : y < \begin{bmatrix} \tilde{f}(\theta^*) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4.4}$$

Obzirom da je $F^{=}_{*}(\theta)$ konveksan skup (jer su funkcije $f^i(x,\theta)$, $i \in P$, konveksne po x) i $K_1(\theta)$ je konveksan. Također je i K_2 konveksan skup (očigledno). Nadalje, vrijedi

$$K_1(\theta) \cap K_2 = 0 \quad \forall \theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*), \tag{4.5}$$

jer bi u suprotnom postojali nizovi $\theta^k \in S(\theta^*)$, $\theta^k \to \theta^*$, i $x^k \in F^{=}_{*}(\theta^k)$, takvi da je

$$f^o(x^k,\theta^k) < \tilde{f}(\theta^*), \tag{4.6}$$

$$f^i(x^k,\theta^k) < 0, \quad i \in P^{<}(\theta^*). \tag{4.7}$$

To bi značilo da je $x^k \in F(\theta^k)$, što je, zbog (4.6), kontradiktorno pretpostavci da je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$.

Prema tome, vrijedi (4.5) i skupove $K_1(\theta)$ i K_2 moguće je separirati tj. postoje vektor $a(\theta) = [a_i(\theta)] \in R^{q(\theta^*)}$, ne nula-vketor, i skalar $\alpha(\theta)$, takvi da je

$$a(\theta)^T y^1 \geq \alpha(\theta) \geq a(\theta)^T y^2, \tag{4.8}$$

za svako $y^1 \in K_1(\theta)$ i $y^2 \in K_2$. Očigledno je da je $a(\theta) \geq 0$. Izbor

[10] Teorem o separaciji hiperravninama kaže da ako za dva neprazna konveksna skupa, K_1 i K_2, u R^n, vrijedi $K_1 \cap K_2 = 0$, tada postoji vektor $u \in R^n$ različit od nule i skalar α za koje vrijedi:

$$u^T x^1 \leq \alpha \leq u^T x^2 \quad \forall x^1 \in clK_1 \ i\ \forall x^2 \in clK_2.$$

$$y^1 = \begin{bmatrix} f^o(x, \theta) \\ f^1(x, \theta) \\ \cdots \\ f^{q(\theta^*)}(x, \theta) \end{bmatrix}, \quad za\ neko\ x \in F^=_*\theta)\ i\ y^2 = \begin{bmatrix} \tilde{f}\theta^*) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

u (4.8) daje:

$$a_o(\theta)\, \tilde{f}(\theta^*) \leq a_o(\theta)\, f^o(x, \theta) + \sum_{i \in P^<(\theta^*)} a_i(\theta)\, f^i(x, \theta), \tag{4.9}$$

za svako $x \in F^=(\theta)$.

Koeficijent $a_o(\overset{*}{\theta})$ *mora biti striktno pozitivan jer bi u suprotnom izraz (4.9) postao*

$$\sum_{i \in P^<(\theta^*)} a_i(\theta)\, f^i(x, \theta) \geq 0 \tag{4.10}$$

za svako $x \in F^=_*(\theta)$, *pa tako i za* $\hat{x} \in rel\ int\ F(\theta)$[11] *(sjetimo se da je* $F(\theta) \subseteq F^=_*(\theta)$*). Međutim, za takvo* $\hat{x}$ *vrijedi*

$$f^i(\hat{x}, \theta) < 0, \quad i \in P^<(\theta^*) \tag{4.11}$$

zbog $P^<(\theta^*) \subseteq P^<(\theta)$ *za svako* $\theta \in S(\theta^*)$, *dovoljno blizu* θ^* *(nužan uvjet stabilnih perturbacija). Sada je* $a_i(\theta) \geq 0$, $i \in P^<(\theta^*)$, *ne svi nula, zajedno s (4.11), kontradiktorno (4.10).*

Dakle, $a_o(\theta) > 0$ *i moguće je podijeliti izraz (4.9) s* $a_o(\theta)$. *Uvedimo notaciju:*

$$[U_*^<(\theta)]_i = \frac{a_i(\theta)}{a_o(\theta)}, \quad i \in P^<(\theta^*),$$

čime dobivamo:

$$f(\theta^*) \leq L_*^<(x, U_*^<(\theta); \theta), \tag{4.12}$$

za svao $x \in F^=(\theta)$. *Za konkretni izbor* $\theta = \theta^*$ *i* $x = \tilde{x}(\theta^*) \in \tilde{F}(\theta^* \subseteq F(\theta^*) \subseteq F^=_*(\theta^*)$, *izraz (4.12) postaje:*

---

[11] "rel int F(θ)" označava relativnu unutrašnjost skupa F(θ) tj.

$x \in rel\ int\ F(\theta) \Leftrightarrow f^i(x, \theta) < 0, i \in P^<(\theta)$.

$$\sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_*^{<}(\theta^*)]_i f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) \geq 0, \tag{4.13}$$

što, zajedno s $\tilde{x}(\theta^*) \in F(\theta^*)$ *i* $U_*^{<}(\theta^*) \geq 0$, *daje:*

$$\sum_{i \in P^{\leqslant}(\theta^*)} [U_*^{<}(\theta^*)]_i f^i((\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) = 0, \tag{4.14}$$

odnosno, zajedno s (4.12),

$$L_*^{<}(\tilde{x}(\theta^*), U_*^{<}(\theta^*); \theta^*) \leq L_*^{<}(x, U_*^{<}(\theta); \theta). \tag{4.15}$$

Lijeva nejednakost za svako $u \in R_+^{q(\theta^*)}$ *izravna je posljedica dopustivosti* $\tilde{x}(\theta^*)$ *i izraza (4.14).*

(Dovoljnost):

Pretpostavimo da vrijedi nejednakost sedla za svako $x \in F_*^{=}(\theta)$ *i za svako* $u \in R_+^{q(\theta^*)}$. *Izbor* $u = 0$ *daje:*

$$\sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_*^{<}(\theta^*)]_i f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) \geq 0. \tag{4.16}$$

Međutim, dopustivost $\tilde{x}(\theta^*)$ *i* $U_*^{<}\theta^* \geq 0$ *daje suprotnu nejednakost u (4.16), što daje (4.14), odnosno (4.12) za svako* $x \in F_*^{=}(\theta)$. *Obzirom na* $F(\theta) \subseteq F^{=}(\theta)$, *izraz (9.12) vrijedi i za svako* $x \in F(\theta)$. *Konkretan izbor* $x = \tilde{x}(\theta)$ *u (9.12) daje* $\tilde{f}(\theta^*) \leq \tilde{f}(\theta)$ *za svako* $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$ *čime je teorem dokazan.*

Karakterizacija optimalnosti ulaza izložena u teoremu 4.1. predstavlja, u stvari, poopćenje karakterizacije optimalnosti pomoću ograničene sedlaste točke u konveksnom programiranju (odeljak 2.3, teorem 2.3). Zaista, ova potonja predstavlja specifičan slučaj teorema 4.1, u kojem je ulaz konstantan, tj. $\theta \equiv \theta^*$ (uočimo da je tada $F^{=}_*(\theta) \equiv F^{=}(\theta) \equiv F^{=}$). Stepenicu niže u obuhvatu je karakterizacija optimalnosti pomoću klasične sedlaste točke koja pokriva slučaj kada je (uz $\theta \equiv \theta^*$) $P^{=}(\theta^*) \equiv P^{=} = 0$, također obuhvaćena teoremom 4.1.

Osim pokrivanja ovih već poznatih uvjeta optimalnosti konveksnih programa, teorem 4.1. može poslužiti i kao osnova za izvođenje novih uvjeta optimalnosti za modele MP. Na primjer, korišten je pri određivanju uvjeta optimalnosti diferencijabilnih konveksnih modela MP, prikazanih u odeljku 4.4.

Teorem 4.1. ilustriran je slijedećim promjerom:

Primjer 4.1.

Promatra se slijedeći konveksan model:

$$\min f^0(x) = x$$

$$\begin{aligned} &\text{p.o.}\\ &f^1(x, \theta) = \quad -\theta x \le 0\\ &f^2(x, \theta) = \quad \theta - x \le 0\\ &f^3(x, \theta) = -\theta(\theta - x) \le 0\\ &\theta \in I = [\theta, \infty). \end{aligned}$$

Za $\theta^* = 0$, područje stabilnosti je $S(\theta^*) = \{\theta : \theta \ge 0\}$ jer je $F(\theta) = \{x : x \ge 0\}$ za svako $\theta \ge 0$ (za $\theta < 0$, $F(\theta)$ postaje prazan skup). Nadalje, $P^=(\theta^*) = \{1, 3\}$ pa je $F^=_*(\theta) = R_+$ (nenegativan ortant od R) za svako $\theta > 0$, te, obzirom da je za $\theta^* = 0$, $\tilde{x}(\theta^*) = 0$, nejednakost sedla (4.2) postaje (za $\theta \ge 0$):

$$0 + u \cdot 0 \le 0 + [u_*^<(\theta^*)]_2 \cdot 0 \le x + [u_*^<(\theta)]_2 \cdot (\theta - x),$$

za svako $u \ge 0$ i svako $x \ge 0$.

Ova nejednakost zadovoljena je za izbor $[u_*^<(\theta)]_2 = 1$ za svako $\theta \in S(\theta^*)$. (Uočimo da $[u^{*<}(\theta^*)]_2$ nije jednoznačno određen već može biti bilo koji nenegativan broj.)

Prema tome, za $\theta^* = 0$ zadovoljena je tvrdnja teorema 4.1, pa je θ^* optimalan ulaz ovog modela obzirom na područje stabilnosti $S(\theta^*) = \{\theta : \theta \ge 0\}$.

U gornjem primjeru se, prema teoremu 4.1, ispitivala egzistencija nenegativne vektorske funkcije $u_*^<(\theta)$ koja zadovoljava nejednakost sedla (4.2) za svako $x \in F^=_*(\theta)$. Međutim, lako je provjeriti da funkcija $u_*^<(\theta)$ odabrana u tom primjeru zadovoljava nejednakost sedla i za svako $x \in F^=(\theta) = R$. Moglo bi se stoga zaključiti da je moguće karakterizirati optimalnost nekog ulaza θ^* i pomoću preslikavanja $F^=(\theta)$ (u pravilu lakše odredivog). Međutim, to nije moguće ukoliko nisu zadovoljeni neki dodatni uvjeti na unutrašnju strukturu ograničenja modela (K, θ) u $\theta = \theta^*$, o čemu govori slijedeći odjeljak.

4.3. *Karakterizacija optimalnosti ulaza pomoću preslikavanja $F^=: \theta \to F^=(\theta)$*

4.3.1. Ulazna kvalifikacija ograničenja

Na kraju prethodnog odeljka postavljeno je pitanje mogućnosti korištenja preslikavanja $F^=: \theta \to F^=(\theta)$, umjesto preslikavanja $F^=_*: \theta \to F^=_*(\theta)$, u karakterizaciji optimalnosti ulaza konveksnog modela (K, θ). Iz dokaza teorema 4.1. vidljivo je da bezuvjetna primjena ovog preslikavanja u tom kontekstu nije moguća. Naime, ovaj dokaz bazira se na činjenici da je presjek skupova $K_1(\theta)$ i K_2, definiranih u (4.3) i (4.4), prazan skup, što znači da sistem

$$f^o(x,\theta) < \tilde{f}(\theta^*)$$

$$f^i(x,\theta) < 0, \quad i \in P^<(\theta^*) \tag{4.17}$$

$$x \in F^=_*(\theta)$$

nema rješenje za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, gdje je $S(\theta^*)$ proizvoljno područje stabilnosti u θ^*. Ova tvrdnja zaista stoji za $x \in F^=_*(\theta)$, ali ne (u općem slučaju) i za $x \in F^=(\theta)$ ili $x \in F^=(\theta^*)$, što pokazuje slijedeći primjer (preuzet iz [14]):

Primjer 4.2.

Promatra se slijedeći linearni model:

$$\min f^o(x) = x$$

$$\begin{aligned} &\text{p.o.} \\ &f^1(x,\theta) = \quad -\theta x \le 0, \\ &f^2(x,\theta) = -\theta - x \le 0, \\ &\quad \theta \in I = [0,1], \end{aligned}$$

u okolini $\theta^* = 0$. Moguće je specificirati $S(\theta^*) = M(\theta^*) = I$. Nadalje, $\tilde{x}(\theta^*) = 0$, $P^<(\theta^*) = \{2\}$ i $F^=(\theta^*) = F^=(\theta) = R$ za $\theta \in I$. Prema tome, sistem (4.17) (uz zamjenu $F^=_*(\theta)$ s $F^=(\theta)$ ili $F^=(\theta^*)$) postaje:

$$\begin{aligned} &x < 0, \\ &-\theta - x < 0, \\ &x \in R. \end{aligned}$$

Za svako $\theta > 0$ ovaj sistem je konzistentan. (Nasuprot tome, originalan sistem (4.17) nije konzistentan jer je $F^=_*(\theta) = R_+$ za svako $\theta > 0$. Također je lako provjeriti da $\theta^* = 0$ zaista jest optimalan ulaz.)

Dakle, karakterizacija optimalnosti ulaza pomoću preslikavanja $F^=$ nije moguća bez dodatnog uvjeta na strukturu modela koji osigurava

$$K'_1(\theta) \cap K_2 = 0, \tag{4.5a}$$

gdje je $K'_1(\theta)$ definiran kao $K_1(\theta)$ uz zamjenu $F^=_*(\theta)$ s $F^=(\theta^*)$, ili

$$K''_1(\theta) \cap K_2 = 0, \tag{4.5b}$$

gdje je $K''_1(\theta)$ definiran kao $K_1(\theta)$ uz zamjenu $F^=_*(\theta)$ s $F^=(\theta)$. Očigledno se radi o dva različita uvjeta, obzirom da su skupovi $F^=(\theta^*)$ i $F^=(\theta)$

općenito neusporedivi. Ovi uvjeti nazivaju se ulazna kvalifikacija ograničenja (UKO), odnosno, modificirana ulazna kvalifikacija ograničenja (MUKO), prema njihovoj ulozi u konveksnom modeliranju (u smislu pojednostavljivanja nužnih uvjeta optimalnosti), analognoj ulozi kvalifikacije ograničenja (npr. Slaterovog uvjeta) u konveksnom programiranju.

Definicija 4.2.

Uvjet na ograničenja konveksnog modela (K, θ), promatrango u okolini nekog $\theta^* \in I$, sa svojstvom da za svako $\theta \in N(\theta) \cap S(\theta^*)$, gdje je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^* a $S(\theta^*)$ proizvoljno područje stabilnosti u θ^*, sistem

$$
(U, \theta) \qquad
\begin{aligned}
& f^o(x, \theta) < \tilde{f}(\theta^*), \\
& f^i(x, \theta) < 0, \quad i \in P^{<}(\theta^*), \\
& x \in F^{=}(\theta^*),
\end{aligned}
$$

nema rješenja, naziva se ulazna kvalifikacija ograničenja (UKO). Ako se sistem (U, θ) zamijeni sistemom

$$
(MU, \theta) \qquad
\begin{aligned}
& f^o(x, \theta) < \tilde{f}(\theta^*), \\
& f^i(x, \theta) < 0, \quad i \in P^{<}(\theta^*), \\
& x \in F^{=}(\theta),
\end{aligned}
$$

pripadni uvjet naziva se modificirana ulazna kvalifikacija ograničenja (MUKO).

Na nekim konkretnim područjima stabilnosti ovi su uvjeti uvijek zadovoljeni. Na primjer, ako je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na područje stabilnosti $W(\theta^*)$ ili $V_1(\theta^*)$, uvijet UKO je uvijek zadovoljen (jer je $W(\theta^*) \subseteq V_1(\theta^*)$ a za $V_1(\theta^*)$ $x \in F^{=}(\theta^*)$ implicira $x \in F^{=}(\theta)$, što zajedno sa svojstvom $R_3(\theta^*)$ daje $x \in F^{=}(\theta)$, a iz dokaza teorema 4.1. je poznato da ne postoji $x \in F^{=}(\theta)$ koje zadovoljava (U, θ)). Međutim, to općenito ne vrijedi za veća područja stabilnosti kao što su $Z(\theta^*)$ ili $H(\theta^*)$. Uvjet koji osigurava zadovoljenje UKO obzirom na $H(\theta^*)$, tzv. UKO1, je slijedeći:

"Za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap H(\theta^*)$, gdje je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^*, i za svako $x \in F^{=}(\theta^*)$, takve da je

$$f^i(x, \theta) < 0, \quad i \in P^{<}(\theta^*),$$

slijedi da je

$$f^i(x, \theta^*) \leq 0, \quad i \in P^{<}(\theta^*).\text{"}$$

Naime, uz ovaj uvjet svako x koje zadovoljava sistem (U, θ) za neko $\theta \in N(\theta^*) \cap H(\theta^*)$ vrijedi $x \in F(\theta^*)$, odnosno (zbog $F(\theta^*) \subseteq F^{=}_{*}(\theta^*)$), $x \in F^{=}_{*}(\theta^*)$, a poznato je da takvo x ne postoji.

Nadalje, uvjet koji osigurava zadovoljenje UKO obzirom na područja stabilnosti $M(\theta^*)$ i $V(\theta^*)$, tzv. UKO2 je slijedeći:

"Za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap \{M(\theta^*) \cup V(\theta^*)\}$, gdje je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^*, i za svako $x \in F^{=}(\theta^*)$ vrijedi:

$$f^i(x, \theta^*) \leq f^i(x, \theta), \quad i \in P^{<}(\theta^*)."$$

Ovaj uvjet također osigurava da zadovoljenje sistema (U, θ) uvjetuje $x \in F(\theta^*)$, što, za $\theta \in N(\theta^*) \cap M(\theta^*)$ implicira $x \in F(\theta)$, odnosno $x \in F^{=}_{*}(\theta)$, a za $\theta \in N(\theta^*) \cap V(\theta^*)$ implicira (preko $F(\theta^*) \subseteq F^{=}(\theta^*)$) $x \in F^{=}(\theta)$ te, zajedno sa svojstvom $R_4(\theta^*)$ opet daje $x \in F^{=}_{*}(\theta)$.

Jedna od situacija u kojima je uvjet UKO uvijek zadovoljen je i situacija u kojoj funkcije ograničenja $f^i(x, \theta)$, $i \in P^{<}(\theta^*)$, ne ovise o θ (tzv. UKO3). Slaterov uvjet (obzirom na θ^*) također je UKO jer je tada $P^{=}(\theta^*) = 0$, odnosno $F^{=}_{*}(\theta) = R^n$ za svako $\theta \in I$.

Nadalje, za svako područje stabilnosti koje je podskup od $R_2(\theta^*)$, uvjet MUKO je uvijek zadovoljen pa se svojstvo skupa $R_2(\theta^*)$ tj.

$$"f^i(x, \theta \leq 0 \;\; \forall\, x \in F^{=}(\theta), \; i \in P^{=}(\theta^*) \setminus P^{=}(\theta)",$$

kao uvjet koji implicira MUKO, naziva MUKO1. Zatim, obzirom da je $R_1(\theta^*) \subseteq R_2(\theta^*)$, i uvjet

$$"P^{=}\theta) = P^{=}(\theta^*)",$$

tzv. MUKO2, također implicira MUKO. Specifičan slučaj MUKO2 je situacija u kojoj funkcije ograničenja $f^i(x, \theta)$, $i \in P^{=}(\theta^*)$ ne ovise o θ (tzv. MUKO3).

4.3.2. Karakterizacija optimalnosti ulaza uz zadovoljenje ulazne kvalifikacije ograničenja

Sada je moguće dati jednostavniju varijantu teorema 4.1, tj. nužne i dovoljne uvjete optimalnosti ulaza pomoću preslikavanja $F^{=}$. Nužni uvjeti koji koriste UKO, odnosno MUKO, dani su u [13], [14] i [27]:

Teorem 4.2.

Promatra se konveksni model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\theta^* \in I$. Neka je $\tilde{x}(\theta^*)$ pripadno optimalno rješenje. Pretposta-

vimo da je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na područje stabilnosti $S(\theta^*)$ i da je zadovoljena ulazna kvalifikacija ograničenja (UKO) u θ^* obzirom na $S(\theta^*)$. Tada postoji okolina $N(\theta^*)$ od θ^* i nenegativna vektorska funkcija

$$U_{\bullet}^{>}: N(\theta^*) \cap S(\theta^*) \to R_+^{\,q(\theta^*)}$$

takva da, za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, vrijedi:

$$L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*), u; \theta^*) \leq L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*), U_{\bullet}^{<}(\theta^*); \theta^* \leq L_{\bullet}^{<}(x, U_{\bullet}^{<}(\theta); \theta) \qquad (4.18)$$

za svako $u \in R_+^{q(\theta^*)}$ i svako $x \in F^{=}(\theta^*)$.

Teorem 4.3.

Promatra se konveksni model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\theta^* \in I$. Neka je $\tilde{x}(\theta^*)$ pripadno optimalno rješenje. Pretpostavimo da je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na područje stbailnosti $S(\theta^*)$ i da je modificirana ulazna kvalifikacija ograničenja zadovoljena u θ^* obzirom na $S(\theta^*)$. Tada postoji okolina $N(\theta^*)$ od θ^* i nenegativna vektorska funkcija

$$U_{\bullet}^{<}: N(\theta^*) \cap S(\theta^*) \to R_+^{\,q(\theta^*)};$$

takva da, za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap; S(\theta^*)$, vrijedi:

$$L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*), u; \theta^*) \leq L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}\,\theta^*), U_{\bullet}^{<}(\theta^*); \theta^*) \leq L_{\bullet}^{<}(x, U_{\bullet}^{<}(\theta); \theta) \qquad (4.19)$$

za svako $u \in R^{q\,\theta^*)}$ i svako $x \in F^{=}(\theta^*)$.

Napomena: dokazi ovih dvaju teorema analogni su dokazu teorema 4.1, jer uvjet zadovoljenja UKO, odnosno MUKO osiguravaju (4.5a), odnosno (4.5b), respektivno.

Primjer 4.3.

Model iz primjera 4.2, (odjeljak 4.3.1) pokazuje da je pretpostavka zadovoljenja UKO (u teoremu 4.2), odnosno MUKO (u teoremu 4.3) zaista nužna za egzistenciju pripadnih funkcija Lagrange-ovih multiplikatora $U_{\bullet}^{<}$ i $U_{\bullet}^{<}$. Naime, može se provjeriti da u tom modelu $\theta^* = 0$ jest lokalno optimalan ulaz obzirom na područje stabilnosti $S(\theta^*) = 0,1$ jer, uz $\tilde{x}(\theta^*) = 0$, nejednakost sedla (4.2) postaje (za $\theta > 0$, dovoljno blizu θ^*):

$$0 + u_2 \cdot 0 \leq 0 + [u_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_2 \cdot 0 \leq x + [u_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_2\,(-\theta - x),$$

za svako $u \in R_+$ i svako $x \in R_+$, odnosno

$$x + [u_{*}^{<}(\theta)]_2(-\theta-x) \geq 0,$$

za svako $x \in R_+$.

$$u_{*}^{<}(\theta) = [u_{*}^{<}(\theta)]_2 = \begin{cases} 1 & za\ \theta = 0 \\ 0 & za\ \theta > 0 \end{cases}$$

zadovoljava ovu nejednakost. Nasuprot tome, za $\theta > 0$, dovoljno blizu θ^*, ne postoji nenegativni multiplikator $[U_{*}^{<}(\theta)]_2$ koji zadovoljava

$$x + [U_{*}^{<}(\theta)]_2(-\theta-x) \geq 0 \quad \forall\, x \in F^{=}(\theta^*) = R$$

(analogno ni $[U_{*}^{<}(\theta^*)]_2$ zbog $F^{=}(\theta) = R$), što pokazuje da teoremi 4.2, odnosno 4.3, nisu nužni uvjeti optimalnosti ulaza ukoliko nisu zadovoljeni UKO, odnosno MUKO, respektivno).

Obzirom da su skupovi $F^{=}(\theta^*)$ i $F^{=}(\theta)$ općenito neusporedivi čak i na nekim područjima stabilnosti (npr. $M(\theta^*)$), zadovoljenje UKO ne implicira zadovoljenje MUKO (ne vrijedi ni obrat) te su stoga teoremi 4.2. i 4.3. zaista različiti. Slijedeći primjer to ilustrira:

Primjer 4.4.

Promatra se linearni model

$$\min f^o(x) = -x_2$$

p. o.

$$f^1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0,$$

$$f^2(x, \theta) = -x_1 - \theta x_2 + 1 \leq 0,$$

$$f^3(x) = -x_1 \leq 0,$$

$$f^4(x) = -x_2 \leq 0,$$

u $\theta^* = 1$. Kao područje stabilnosti identificirano je $S(\theta^*) = [1, \infty)$. Lako je provjeriti da je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$. Nadalje, obzirom da je $\tilde{x}(\theta^*) = 0,1)^T$,

$$P^{=}(\theta) = \begin{cases} \{1, 2\} & za\ \theta = 1 \\ 0 & za\ \theta > 1' \end{cases} \qquad F^{=}(\theta) = \begin{cases} \{(x_1, x_2)^T : x_1 + x_2 = 1\} & za\ \theta = 1 \\ R^2 & za\ \theta > 1 \end{cases}$$

$P_i^{<}(\theta^*) = \{3, 4\}$, ograničena Lagrange-ova funkcija je:

$$L_{*}^{>}(x, u; \theta) = -x_2 + u_3(-x_1) + u_4(-x_2).$$

Sada nejednakost sedla (4.18) iz teorema 4.2. (uz supstituciju $x_2 = 1 - x_1$) postaje:

$$-1 - u_4 \leq -1 - [U_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_4 \leq -1 - [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_4 + (1 - [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_3 +$$

$$+ [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_4)\, x_1$$

za svako $u_4 \in R_+$ i svako $x_1 \in R$. Lako se može provjeriti da vektorska funkcija konstanta

$$U_{\bullet}^{<}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zadovoljava ovu nejednakost. U stvari, činjenica $P_{\bullet}^{<}(\theta^*) = \{3, 4\}$ pokazuje da ovaj model zadovoljava UKO3 pa je teorem 4.2. primjenjiv. Međutim, sistem (MU, θ):

$$\begin{aligned} -x_2 &< -1, \\ -x_1 &< \ \ 0, \\ -x_2 &< \ \ 0, \end{aligned}$$

zadovoljava svako $x > (0,1)^T$ pa stoga pretpostavka teorema 4.3. o zadovoljenju MUKO u θ^* ne stoji. Zaista, iako θ^* jest lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$, nije moguće naći nenegativnu vektorsku funkciju $U_{\bullet}^{<}(\theta)$ takvu da (za $\theta > 1$, θ dovoljno blizu θ^*) zadovoljava

$$-1 - u_4 \leq -1 - [U_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_4 \leq - [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_3 \cdot x_1 - (1 + [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_4)\, x_2$$

za svako $u_4 \geq 0$ i svako $(x_1, x_2)^T \in R^2$.

Dakle, teoremi 4.2. i 4.3. su zaista različiti nužni uvjeti lokalno optimalnog ulaza.

Ukoliko je zadovoljena modificirana ulazna kvalifikacija ograničenja, egzistencija okoline $N(\theta^*)$ i nenegativne vektorske funkcije $U_{\bullet}^{>}(\theta)$ iz teorema 4.3. je također i dovoljan uvjet da bi θ^* bio lokalno optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$ (dokaz ove tvrdnje može se naći u [15]). Analognu tvrdnju za teorem 4.2. moguće je izreći samo ukoliko je $S(\theta^*)$ takvo područje stabilnosti za koje je $F^=(\theta) = F^=(\theta^*)$ za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$ (npr. $V_2(\theta^*)$ ili $V_3(\theta^*)$).

Već je spomenuto da su na nekim konkretnim područjima stabilnosti (npr. $W(\theta^*)$ ili $V_1(\theta^*)$) ulazna i modificirana ulazna kvalifikacija ograničenja zadovoljena za svaki konveksan model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u θ^*. Primjer 4.2. (odjeljak 4.3.1) pokazuje da ti uvjeti ne moraju biti pzdovoljeni na području $M(\theta^*)$. Međutim, za ovo području $M(\theta^*)$. Međutim, za ovo područje stabilnosti iz teorema 4.2 se ipak može izostaviti pretpostavka zadovoljenja UKO ako se ograničena Lagrange-ova funkcija $L_{\bullet}^{<}$ zamijeni slijedećom funkcijom:

$$L_{\bullet}^{<}(x, u; \theta) = f^o(x, \theta) + \sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} u_i f^i(x, \theta^*), \tag{4.20}$$

čime se u stvari postiže da funkcije ograničenja f^i, $i \in P^{<}(\theta^*)$ ne ovise o θ, što je ekvivalentno uvjetu UKO3. S druge strane, $F(\theta^*) \subseteq F(\theta)$ (po definiciji $M(\theta^*)$) omogućava primjenu ove funkcije u određivanju nužnih uvjeta optimalnosti ulaza θ^*.

Primjer 4.5.

U primjeru 4.2, odnosno 4.3, zamjenom funkcije $L^{<}_{*}$ s $\mathcal{L}^{<}_{*}$, dobiva se slijedeći nužan uvjet optimalnosti ulaza $\theta^* = 0$:

$$x + [\lambda^{<}_{*}(\theta)]_2(-x_1) \geq 0$$

za svako $x \in R$, gdje je $\lambda^{<}_{*}(\theta)$ pripadna funkcija „Lagrange-ovih" multiplikatora. Ovaj uvjet je zadovoljen izborom $[\lambda^{<}_{*}(\theta)]_2 = 0$ za svako $\theta \in [0, 1]$. Dakle, uz ovu supstituciju, teorem 4.2. zaista potvrđuje optimalnost $\theta^* = 0$.

Daljnje pojednostavljenje nužnog uvjeta optimalnosti ulaza konveksnog modela (K, θ) iskazanog teoremom 4.2 (također i onih iskazanih teorema 4.1. i 4.3) odnosi se na difrencijabilne konveksne modele (K, θ), o čemu govori slijedeći odjeljak.

4.4. Karakterizacija optimalnosti ulaza diferencijabilnih konveksnih modela MP

U prethodnom poglavlju ovog rada promatrane su tri funkcije Lagrange-ovih multiplikatora te uvjeti koji osiguravaju njihovu poluneprekidnost odozgo (teorem 3.1). U ovom odjeljku, gdje se govori o karakterizaciji optimalnosti za diferencijabilne konveksne modele tj. modele (K, θ) u kojima su funkcije f^i, $i \in \{0\} \cup P^{<}(\theta^*)$, diferencijabilne funkcije (po θ), ovo svojstvo potrebno je da bi se simplificirali uvjeti optimalnosti izloženi u prethodnom odjeljku.

Kao što se vidi iz teorema 3.1. i komentara koji mu slijedi, poluneprekinutost odozgo preslikavanja $u^{<}_{*}(\theta)$ i $U^{<}_{*}(\theta)$ uvjetovana je poluneprekinutošću odozdo preslikavanja $F^{=}(\theta)$ i $F^{=}_{*}(\theta)$, respektivno. To dovodi do mogućnosti primjene rezultata iz teorema 4.1. i 4.3. (iz prethodnog odjeljka) u kontekstu diferencijabilnih modela samo na određenim područjima stabilnosti koja osiguravaju ta svojstva. Međutim, obzirom da za poluneprekinutost odozgo preslikavanja $\mathcal{U}^{<}_{*}(\theta)$ nisu potrebne nikakve dodatne pretpostavke, teorem 4.2. moguće je prilagoditi diferencijabilnim modelima na proizvoljnom području stabilnosti $S(\theta^*)$.

U tu svrhu potrebno je konstruirati slijedeći skup:

$$B(\theta^*) = \left\{ \frac{\theta - \theta^*}{\|\theta - \theta^*\|} : \theta \in S(\theta^*), \theta \neq \theta^* \right\}, \tag{4.21}$$

podskup jedinične sfere centrirane u θ^*. S $B'(\theta^*)$ označimo skup svih graničnih točaka od $B(\theta^*)$ kada $\theta \to \theta^*$, $\theta \in S(\theta^*)$, $\theta \neq \theta^*$.

Nadalje, sa $B'(\theta)\}^+$ označimo polarni skup od $B'(\theta^*)$, tj.

$$\{B'(\theta^*)\}^+ = \{\theta : \theta^T u \geq 0 \ \forall \ u \in B'(\theta^*)\}. \tag{4.22}$$

Nužan uvjet optimalnog ulaza slijedi:

Teorem 4.4.

Promatra se konveksan model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u nekom $\theta^* \in I$. Pretpostavimo da je θ^* lokalno optimalan ulaz obzirom na proizvoljno područje stabilnosti $S(\theta^*)$ i da je zadovoljena ulazna kvalifikacija ograničenja u θ^*. Neka je pripadna ograničena sedlasta točka $\{\tilde{x}(\theta^*), U_*^{<}(\theta^*)\}$ jedinstvena i neka su funkcije f^i, $i \in \{0\} \cup P^{<}(\theta^*)$, diferencijabilne. Tada je

$$\nabla_\theta L_*^{<}(\tilde{x}(\theta^*), U_*^{<}(\theta^*); \theta \,|_{\theta=\theta^*} \in \{B'(\theta^*)\}^+. \tag{4.23}$$

Dokaz:

Ako se u izrazu (4.18) u teoremu 4.2 odabere $x = \tilde{x}(\ ^*)$ (što je moguće zbog $F(\theta^*) \subseteq F^=(\theta^*)$, dobiva se

$$\tilde{f}(\theta^*) \leq f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta) + \sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_*^{<}(\theta)]_i f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta) \tag{4.24}$$

za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, gdje je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^*. Dodavanjem

$$-\sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_*^{<}(\theta)]_i f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) \geq 0$$

na obje strane nejednakosti, dobiva se (nakon preuređenja):

$$f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta) - f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) + \sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_*^{=}(\theta)]\, f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta) -$$

$$-f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*)] \geq 0 \tag{4.25}$$

Nadalje, ako je I proizvoljna točka u $B'(\theta^*)$, tada je:

$$I = \lim_{k \to \infty} \frac{\theta^k - \theta^*}{\|\theta^k - \theta^*\|} \tag{4.26}$$

za neki niz $\theta^k \in S(\theta^*)$, $\theta^k \to \theta^*$. *Međutim, obzirom na komentar koji slijedi teorem 3.1. (3. poglavlje), za taj niz (ili njegov podniz) postoji granična točka niza* $\{U_{\bullet}^{<}(\theta^k)\}$, *takva da je*

$$\lim_{k\to\infty} [U_{\bullet}^{<}(\theta^k)]_i \in [U_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_i, \quad i \in P^{<}(\theta^*). \tag{4.27}$$

Zbog diferencijabilnosti funkcija f^i, $i \in \{0\} \cup P^{<}(\theta^*)$, *izraz (4.25) moguće je (razvojem u Taylorov red) zapisati kao*

$$\nabla_\theta f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta)|_{\theta=\theta^*}(\theta - \theta^*) + \sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_{\bullet}^{<}(\theta)]_i \nabla_\theta f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta)|_{\theta=\theta^*}(\theta - \theta^*) + 0(\|\theta - \theta^*\|^2) \geq 0$$

Sada, dijeljenjem (4.28) s $\|\theta - \theta^*\|$, *supstitucijom* $\theta = \theta^*$ *i puštanjem* $k \to \infty$, *dobiva se (uz supstituciju (4.26)):*

$$(\nabla_\theta f^o(\tilde{x}(\theta^*), \theta)^T_{\theta=\theta^*} I + \sum_{i \in P^{<}(\theta^*)} [U_{\bullet}^{<}(\theta^*)]_i [\Delta_\theta f^i(\tilde{x}(\theta^*), \theta]^T_{\theta=\theta^*} I \geq 0, \tag{4.29}$$

(uočimo da je, zbog jedinstvenosti sedlaste točkke, izraz (4.27) dan s jednakošću), odnosno,

$$(\nabla_\theta L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*) \cdot U_{\bullet}^{<}(\theta^*); \theta)^T_{\theta=\theta^*} I \geq 0. \tag{4.30}$$

Sada, obzirom da je I *proizvoljan vektor iz* $B'(\theta^*)$, *dobiva se (po definiciji polarnog skupa):*

$$\nabla_\theta L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*), U_{\bullet}^{<}(\theta^*); \theta)\Big|_{\theta=\theta^*} \in \{B'(\theta^*)\}^+. \tag{4.31}$$

Na isti način mogu se difrencijabilnim konveksnim modelima (K, θ) prilagoditi i teoremi 4.1. i 4.4; međutim, da bi se osigurala egzistencija graničnih točaka nizova $\{u_{\bullet}^{<}(\theta^k)\}$ i $\{U_{\bullet}^{<}(\theta^k)\}$, jednakih $u_{\bullet}^{<}(\theta^*)$ i $U_{\bullet}^{<}(\theta^*)$ respektivno, potrebno je "suziti" proizvoljno područje stabilnosti. Za preslikavanje $u_{\bullet}^{<}(\theta)$ potrebno je promatrati slijedeći podskup proizvoljnog područja stabilnosti $S(\theta^*)$:

$$S_1(\theta^*) = \{\theta: F(\theta^*) \subseteq F_{*}^{=}(\theta^*)\} \cap S(\theta^*), \tag{4.32}$$

odnosno, za preslikavanje $U_{\bullet}^{<}(\theta)$, podskkup:

$$S_2(\theta^*) = \{\theta: F(\theta^*) \subseteq F^{=}(\theta^*)\} \cap S(\theta^*), \tag{4.33}$$

radi osiguranja poluneprekinutosti odozdo preslikavanja $F^{=}_{*}(\theta^*)$ i $F^{=}(\theta^*)$ respektivno.

Teorem 4.4. daje nužan uvjet optimalnosti ulaza diferencijabilnih konveksnih modela (K, θ). Za dovoljan uvjet izoliranog lokalno optimalnog ulaza potrebno je, uz pretpostavke teorema 4.4, pretpostaviti i da skup $\{B'(\theta^*)\}^+$ ima nepraznu unutrašnjost.[12] Tada je

$$\nabla_\theta L_{\bullet}^{<}(\tilde{x}(\theta^*), U_{\bullet}^{<}(\theta^*); \theta|_{\theta=\theta^*} \in int\{B'(\theta^*)\}^+, \tag{4.34}$$

dovoljan uvjet izoliranog lokalno optimalnog ulaza diferencijabilnog konveksnog modela (K,θ) obzirom na proizvoljno područje stabilnosti $S(\theta^*)$ (za detaljniju informaciju vidjeti [16] ili [21]). Analogni rezultat može se dobiti i za funkcije Lagrange-ovih multiplikatora $u_{\bullet}^{<}(\theta)$ i $U_{\bullet}^{<}(\theta)$.

Treba uočiti da, ukoliko je za diferencijabilan model (K, θ) zadovoljen Slaterov uvjet za $\theta = \theta^*$, kao područje stabilnosti $S(\theta^*)$ u teoremu 4.4. može se odabrati okolina $N(\theta^*)$ od θ^*. Tada $B(\theta^*)$ postaje jedinična sfera centrirana u θ^*, pa je $\{B'(\theta^*)\}^+ = \{0\}$, što, uz $P_{\bullet}^{<}(\theta^*) = P$ daje

$$\nabla_\theta L(\tilde{x}(\theta^*), u(\theta^*); \theta)|_{\theta=\theta^*} = 0, \tag{4.35}$$

gdje je L klasična Lagrange-ova funkcija (sjetimo se da Slaterov uvjet također predstavlja jednu od ulaznih kvalifikacija ograničenja te da osigurava jedinstvenost sedlaste točke).

Dovoljan uvjet u ovom slučaju nema smisla jer je

$$int\{B'(\theta^*)\}^+ = int\{0\} = 0.$$

Ilustrativan primjer za teorem 4.4. može se naći u [16, 21].

4.5. Eksplicitna reprezentacija optimalnog ulaza intervalnog linearnog modela

U poslijednjem odjeljku ovog poglavlja prikazan je način eksplicitne reprezentacije optimalnog ulaza za posebnu klasu linearnih modela, tzv. intervalne linearne modele (IL, θ):

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{p.o.} \\ &a \le Ax \le b, \end{aligned}$$

gdje je $c \in R^n$, $a \in R^m$, $b \in R^m$ i $A \in R^{m\times n}$.

---

[12] Unutrašnjost polarnog skupa nekog skupa K definira se kao $int\, K^+ = \{u: 0 \ne x \in K \Rightarrow u^T x > 0\}$.

Pretpostavlja se da granice intervala a i b mogu varirati unutar nekih granica tolerancije $[a^d, a^g]$ i $[b^d, b^g]$ respektivno, tj. $a^d \leq a \leq a^g$, $b^d \leq b \leq b^g$, dok su c i A fiksni. Intencija je da se odredi optimalan izbor a i b unutar granica tolerancije.

Uz pretpostavku da je rang matrice A jednak m, moguće je taj problem rijeešiti analitički i odrediti eksplicitnu reprezentaciju optimalnog ulaza a^* i b^*.

Prvo, definirajmo vižeznačno preslikavanje η: $R^m \times R^m \times R^m \to R^m$: za neke vektore $x = [x_i]$, $y = [y_i]$ i $z = [z_i]$ u R^m, vektorska funkcija $\eta(x, y; z)$ ima komponente η_i, definirane na slijedeći način:

$$\eta_i = \begin{cases} x_i & za\ z_i < 0 \\ y_i & za\ z_i > 0, \\ [x_i, y_i] & za\ z_i = 0 \end{cases} \tag{4.36}$$

pri čemu je

$$[x_i, y_i] = \{\lambda x_i + (1 - \lambda) y_i : \lambda \in [0, 1]\},$$

konveksna kombinacija x_i i y_i.

Nadalje, definirajmo $\eta^-(x, y; w) = [\eta^-_i]$ i $\eta^+(x, y; w) = [\eta^+_i]$ kako slijedi:

$$\eta^-_i = \begin{cases} x_i & za\ w_i < 0 \\ [x_i, y_i] & za\ w_i \geq 0, \end{cases} \tag{4.37}$$

i

$$\eta^+_i = \begin{cases} x_i & za\ w_i > 0 \\ [x_i, y_i] & za\ w_i \leq 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Napokon, s A^+ označimo Moore-Penrose-ovu generaliziranu inverznu matricu od matrice A.[13]

Teorem 4.5.

Promatra se intervalni linearni model (IL, θ) s realističnom funkcijom cilja unutar granica tolerancije od a i b. Neka je $r(A) = m$. Tada je optimalni ulaz modela (IL, θ) a^* i b^* dan kao

---

[13] Generalizirana inverzna matrica neke matrice A reda mxn je matrica T koja zadovoljava matričnu jednadžbu ATA = A. Moore-Penrose-ova generalizirana inverzna matrica definirana je kao jedinstveno rješenje sistema matričnih jednadžbi:

$$AXA = A,$$
$$XAX = X,$$
$$(AX)^T = AX,$$
$$(XA)^T = XA.$$

Metoda za njeno izračunavanje može se naći npr. u [05].

$$a^* = \eta^+ (a^d, a^g; (-A^+)^T c), \tag{4.39}$$

$$b^* = \eta^- (b^d, b^g; (-A^+)^T c). \tag{4.40}$$

Pripadno optimalno rješenje je

$$\tilde{x} = A^+ \eta \, (a^*, b^*; (-A^+)^T c) + N(A),^{14} \tag{4.41}$$

a pripadna optimalna vrijednost funkcije cilja je

$$\tilde{f} = c^T (A^+ \eta \, (a^d, b^g; (-A^+)^T c)). \tag{4.42}$$

Napomena: dokaz ovog teorema i ilustrativni primjer mogu se naći u [16], [17].

5. NUMERIČKE METODE

U prvom dijelu ovog pregleda izložene su skice nekih numeričkih metoda koje se mogu koristiti u prvoj etapi procesa stabilnee optimalizacije konveksnih modela MP — lokalnoj analizi stabilnosti modela (K, θ). U ovom dijelu pregleda daje se prikaz (u osnovnim crtama) metode za poboljšavanje tekućeg ulaza (II etapa) za užu klasu modela (K, θ), tzv. bikonveksne modele, koja u sebi uključuje i III etapu — testiranje optimalnosti tekućeg ulaza. Na kraju poglavlja, data je i osnovna ideja za konstrukciju metode za određivanje "najprihvatljivije" stabilne putanje koja vodi do lokalno optimalnog ulaza (IV etapa).

5.3. *Određivanje stabilne putanje od polaznog do optimalnog ulaza bi-konveksnog diferencijabilnog modela MP*

Metoda za određivanje lokalno stabilne putanje iz početnog ulaza koja poboljšava optimalnu vrijednost funkcije cilja $\tilde{f}(\theta)$ i (u idealnom slučaju vodi ka optimalnom ulazu do sada je ustanovljena samo za užu klasu konveksnih modela (K, θ), tzv. bi-konveksne modele, tj. model u kojima su funkcije $f^i(x, \theta)$, $i \in 0 \cup P$ konveksne ne samo po x već i po θ. Ova metoda je opadajućeg tipa s linearnim stupnjem konvergencije. Putanja po kojoj optimalna vrijednost funkcije cilja opada određuje se pomoću tzv. formule za marginalnu vrijednost.

Istaknimo ovdje da putanja između dve ulaza, θ^1 i θ^2 na području stabilnosti u θ^1 nije nužno stabilna za izlaznu trojku na čitavoj stazi. Neprekinutost je garantirana samo u nekoj okolini θ^1 koja može biti znatno manja od područja stabilnosti (ne zaboravimo da se u drugoj

[14] N(A) označava nula-prostor matrice A.

etapi radi o *lokalnoj* analizi stabilnosti). U općem slučaju problem koliko daleko se može ići duž putanje u $S(\theta^1)$ a da izlaz bude neprekinut, ozbiljan je i treba se tretirati ad hoc. (Naravno, u linearnom modelu s ograničenjima $A(\theta)x \leq b$, $a_{ij}(\theta) > 0$, $b_i > 0$, svako $a_{ij} \rightarrow \varepsilon > 0$ povlači globalnu neprekinutost.)

5.3.1. Formula za marginalnu vrijednost

U literaturi postoje različiti iskazi formule za marginalnu vrijednost čiju egizstenciju osiguravaju različte preitpostavke na model (K, θ). Na primjer, u [03] data je formula za marginalnu vrijednost uz zadovoljenje Slaterovog uvjeta. Ovdje je dat iskaz te formule za bi-konveksni model (K, θ) uz nešto blaže pretpostavke (za detalje vidjeti [19], [21]). Jedna od pretpostavki je da model (K, θ) zadovoljava jedno od dva svojstva iskazana u definicijama 5.1. i 5.2:

Definicija 5.1.

Promatra se bi-konveksni model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u $\theta = \theta^o \in I$. Pretpostavimo da je pripadna sedlasta točka $\{\tilde{x}(\theta^o), \tilde{u}_i(\theta^o): i \in P^<(\theta^o)\}$ jedinstvena. Tada model zadovoljava "svojstvo $U(\theta^o)$" u θ^o obzirom na područje $V_3(\theta^o) \cap I$ ako, za svaku fiksnu putanju, takvu da vrijedi:

$$\theta \in V_3(\theta^o) \cap I;\ \theta \rightarrow \theta^o \Rightarrow \tilde{u}_i(\theta) \rightarrow \tilde{u}_i(\theta^o),\ i \in P^<(\theta^o) \tag{5.4}$$

postoje granične točke

$$\lim_{\substack{\theta \rightarrow \theta^o \\ \theta \in V_3(\theta^o) \cap I}} \frac{\tilde{u}_s(\theta^o) - \tilde{u}_s(\theta)}{\| \theta^o - \theta \|},\ s \in P(\tilde{x}(\theta^o)). \tag{5.5}$$

Definicija 5.2.

Promatra se bi-konveksni model (K, θ) koji zadovoljava pretpostavke iz definicije 5.1. Neka za svaki niz $\{\theta^k\} \in V_3(\theta^o) \cap I$, $\theta^k \rightarrow \theta^o$, za koji $\tilde{u}_i(\theta^k) \rightarrow \tilde{u}_i(\theta^o)$, $i \in P^<(\theta^o)$, vrijedi:

$$\{P^<(\theta^k) \cap P(\tilde{x}(\theta^o))\} \subseteq P^<(\theta^o).$$

Tada model (K, θ) zadovoljava "svojstvo $IND(\theta^o)$" u θ^o ako za svaku fiksnu putanju za koju vrijedi (5.4), postoje granične točke:

$$\lim_{\substack{\theta \to \theta^o \\ \theta \in V_3(\theta^o) \cap I}} \frac{f^i(\tilde{x}(\theta^o), \theta)}{\| \theta^o - \theta \|}, \; i \in P(\tilde{x}(\theta^o)). \tag{5.6}$$

Formula za marginalnu vrijednost slijedi:

Teorem 5.1.

Promatra se bi-konveksni model (K, θ) s realističnom funkcijom cilja u $\theta = \theta^o \in I$. Neka je pripadna sedlasta točka $\{\tilde{x}(\theta^o), \tilde{u}_i(\theta^o), i \in P^{<}(\theta^o)\}$ jedinstvena i neka je zadovoljeno svojstvo $U(\theta^o)$ ili svojstvo $IND(\theta^o)$ u θ^o. Nadalje, neka su funkcije $f^i(x, \theta)$, $i \in \{\theta\} \cup P^{<}(\theta^o)$ diferencijabilne po θ na $V_3(\theta^o) \cap I \cap N(\theta^o)$, gdje je $N(\theta^o)$ neka okolina od θ^o i neka su derivacije $[f^i(x, \theta)]'_{\theta=\theta^o}$ $i \in \{0\} \cup P^{<}(\theta^o)$, neprekinute po x u $\tilde{x}(\theta^o)$. Tada, za svaku fiksnu putanju $\theta \to \theta^o$, $\theta \in V_3(\theta^o) \cap I$, za koju postoji

$$I = \lim_{\substack{\theta \to \theta^o \\ \theta \in V_3(\theta^o) \cap I}} \frac{\theta - \theta^o}{\| \theta - \theta^o \|}, \tag{5.7}$$

vrijedi:

$$\lim_{\substack{\theta \to \theta^o \\ \theta \in V_3(\theta^o) \cap I}} \frac{\tilde{f}(\theta) - \tilde{f}(\theta^o)}{\| \theta - \theta^o \|} = I^T [L^{<}_{*}(\tilde{x}(\theta^o), \bar{u}(\theta^o); \theta)]'_{\theta = \theta^o} \tag{5.8}$$

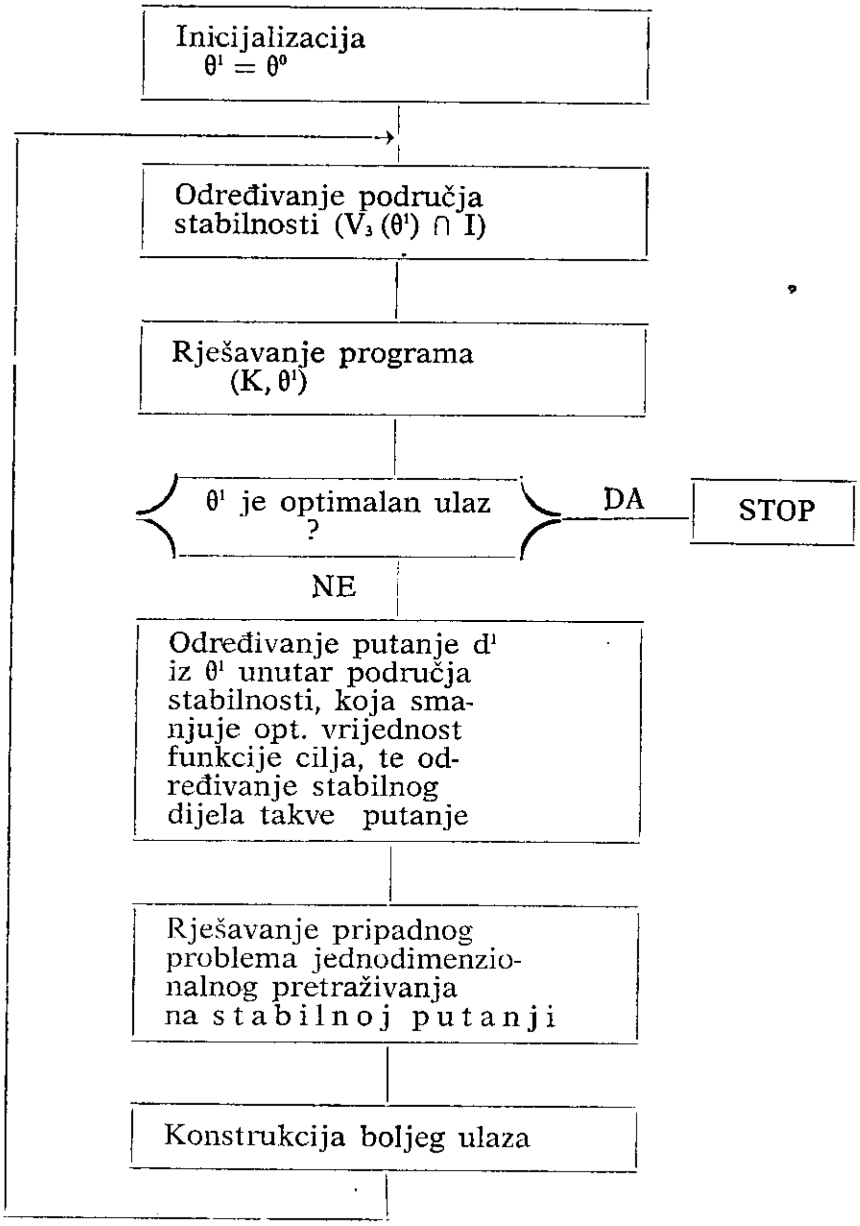
Dokaz ovog teorema može se naći u [19]. Međutim, formula (11.8) ne mora vrijediti izvan područja stabilnosti $V_3(\theta^o)$ (ilustrativni primjer može se naći u [21]).

5.3.2. Metoda

Metoda za određivanje stabilne putanje duž koje se poboljšava vrijednost funkcije optimalne vrijednosti, sastoji se (uz inicijalizaciju) od šest osnovnih koraka, prikazanih u slijedećem dijagramu 5.7. (na narednoj strani).

U prvom koraku metode određuje se područje stabilnosti $V_3(\theta^1)$ (ili neki njegov podskup), za što je moguće koristiti metodu izloženu u odeljku 5.2.1. Na dosadašnjem stupnju razvoja ove metode nije moguće koristiti druga područja stabilnosti jer formula za marginalnu vrijednost ne mora nužno vrijediti izvan područja $V_3(\theta^o)$.

Dijagram 5.7.



U drugom koraku, rješava se pripadni konveksni program (K, θ^1) da bi se odredila sedlasta točka $\{\tilde{x}(\theta^1), \tilde{u}(\theta^1) : i \in P^{<}(\theta^0)\}$. Za rješavanje ovog programa može se koristiti npr. metoda proširene Lagrange-ove funkcije.[15]

---

[15] Za konveksni program (K) proširena Lagrange-ova funkcija definira se kao

$$L(x, u, \alpha) = f^0(x) + \sum_{i \in P^{<}} (\psi_+(\alpha f^i(x) + u_i) - \psi(u_i)),$$

gdje je $\psi_+(t) = \psi(t)$ za $t \geq 0$, odnosno $\Psi_+(t) = 0$ za $t < 0$, i $\alpha > 0$. $\psi(t)$ je kaznena funkcija definirana kao nenegativna konveksna funkcija, dvostruko diferencijabilna na R sa striktno rastućom prvom derivacijom.

Treći korak odnosi se na testiranje optimalnosti tekućeg ulaza θ^l (III etapa procesa optimalizacije modela MP). U tu svrhu moguće je koristiti neku od karakterizacija optimalnosti izloženih u 4. poglavlju ovog rada. (Obzirom da je na području stabilnosti $V_3(\theta^o)$ uvijek zadovoljena ulazna kvalifikacija ograničenja (UKO) pogodno je koristiti karakterizaciju iskazanu teoremom 4.2.)

U četvrtom koraku metode, ukoliko tekući ulaz θ^l nije optimalan, pomoću formule za marginalnu vrijednost određuje se stabilna putanja d^l po kojoj se lokalno poboljšava funkcija optimalne vrijednosti (traži se takva putanja koja zadovoljava

$$l^T[L_*^{<}(\tilde{x}(\theta^l), \tilde{u}(\theta^l); \theta)]'_{\theta=\theta^1} < 0\ L).$$

U petom koraku, na stabilnom dijelu gornje putanje, rješava se problem jednodimenzionalnog pretraživanja. Na primjer, ukoliko je funkcija optimalne vrijednosti striktno konveksna funkcija po θ, za linarnu putanju $\theta^1 + \alpha d^1$, rješava se slijedeći program (po α):

$$\text{Min } f^o(\tilde{x}(\theta^1), \theta^1 + \alpha d^1)$$

p.o.

$$\theta^1 + \alpha d^1 \in V_3(\theta^1) \cap I,$$

$$\alpha > 0.$$

(U ovom koraku, na nekoliko konkretnih praktičnih slučajeva, uspješno se izvršilo pretraživanje metodom zlatnog pravila (vidjeti [08], [02]).)

U šestom koraku konstruira se "bolji" ulaz koji služi kao polazno stanje za novu iteraciju. Na primjer, ako je rješenje programa iz prethodnog koraka α_l, tada je "bolji" ulaz:

$$\theta^{l+1} = \theta^l + \alpha_l d^l.$$

Ova metoda ilustrirana je jednostavnim primjerom:

Primjer 5.5.

Promatra se konveksan model:

$$\text{Min } (\theta_2(x_1 - x_2) + x_3 - \theta^2_1)$$

p.o. :

Metoda koja koristi ovu funkciju bazira se na teoremu o korespondenciji između optimalnog rješenja programa (K) i ograničene stacionarne točke ove funkcije, definirane kao točke $(\bar{x}, \bar{u}) \in R^{n \times q}$ ($q = \text{card } P^{<}$) takve da je $\bar{x} \in F^{=}$, $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}, \alpha) \in [D^{=}_P = (\bar{x})]^+$ i $\nabla_u L(\bar{x}, \bar{u}, \alpha) = 0$.

Ova metoda u stvari predstavlja poopćenje metode proširene (klasične) Lagrange-ove funkcije, originalno ustanovljene za konveksne modele koji zadovoljavaju Slaterov uvjet. (Prikaz metode u koracima i teorema na kojima se bazira mogu se naći u [25].)

$-\theta_1 x_1 + x^2_3 \leq 0,$
$x_1 \qquad \leq 0,$
$\theta_1 x_2 - 1 \leq 0,$
$\theta_2 x_3 \leq 0,$

u početnom stanju $\theta^o = (1, 2)^T$. Ovdje je $P^= (\theta^o) = \{1, 2, 4\}$ i $F^= (\theta^o) = \{0, x_2, 0)^T : x_2 \in R\}$, pa je $V_3(\theta^o) = \{\theta : \theta_1 > 0\}$. U drugom koraku rješava se program:

Min $(2(x_1 - x_2) + x_3 - 1)$
p.o. :
$-x_1 + x^2_3 \leq 0,$
$\mathbf{x_1 \leq 0},$
$x_2 - 1 \leq 0,$
$2x_3 \leq 0.$

Metoda proširene ograničene Lagrange-ove funkcije daje sistem:

$\alpha(x_2 - 1) + u_3 = 2,$
$\alpha(x_2 - 1) = 0,$

odnosno, sedlastu točku $\tilde{x}(\theta^o) = (0, 1, 0)^T$ i $\tilde{u}_3(\theta^o) = 2$. Optimalna vrijednost funkcije cilja u početnom stanju je $\tilde{f}(\theta) = -3$.

U trećem koraku, lako je, korištenjem teorema 5.2, pokazati da θ^o nije optimalan ulaz.

U četvrtom koraku konstruira se ograničena Lagrange-ova funkcija (u sedlastoj točki):

$$L^{<}_{o}(\tilde{x}(\theta^o), \tilde{u}(\theta^o); \theta) = \theta_2 - \theta^2_1 - 2\theta_1 - 2$$

odnosno, određuje se njen gradijent (po θ) u θ^o

$$[\nabla_\theta L^{<}_{o}(\tilde{x}(\theta^o), \tilde{u}(\theta^o); \theta)]'_{\theta=\theta^o} = \begin{bmatrix} -2\theta_1 - 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\theta=\theta^o} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na primjer, linearna putanja $\theta^o + \alpha d^o$ uz $d^o = (1, 0)^T$ i $\alpha \in (0, 1)$, osigurava perturbiranje modela unutar $V_3(\theta^o) \cap I$ a istovremeno daje vrijednost limesa iz (5.7) $1 = (1, 0)^T$, što daje:

$$1^T [\nabla_\theta L^{<}_{o}(\tilde{x}(\theta^o), \tilde{u}(\theta^o); \theta)]'_{\theta=\theta^o} = -4 < 0.$$

To znači da perturbacije duž tako odabrane putanje smanjuju optimalnu vrijednost funkcije cilja.

U petom koraku rješava se program:

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } (-(1+\alpha)^2) \\ \text{p.o.} & \\ & \alpha \in (0,1] \end{array}$$

koji daje rješenje $\alpha_o = 1$. Prema tome, u šestom koraku konstruira se "bolji" ulaz na slijedeći način:

$$\theta^1 = \theta^o + d^o = (2,2)^T.$$

Uočimo da ovaj ulaz određuje optimalno rješenje $\tilde{x}(\theta^1) = (0,1/2,0)$ koje daje optimalnu vrijednost funkcije cilja $\tilde{f}(\theta^1) = -5$.

5.4. *Određivanje najprihvatljivije stabilne putanje od polaznog do optimalnog ulaza modela (K, θ)*

Općenito, za konveksni model (K, θ) postoji više međusobno različitih stabilnih putanja koje vode od polaznog ulaza θ^o do lokalno optimalnog ulaza θ^* (ili više različitih lokalno optimalnih ulaza, o čemu je već bilo govora). Poslijednja etapa procesa optimalizacije modela matematičkog programiranja odnosi se upravo na određivanje "najprihvatljivije" između svih takvih stabilnih putanja, pri čemu se kao kriterij "prihvatljivosti" koristi neki prikladan eksterni kriterij (minimalni troškovi, najmanja duljina putanje itd.).Metoda za rješavanje ovog problema još nije razrađena ali osnovna ideja jest u korištenju računa varijacija. U tom kontekstu, provodi se dodatna parametrizacija modela:

$$\theta = \theta(t) = [\theta_k(t)], \quad t_o \leq t \leq t_1.$$

Problem određivanja najprihvatljivije stabilne putanje svodi se na rješavanje slijedećeg problema:

$$\text{Min (Max)} \int_{t_o}^{t_1} F(\theta_1(t), \ldots, \theta_p(t), \dot\theta_1(t), \ldots \dot\theta_p(t))$$

p.o.

$$\begin{array}{l} \Phi(\theta_1(t_1), \ldots, \theta_p(t_1)) \leq 0, \\ \varphi(\theta_1(t_o), \ldots, \theta_p(t_o)) = 0, \\ \theta_1(t), \ldots, \theta_p(t)) \in S \end{array}$$

gdje je F odabrani kriterij "prihvatljivosti" stabilne putanje (o čijem izboru ovisi i izbor tipa optimizacije) a S je skup svih stabilnih putanja od θ^o do θ^*. Ograničenja Φ i φ odnose se na granice integracije t_o i t_1, koje mogu biti fiksne ili varijabilne (ukoliko θ^* nije jednoznačno određen). U općem slučaju (ukoliko pri nekoj od "usputnih" realizacija modela stabilna putanja mijenja smjer) radi se o problemu računa varijacija u kojem argument funkcionala nije iz klase C^2, tj.

mogući su "uglovi" koje doživljavaju promatrane stabilne putanje. Dodatni problem je i određivanje skupa svih stabilnih putanja S koji očigledno smije sadržavati samo funkcije koje pripadaju istoj klasi, čime se ovaj način rješavanja problema izbora "najprihvatljivije" stabilne putanje ograničava. Otvoreno pitanje je i način razrješavanja problema bifurkacije područja stabilnosti i različitih lokalno optimalnih ulaza koje nije moguće povezati pomičnom gornjom granicom integracije.

Iz rezultata prikazanih u ovom poglavlju vidljivo je da numerički dio procesa stabilne optimalizacije modela MP nije još dovoljno dobro razrađen. Međutim, do sada je ovaj postupak uspješno primjenjen u rješavanju nekoliko netrivijalnih praktičnih problema (npr. problem optimalne proizvodnje u tvornici tekstila i tvornici kave, vidjeti [02]), a trenutno se intenzivno radi i na rješavanju otvorenih teorijskih problema iz ovog područja te se uskoro mogu očekivati potpuniji rezultati i zaokruživanje optimalizacije modela MP u konzistentnu cjelinu.

6. SPECIFIČNI PROBLEMI OPTIMALIZACIJE MODELA MATEMATIČKOG PROGRAMIRANJA

6.1. Komplementarni problem optimalizacije modela MP

Do sada je konveksan model (K, θ) promatran kao crna kutija gdje je ulaz predstavljao vektor parametara $\theta \in I$, koji je generirao izlaz $\{F(\theta), \tilde{F}(\theta), \tilde{f}(\theta)\}$. Polazeći od nekog ulaza θ° određivala se stabilna putanja (u smislu neprekinutosti promjene izlaza) koja vodi do lokalno optimalnog ulaza θ^*. Komplementarni pristup je da se specificira stanje sistema x unutar nekog eksplicite zadanog skupa $X \subseteq R^n$ te da se to stanje promatra kao ulaz modela koji generira izlaz $\{F(x), \tilde{F}(x), \tilde{f}(x)\}$, pri čemu je:

$F(x) = \{\theta \in R^p : f^i(x, \theta) \leq 0,\ i \in \mathcal{P} \cap I$ — dopustiv skup,

$\tilde{\theta}(x)$ — optimalno rješenje,

$\tilde{F}(x) = \{\tilde{\theta}(x)\}$ — skup optimalnih rješenja i

$\tilde{f}(x) = f^{\circ}(x, \tilde{\theta}(x))$ — funkcija optimalne vrijednosti.

Uz pretpostavku da svako fiksno stanje modela $x \in X$ određuje optimalni izbor parametara $\tilde{\theta}(x)$, moguće je formulirati model MP uz zamijenjene uloge θ i x. U tom kontekstu, područje stabilnosti i stabilne putanje određuje se unutar skupa X (a ne kao do sada, unutar skupa I). Ovako postavljen problem optimizacije modela MP naziva se *komplementarni problem optimalizacije modela MP.*

Uputno je promotriti povezanost originalnog i komplementarnog problema optimalizacije modela MP. Ako pretpostavimo da sistem trenutno funkcionira s nekim početnim vektorom parametara θ^o i početnim rješenjem x^o (ne nužno optimalnim za $\theta = \theta^o$) i ako s θ^* označimo lokalno optimalni ulaz originalnog problema (s pripadnim optimalnim rješenjem $\tilde{x}(\theta^*)$) te s x^* lokalno optimalno rješenje komplementarnog problema optimalizacije istog modela MP (s pripadnim optimalnim rješenjem $\tilde{\theta}(x^*)$), tada se definira slijedeća veza između ta dva problema:

Definicija 6.1.

Za originalni i komplementarni problem optimalizacije modela MP kaže se da su kompatibilni obzirom na početni par ulaza θ^o i x^o ako postoji par lokalno optimalnih ulaza θ^* i x^* ovih problema respektivno i ako za barem jedan par pripadnih optimalnih rješenja, $\tilde{x}(\theta^*)$ i $\tilde{\theta}(x^*)$, vrijedi:

$$x^* = \tilde{x}(\theta^*) \text{ i } \theta^* = \tilde{\theta}(x^*).$$

U protivnom, za ove probleme kaže se da su inkompatibilni.

Ako je model stabilan na čitavim I i X (npr. ako je zadovoljen Slaterov uvjet za svako $\theta \in I$ i za svako $x \in X$), uz pretpostavku da su X i I kompaktni skupovi, tada su originalni i komplementarni problem optimalizacije modela MP kompatibilni.

Primjer modela (K, θ) za koji su ova dva problema inkompatibilna iako su X i I kompaktni skupovi, može se naći u [21].

Ideja koja stoji iza formulacije komplementarnog problema optimalizacije modela MP jest da se njegovim povezivanjem s originalnim problemom stvori jedinstven pristup optimalizaciji modela MP i time upotpuni njihovo razumijevanje.

6.2. Vremenski ovisna optimalizacija modela MP

Problem optimalizacije modela MP u kojem je vektor parametara funkcija vremena tj. $\theta = \theta(t)$, $t \in [t_o, t_*]$, naziva se problem *vremenski ovisne optimalizacije modela MP.* Onovni cilj ovih problema jest određivanje stabilne putanje, unutar zadane klase funkcija $\theta = \theta(c, t)$, gdje je $c \in R^s$ neki vektor konstantni, koja lokalno optimalizira funkciju optimalne vrijednosti $\tilde{f}(\theta^*(t_*))$ u konačnom trenutku t_*. Ovaj problem u prvom koraku rješava se kao "običan" problem optimalizacije modela MP, bez eksplicitnog uključivanja vremenske dimenzije da bi se u drugom koraku optimalnoj putanji $\theta^o \rightarrow \theta^*$ dodala vremenska dimenzija. Pri tome se konstante c određuju pomoću rubnih uvjeta za svako θ^l, $l = 1, 2, \ldots$ Rješavanje problema vremenski ovisne optimalizacije modela MP ilustrirano je primjerom, (preuzetim iz [21]):

Primjer 6.1.

Promatra se linearni model:

$$\begin{aligned} & \text{Min } (\theta_2 (t) - x_2 \\ \text{p.o.} & \\ & x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ & -x_1 - \theta_2 (t) x_2 + 1 \leq 0, \\ & -x_1 \leq -\theta_1 (t) \leq 0, \\ & t \in [\theta, t^*], \end{aligned}$$

u početnom stanju $\theta^o = \theta(0) = (\theta_1(0), \theta_2(0))^T = (1, 2)^T$. Traži se stabilna putanja $\theta = \theta(t)$ koja optimalizira funkciju optimalne vrijednosti u t_* U prvom koraku (bez uključivanja vremenske dimenzije) dobiva se da je lokalno optimalni ulaz $\theta^* = (0, 1)^T$ i da je svaka putanja $\theta^o \to \theta^*$ unutar područja

$$S(\theta^o) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)^T : 0 \leq \theta_1 \leq 1, \theta_2 \geq 1\}$$

stabilna. Logičan izbor je najkraća putanja od θ^o do θ^*:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 1 + \theta_1 \end{bmatrix} 0 \leq \theta_1 \leq 1 \right\}.$$

U drugom korakku uljučuje se vremenska dimenzija, uz izbor klase linearnih funkcija:

$$\theta_i(t) = \alpha_i t + \beta_i \quad i \in \{1, 2\}.$$

Iz rubnih uvjeta $(\theta(0) = (1, 2)^T,\ \theta(t_*) = (0, 1)^T)$ dobiva se:

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{t_*},$$

odnosno, vremenski ovisna stabilna putanja:

$$\theta_1(t) = -\frac{t}{t_*} + 1, \quad \theta_2(t) = -\frac{t}{t_*} + 2, \ 0 \leq t \leq t_* .$$

Naravno, ovaj problem ne mora biti rješiv za sve klase funkcija $\theta = \theta(c, t)$ a također je moguć i različit izbor funkcija u svakom koraku iterativnog postupka optimalizacije modela MP (za različite dijelove putanje $\theta^1 \to \theta^{1+1}, 1 = 0, 1, 2, \ldots$).

Problem vremenski ovisne optimalizacije modela MP posebno je primjenjiv u dinamičkim ekonomskim modelima, kako praktičnim tako i teorijskim modelima rasta (Leontievljev dinamički model, Von Neumann-ov model i dr.).

6.3. Optimalizacija modela MP u nelinearnom programiranju

6.3.1. Nelinearni program kao konveksni model MP

Obzirom na činjenicu da optimalizacija modela MP ne samo da uključuje parametarske varijable već i optimalizira njihove vrijednosti, nameće se pitanje zašto se parametarske varijable ne tretiraju kao varijable odlučivanja i optimaliziraju u »klasičnom« smislu tj. zašto se konveksni model (K, θ) ne promatra kao matematički (ne nužno konveksni) program:

$$(P, z) \qquad \text{p. o.} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Min} f^{o}(z) \\ f^{i}(z) \leq 0, \; i \in P, \end{array}$$

gdje je $z = (x, \theta) \in R^{n+p}$.

Ovakav pristup rješavanju modela matematičkog programiranja bitno je drugačiji od stabilne optimalizacije modela MP, iz dva razloga:

prvo, vektor θ^*, dobiven očitavanjem iz rješenja gornjeg programa — $z^* = (x^*, \theta^*)$, ne mora odgovarati optimalnom ulazu dobivenim stabilnim perturbacijama modela (K, θ) iz početnog stanja θ^{o};

drugo, čak i ako se rješenja poklapaju, program (P, z) ignorira argument stabilnosti i njegovo rješenje ne daje informaciju o stabilnoj putanji od početnog do optimalnog ulaza modela (K, θ).

Međutim, moguć je suprotni tok razmišljanja:

nelinearne programe (često vrlo teško rješive) u većini slučajeva moguće je, prikladnim razdvajanjem vektora varijabli odlučivanja z na dvije grupe varijabli — x i θ, preformulirati u znatno jednostavnije konveksne (često čak i linearne) modele MP i riješiti ih pomoću optimalizacije konvekksnih modela MP. Za primjer promotrimo poznati Kuhn-Tucerov problem:

Primjer 6.2

Promatra se slijedeći nelinearni program:

$$\operatorname{Min} (-z)$$

uz ograničenja:

$$(z_1 - 1)^3 + z_2 \leq 0,$$

$$z_1 \geq 0, \; z_2 \geq 0.$$

Ovaj program ima jedinstveno optimalno rješenje $z_1^* = 1$, $z_2^* = 0$, međutim, pripadna Lagrange-ova funkcija nema sedlastu točku, što znači da se ovo optimalno rješenje ne može karakterizirati KKT uvjetima optimalnosti. Međutim, tretiranje jedne varijable, recimo z_1 kao parametarske varijable θ (z_2 ćemo, radi podvlačenja promjene koncepta preimenovati u x) prevodi ovaj nelinearni program u linearni model:

$$\text{Min } (-\theta)$$

p. o.

$$(\theta - 1)^3 + x \leq 0,$$
$$-\theta \leq 0,$$
$$-x \leq 0.$$

U $\theta^* = 1$, područje stabilnosti $S(\theta^*) = [0, 1]$ i teorem 4.1. potvrđuje optimalnost ovog »ulaza« (pripadna Lagrange-ova funkcija je:

$$L_*^{<}(x, u; \theta) = -\theta\,(1 + u_2(\theta))$$

čiju nejednakost sedla zadovoljava funkkcija Lagrange-ovih multiplikatora:

$$0 \leq u_2(\theta) \leq \frac{1-\theta}{\theta}).$$

Pripadno optimalno rješenje je $\tilde{x}(\theta^*) = 0$.

6.3.2. Strukturni optimum

U prethodnom odjeljku spomenuta ideja o tretmanu matematičkih programa kao modela MP vodi do novog koncepta „relaksirane" optimalizacije matematičkih programa. Konceptualno nov način definiranja pojma optimalnosti veže se uz pojam strukturnog optimuma, definiranog (u [20]) na slijedeći način:

Definicija 6.2.

Dopustivo rješenje z^* programa (P) naziva se strukturni optimum ako, za barem jednu podjelu varijabli $z^* = (x^*, \theta^*)$, θ^* predstavlja lokalno optimalni ulaz obzirom na neko područje stabilnosti u θ^* i ako je $x^* = \tilde{x}(\theta^*)$ pripadno optimalno rješenje.

Dakle, ideja ovog novog koncepta je u tretmanu matematičkih programa kao modela MP, pri čemu je z^* strukturni optimum ako svako poboljšanje vrijednosti funkcije cilja $\tilde{f}(\theta)$ pomakom iz θ^* rezultira u naglim skokovima pripadnog dopustivog skupa.

Karakterizacija strukturnog optimuma naravno bazira se na karakterizaciji optimalnog rješenja konveksnog programa (za x-komponente vektora z) te na karakterizaciji optimalnog ulaza konveksnog modela (za θ-komponente vektora z).

Uočimo da za $z = x$ (što je također uključeno u definiciju 6.2), pripadni strukturni optimum odgovara „klasičnom" optimumu. Prema tome, svaki „klasični" optimum je nužno i strukturni optimum. Međutim, postoje strukturni optimumi koji nisu i „klasični". Jedna takva situacija ilustrirana je primjerom:

Primjer 6.3.

Promatra se nelinearni program:

$$\text{Min } (-z_1 z_2 z_3)$$

p. o.

$$z_1 z_3 (z_1 - z_2) \leq 0$$

$$z_2 z_3 (z_1 - z_2) \leq 0$$

$$z_1 + z_3 - 2 \leq 0$$

$$z_1 \in [0, 2], z_2 \geq 0.$$

Nakon podjele varijabli — $\theta = (z_1, z_2)$ i $x = z_3$, dobiva se lokalno optimalan ulaz $\theta^* = (1, 1)^T$ (uz zadovoljenje uvjeta stabilnosti za početni ulaz $\theta^\circ = (0, 0))^T$. Pripadno optimalno rješenje je $\tilde{x}(\theta^*) = 1$, pa je $z^* = (1, 1, 1)^T$, s optimalnom vrijednošću $\tilde{f}\,\theta^*) = 1$, strukturni optimum promatranog programa (prema definiciji 6.2). Međutim, to rješenje nije i „klasični" lokalni optimum, ali smanjivanje vrijednosti funkcije cilja (dozvoljenim, obzirom na ograničenja nelinearnog programa, povećavanjem vrijednosti z_2) rezultira u kontrakciji skupa dopustivih rješenja modela (K, θ).

Strukturni optimum, osim što uzima u obzir stabilnost, prikladan je i u situacijama kada standardna karakterizacija optimalnosti nije primjenjiva (npr. u primjeru 6.2).

Za nelinearne programe kod kojih skup „klasičnih" optimalnih rješenja odgovara skupu strukturnih optimuma kaže se da su *strukturno regularni* (takvi su npr. svi konveksni programi).

Na kraju ovog odjeljka spomenuti ćemo da je pojam strukturnog optimuma bitno povezan s pojmom neprekidnosti višeznačnih preslikavanja (zbog insistiranja na stabilnosti koja se definira kao neprekinutost promjena dopustivog skupa) te da stoga različite definicije neprekinutosti vižeznačnih preslikavanja mogu generirati različite strukture optimume.

6.4. Višekriterijalna stabilna optimalizacija konveksnih modela MP

6.4.1. Višekriterijalno konveksno programiranje

Ovaj odjeljak daje neke osnovne elemente vezane uz višekriterijalne konveksne programe, kao pripremu za analizu višekriterijalnih konveksnih modela u kontekstu njihove optimaalizacije.

Općenito, višekriterijalni matematički program razlikuje se od jednokriterijalnog utoliko što se na istom dopustivom skupu simultano optimalizira više, u pravilu međusobno konfliktnih, funkcija cilja. U ovom odjeljku promatra se višekriterijalni konveksni program (VK):

$$\min \{ \phi^k (x) : k \in Q \}$$

p. o.

$$f^i (x) \leq 0, \; i \in P,$$

pri čemu su $Q = \{1, 2, \ldots, r\}$ i $P = \{1, 2, \ldots, m\}$ konačni skupovi a funkcije cilja $\Phi^k \cdot R^n \rightarrow R$, $k \in Q$, i funkcije ograničenja $f^i : R^n \rightarrow R$, $i \in P$, konveksne neprekinute funkcije. Kao i kod jednokriterijalnog konveksnog programa (K), konveksan dopustiv skup F određen je funkcijama ograničenja $f^i (x), i \in P$, tj.

$$F = \{ x \in R^n : f^i (x) \leq 0, \; i \in P \} \tag{6.1}$$

Obzirom da ne postoji (u općem slučaju) tzv. idealno rješenje tj. jedinstveno optimalno rješenje za sve funkcije cilja $\phi^k (x)$, $k \in Q$ (pojedinačno promatrano), pribjegava se određivanju takvih dopustivih rješenja koja se, obzirom na zadane kriterije, „na neki način" izdvajaju kao „bolja" od ostalih dopustivih rješenja. Najrašireniji pristup u tome je određivanje tzv. efikasnih ili Pareto-optimalnih rješenja, definiranih na slijedeći način:

Definicija 6.3.

Točka $x^* \in F$ je Pareto-optimalno (ili efikasno) rješenje programa (VK) ako ne postoji točka $x \in F$ takva da vrijedi

$$\Phi^k (x) \leq \Phi^k (x^*), \; k \in Q, \tag{6.2}$$

uz barem jednu striktnu nejednakost.

Radi konciznosti, ovdje je izložena karakterizacija Pareto-optimalnosti samo za diferencijabilne višekriterijalne konveksne programe.

Za fiksno $s \in Q$ i $x^* \in F$, uvode se slijedeći pojmovi:

$$Q^s = Q \setminus \{s\} = \{k \in Q : k \neq s\}, \tag{6.3}$$

$$F^s (x^*) = \{ x \in R^n : \Phi^k(x) \leq \Phi^k (x^*), \; k \in Q^s \}, \tag{6.4}$$

$$Q^s_= (x^*) = \{ k \in Q^s : \Phi^k (x) = \Phi^k (x^*) \quad \forall x \in F^s (x^*) \}, \tag{6.5}$$

$$Q_= (x^*) = \bigcup_{s \in Q} Q^s (x^*). \tag{6.6}$$

Može se uočiti da je

$$Q_= (x^*) = \{ k \in Q : x \in F^s (x^*) \Rightarrow \Phi^k (x) = \Phi^k (x^*) \text{ za neko } s \in Q^k \}, \tag{6.7}$$

odnosno da je

$$Q \setminus Q_= (x^*) = \{ k \in Q : \exists \hat{x} \in F^s (x^*) \ni \Phi^k (\hat{x}) < \Phi^k (x^*) \ \forall s \in Q^k \}. \tag{6.8}$$

Teorem 6.1.

Promatra se viškeriterijalni konveksni program (VK) u kojem su funkcije Φ^k, $k \in Q$ i f^i, $i \in P$, diferencijabilne. Točka $x^* \in F$ je Pareto-optimalno rješenje ako, i samo ako, ili vrijedi $Q = Q_= (x^*)$ ili postoje nenegativni brojevi

$$\lambda_k \geq 0, \ k \in Q \setminus Q_= (x^*),$$

$$\lambda_i \geq 0, \ i \in P (x^*) \setminus P^=,$$

ne svi nula, takvi da vrijedi

$$\sum_{k \in Q \setminus Q = (x^*)} \lambda_k \nabla \Phi^k (x^*) + \sum_{i \in P (x^*) \setminus P} \lambda_i \nabla f^i (x^*) \in \left\{ Q = (x^* UP = (x^*) \right\}^+. \tag{6.9}$$

Napomena: dokaz ovog teorema može se naći u [18].

Uz Pareto-optimalna rješenja, u višekriterijalnom konveksnom programiranju poznat je i problem određivanja tzv. slabih, odnosno jakih Pareto-optimalnih rješenja, čije definicije slijede:

Definicija 6.4.

Toča $x^* \in F$ je slabo Pareto-optimalno rješenje višekriterijalnog programa (VK) ako ne postoji točka $x \in F$ takva da vrijedi

$$\Phi^k (x) < \Phi^k (x^*), \ k \in Q. \tag{6.10}$$

Definicija 6.5.

Točka $x^* \in F$ je jako Paretno-optimalno rješenje višekriterijalnog programa (VK) ako postoji skalar $\beta > 0$ takav da za svako $k \in Q$ i $x \in F$ koji zadovoljavaju

$$\Phi^k(x) < \Phi^k(x^*), \tag{6.11}$$

postoji barem jedno $\underline{k} \in Q \setminus \{k\}$ sa svojstvom

$$\frac{\Phi^k(x^*) - \Phi^k(x)}{\Phi^{\underline{k}}(x) - \Phi^{\underline{k}}(x^*)} \leq \beta. \tag{6.12}$$

Jasno je da je svako jako Pareto-optimalno rješenje istovremeno i Pareto-optimalno rješenje te da je svako Pareto-optimalno rješenje istovremeno i slabo Pareto-optimalno rješenje (ako je $Q_=(x^*) = 0$, skupovi Pareto-optimalnih rješenja i slabih Pareto-optimalnih rješenja koincidiraju).

Ilustrativni primjer razlike između ova tri tipa rješenja može se naći u [08].

Naredna dva teorema karakteriziraju slabo i jako Pareto-optimalno rješenje pomoću slijedeće funkcije:

$$L(x, \lambda) = \sum_{k \in Q} \lambda_k \Phi^k(x). \tag{6.13}$$

Teorema 6.2.

Točka $x^* \in F$ je slabo Pareto-optimalno rješenje višekriterijalnog programa (VK) ako, i samo ako, postoji nenegativan vektor $\lambda^* = [\lambda_k^*]$. $k \in Q$, takav da x^* minimizira $L(x, \lambda^*)$ na skupu F.

Teorem 6.3.

Točka $x^* \in F$ je jako Pareto-optimalno rješenje višekriterijalnog programa (VK) ako, i samo ako, postoji pozitivan vektor $\lambda^* = [\lambda_k^*]$, $k \in Q$, takav da x^* minimizira $L(x, \lambda^*)$ na skupu F.

Na temelju usporedbe teorema 6.2. i 6.3. s teoremom 6.1. uočljivo je da je karakterizacija (a time i određivanje) ovih dvaju tipova rješenja znatno jednostavnija od karakterizacije Pareto-optimalnog rješenja. To je razlog da se često (pa tako i u kontekstu optimalizacije višekriterijalnih konveksnih modela matematičkog programiranja) pribjegava određivanju jakih Pareto-optimalnih rješenja umjetno Pareto-optimalnih rješenja. Tome u prilog ide i činjenica da se skup Pareto-optimalnih rješenja (u konveksnom slučaju) uvijek može dobiti kao zatvarač skupa jakih Pareto-optimalnih rješenja jer (kod konveksnih programa) svako Pareto-optimalno rješenje predstavlja graničnu točku nekog niza jakih Pareto-optimalnih rješenja.

6.4.2. Optimalizacija višekriterijalnih konveksnih modela matematičkog programiranja

U dosadašnjem dijelu pregleda prikazani su rezultati vezani uz optimalizaciju jednokriterijalnih konveksnih modela matematičkog programiranja (K, θ). U ovom poglavlju pokazuje se da su ti rezultati primjenjivi i na višekriterijalne konveksne modele MP. To je posljedica činjenice da su rezultati vezani uz stabilnost modela neovisni o funkciji cilja tj. temelje se samo na svojstvima dopustivog skupa $F(\theta)$. Nadalje, kao što će se vidjeti u ovom poglavlju, ako se promatraju samo jaka Pareto-optimalna rješenja (vidjeti definiciju 6.5. u odjeljku 6.4.1), višekriterijalni konveksni model može se jednostavno transformirati u jednokriterijalni, što omogućava primjenu i rezultata vezanih uz karakterizaciju optimalnog ulaza konveksnih modela (K, θ).

Promatra se, dakle, višekriterijalni konveksni model (VK, θ):

$$\min \{\Phi^k(x, \theta), k \in Q\}$$

p. o.

$$f^i(x, \theta) \leq 0, \; i \in P,$$

$$\theta \in I \subseteq R^p,$$

gdje su $Q = \{1, 2, \ldots, r\}$ i $P = \{1, 2, \ldots, m\}$ konačni skupovi indeksa a Φ^k, $k \in Q$, i f^i, $i \in P$, funkcije neprekinute po x i po θ te konveksne po x za svako fiksno θ. (Ostale oznake odgovaraju onima iz modela (K, θ)). Kao i jednokriterijalni model (K, θ), i model (VK, θ) promatra se kao crna kutija čiji ulaz predstavlja vektor ulaznih podataka θ a izlaz čine skupovi $\{F(\theta), \tilde{F}(\theta)\}$, gdje je:

$F(\theta)$ — dopustiv skup,

$\tilde{F}(\theta)$ — skup jakih Pareto-optimalnih rješenja.

Neko konkretno jako Pareto-optimalno rješenje označava se s $\tilde{x}(\theta)$. Područja stabilnosti, koja osiguravaju neprekinutu promjenu izlaza modela (VK, θ) uslijed promjene ulaza, odgovaraju područjima promatranim u kontekstu jednokriterijalnih konveksnih modela (K, θ), jer je teorem 3.1. (1. dio pregleda, 3. poglavlje), koji omogućava konstrukciju ovih područja neovisno od funkcije cilja modela, primjenjiv i na skup jakih Pareto-optimalnih rješenja.

Da bi se rezultati vezani uz karakterizaciju optimalnog ulaza, izloženi u 4. poglavlju, mogli primijeniti i na višekriterijalne modele (VK, θ), potrebna je odgovarajuća modifikacija ograničene Lagrange-ove funkcije, korištene u tom poglavlju. Naime, potrebno je problemu određivanja skupa jakih Pareto-optimalnih rješenja modela (VK, θ) odrediti ekvivalentni problem rješavanja jednokriterijalnog konveksnog modela tipa (K, θ). To je moguće učiniti korištenjem jednostavne karakterizacije jakog Pareto-optimalnog rješenja modela (VK, θ) (teorem 6.3, odjeljak 6.4.1) koja tvrdi da, za neki fiksan ulaz $\theta = \theta^o$ i pripadno jako Pareto-optimalno rješenje $\tilde{x}(\theta^o)$ programa (VK, θ^o), postoji pozitivan vektor $\lambda^* = [\lambda_k^*]$, $k \in Q$, takav da je $\tilde{x}(\theta^o)$ optimalno rješenje problema

$$\min_{x \in F(\theta^o)} L(x, \lambda^*; \theta^o) = \sum_{k \in Q} \lambda_k^* \Phi^k(x, \theta^o).$$

Brojevi λ_k^*, $k \in Q$, mogu se interpretirati kao ponderi koji određuju relativan značaj pojedinih funkcija cilja $\Phi^k(x, \theta^o)$, $k \in Q$, u programu (VK, θ^o). Naravno, ova karakterizacija vrijedi za svaku konkretnu realizaciju modela (VK, θ) tj. za svako fiksno θ. U stvari, ako se promatra model (VK, θ) u cjelini (a ne pojedine njegove realizacije), jedina poteškoća u primjeni ove karakterizacije je u tome što ponderi λ_k^*, $k \in Q$, mogu varirati za različite realizacije tj. $\lambda_k^* = \lambda_k^*(\theta)$, $k \in Q$. Međutim, ovdje se, radi jednostavnosti, pretpostavlja da su ti ponderi fiksni čime se unekoliko gubi na općenitosti jer su npr. isključene situacije u kojima $\theta \to \theta^*$ a skup $\tilde{F}(\theta^*)$ je prazan skup (nijedno Pareto-optimalno rješenje nije i jako Pareto-optimalno rješenje). Uz ovu pretpostavku, nakon što su jednom određeni ponderi $\lambda_k^* > 0$, $k \in Q$, problem određivanja skupa jakih Pareto-optimalnih rješenja modela (VK, θ) može se promatrati kao problem određivanja skupa optimalnih rješenja ekvivalentnog jednokriterijalnog konveksnog modela čija je funkcija cilja $L(x, \theta)$ definirana kao:

$$L(x, \theta) \equiv L(x, \lambda^*; \theta) = \sum_{k \in Q} \lambda_k^* \Phi^k(x, \theta). \tag{6.14}$$

Sada je moguće rezultate iz 4. poglavlja izravno primijeniti i u ovom kontekstu. Definicija lokalno optimalnog ulaza unekoliko je modificirana u odnosu na definiciju 4.1. iz 4. poglavlja:

Dfeinicija 6.6.

Promatra se višekriterijalni konveksni model (VK, θ) s realističnom funkcijom $L(x, \theta)$ u $\theta^* \in I$. Neka je $N(\theta^*)$ neka okolina od θ^*. θ^* je lokalni jaki Pareto-optimalan ulaz modela (VK, θ) obzirom na područje stabilnosti $S(\theta^*)$ ako je:

$$L(\tilde{x}(\theta^*), \theta^*) \leq L(\tilde{x}(\theta), \theta)$$

za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$ i za svako jako Pareto-optimalno rješenje $\tilde{x}(\theta)$ (dobiveno uz iste pondere λ_k^*, $k \in Q$, kao i $\tilde{x}(\theta^*)$).

Pripadni program (VK, θ^*) je lokalna optimalna realizacija modela (VK, θ) obzirom na područje stabilnosti $S(\theta^*)$.

Ograničena Lagrange-ova funkcija pomoću koje se karakterizira lokalni jaki Pareto-optimalan ulaz višekriterijalnog modela (VK, θ) konstruira se na slijedeći način:

$$L_*^<(x, \lambda^*, u; \theta) = \sum_{k \in Q} \lambda_k^* \Phi^k(x, \theta) + \sum_{i \in P^<(\theta^*)} u_i f^i(x, \theta). \tag{6.15}$$

Supstitucijom ove funkcije u teoreme 4.1, 4.2. i 4.3. (iz 4. poglavlja), dobivaju se odgovarajući nužni uvjeti jake Pareto-optimalnosti ulaza modela (VK, θ) (na analogni način mogu se dobiti i dovoljni uvjeti).

Na primjer Teorem 4.1. u ovom kontekstu izgleda ovako (i ovdje je $q(\theta^*) = \text{card } P^{<}(\theta^*)$ i $R_+^{q(\theta^*)}$ nenegativan ortant od $R^{q(\theta^*)}$

Teorem 6.4.

Promatra se višekriterijalni konveksni model (VK, θ) s realističnom funkcijom $L(x, \theta)$ u nekom $\theta^* \in I$ te s konstantnim ponderima λ_k^*, $k \in Q$. Neka je $\tilde{x}(\theta^*)$ pripadno jako Pareto-optimalno rješenje i neka je $S(\theta^*)$ proizvoljno područje stabilnosti u θ^*. Tada je θ^* lokalni jaki Pareto-optimalan ulaz obzirom na $S(\theta^*)$ ako, i samo ako, postoji okolina $N(\theta^*)$ od θ^* i nenegativna vektorska funkcija

$$u_*^{<} : N(\theta^*) \cap S(\theta^*) \to R_+^{q(\theta^*)}$$

takva da, za svako $\theta \in N(\theta^*) \cap S(\theta^*)$, vrijedi:

$$L_*^{<}(\tilde{x}(\theta^*), \lambda^*, u; \theta^*) \leq L_*^{<}(\tilde{x}(\theta^*), \lambda^*, u_*^{<}(\theta^*); \theta^*) \leq L_*^{<}(x, \lambda^*, u_*^{<}(\theta); \theta)$$

za svako $u \in R_+^{q(\theta^*(}$ i za svako $x \in F_*^{=}(\theta)$.

Ilustrativni primjer višekriterijalne optimalizacije konveksnih modela MP može se naći u [18].

7. ZAKLJUČAK

Cilj ovog pregleda bio je da prikaže osnovne ideje stabilne optimalizacije modela matematičkog programiranja kao novog pristupa rješavanju problema parametarskog programiranja, koji daje dogovor na sljedeće pitanje:

"Kako voditi dinamički sistem (ekonomski ili neki drugi) iz nekog zatečenog stanja u smislu sve boljeg (i konačno, optimalnog) ostvarivanja ciljeva postavljenih pred njega a da se takvom politikom vođenja sistema zadrži kontinuitet, tj. da se ne izazovu nagli drastični efekti u njegovom funkcioniranju?"

Informacija koju daje optimalizacija modela MP kao odgovor na ovo pitanje jest niz stanja sistema čiji početni član reprezentira zatečeno stanje sistema a poslijednji član opisuje njegovo optimalno stanje. Svojstvo članova niza je da svaki slijedeći član u nizu (odnosno svako novo stanje sistema u dinamičkom procesu) omogućava bolje ostvarivanje postavljenih ciljeva. Ta stanja povezana su stabilnim putanjama koje omogućavaju blage promjene kojima se sistem može prilagoditi bez značajnijih poteškoća.

Već ranije postojeće srodne teorije kao što su teorija dualnosti, analiza osjetljivosti te parametarsko programiranje daju samo parcijalne odgovore na navedeno pitanje. Niti jedna od ovih teorija ne teži dinamičkoj optimalizaciji postavljenih ciljeva.

Konceptualno novi je i tretman problema stabilnosti u kontekstu optimalizacije modela MP. Njen konstruktivni pristup tom problemu, preko područja stabilnosti, bazira se na činjenici da je, barem za konveksne modele, mnoga takva područja moguće izračunati. Ključnu ulogu u takvom pristupu ima ideja "prelamanja" skupa ograničenja modela MP na stvarna ograničenja i ona koja su suvišna obzirom na strukturu preostalih ograničenja. Ova ideja bliska je i jednom drugom problemu matematičkog programiranja — traženju minimalne reprezentacije skupa dopustivih rješenja matematičkog programa (ovaj problem uključuje i određivanje suvišnih varijabli (varijabli čije su vrijednosti konstantne na čitavom dopustivom skupu).

Međutim, diskutabilno je u kojoj mjeri su rezultati ostvareni u okviru tog problema primjenjivi u ovom kontekstu obzirom na izrazitu (dinamičku) povezanost modela MP uz realni sistem koji se njime opisuje (što se očituje i u inzistiranju na polaznim vrijednostima parametarskih varijabli kao elementu modela MP koji esencijalno utječe na rezultat procesa optimalizacije tog modela), odnosno na moguće teškoće u reinterpretaciji rezultata ostvarenih nad minimalno reprezentiranim modelom (i sama minimalna reprezentacija modela MP otvoreno je pitanje).

Osnovno ograničenje ideje optimalizacije modela matematičkog programiranja leži u činjenici da njenim instrumentarijem nije moguće garantirati određivanje globalno optimalnog stanja sistema što je posljedica inzistiranja na stabilnim promjenama sistema a takvim promjenama često nije moguće doseći globalno optimalno stanje. Obzirom da je upravo to uzrok potencijalne globalne suboptimalnosti rezultata optimalizacije modela MP, pri njenoj primjeni potrebno je obratiti pažnju na smisao matematičkog zahtjeva za stabilnošću modela u stvarnom sistemu koji taj model opisuje.

No, ovo "ograničenje" može se shvatiti i kao prednost jer je pitanje smislenosti potrebe za određivanje globalno optimalnog stanja vrlo diskutabilno, ukoliko inzistiranje na njemu dovodi do destrukcije strukture samog sistema.

Jedno od područja u kojima se pretpostavka neprekinute promjene koeficijenata modela (inkorporirana u koncept stabilnosti u kontekstu optimalizacije modela MP) može prihvatiti gotovo bez rezerve jest aproksimacija ekonomskih (posebno makroekonomskih) sistema teorijskim matematičkim modelima. Naravno, višestruku primjenu optimalizacije modela MP naći će prvenstveno u modelima dinamičke analize ekonomskih procesa (vidjeti npr. [06]). Uz neke, u ovom radu već spomenute ideje u tom smislu, posebno zanimljivom čini se uloga optimalizacije modela MP kao matematičkog instrumentarija u tzv. teoriji evolucije kao novom pristupu dinamičkim ekonomskim fenomenima, prvenstveno tehnološkom razvoju. Nadovezujući se na teoriju samo-organizacije koja istražuje (preko socioekonomskog okruženja) povezanost individualnog ponašanja i "racionalnog" izbora, teorija evolucije pokušava odrediti uvjete pod kojima odstupanje od prevladavajućih pravila ponašanja može inicirati promjenu okoline koja je uvjetovala egzistenciju tih pravila.

Matematički modeli koje koristi teorija evolucije svakako su nelinearni jer, s jedne strane, opisujući sisteme bez dugoročnih pravila ponašanja te vrlo osetljive na početne uvjete, ovi modeli moraju uključivati mogućnost višestruke ravnoteže, bifurkacije i drugih izrazito nelinearnih fenomena, a s druge strane, "neravnotežni otvoreni sistemi mogu evoluirati samo ako su u području nelinearnosti" ([20]). Sve ovo, uz činjenicu da je jedna od osnovnih intencija modela teorije evolucije da "otkriju" kritične točke u razvoju sistema u kojima odluka progresivno i ireverzibilno vodi sistem niz jednu od specifičnih putanja razvoja, ukazuje na izrazitu prikladnost koncepta optimalizacije modela matematičkog programiranja u ovom kontekstu. Pri tome, obzirom na u osnovi neoptimizacijski karakter postavki teorije evolucije, ključnu ulogu ima prva etapa procesa optimalizacije modela MP — analiza stabilnosti modela (uz eventualnu detekciju točaka bifurkacije područja stabilnosti).

Drugo ograničenje optimalizacije modela MP vezano je uz uvjete na formu modela MP kojim se sistem opisuje, odnosno na inzistiranje na konveksnim modelima u konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. Međutim, čini se da je to ograničenje samo privremeno jer se trenutno radi na poopćenju optimalizacije modela MP na generalizirane konveksne slučajeve (kvazikonveksne, pseudokonveksne, inveksne) a već postoje i rezultati koji se odnose na prenošenje te ideje u apstraktne prostore (vidjeti [15]).

Treće, ali ne i najmanje značajno ograničenje leži u trenutačnoj nerazvijenosti numeričkih metoda koje prate optimalizaciju modela MP. Ovdje treba istaći da su ove metode bitno drugačije od svih numeričkih metoda matematičkog programiranja jer se radi o optimalizaciji nepoznate funkcije $\tilde{f}(\theta)$ na područjima stabilnosti. Numeričke metode također su trenutno predmet intenzivnog istraživanja (vidjeti npr. [02]).

Za daljnja teorijska istraživanja u stabilnoj optimalizaciji potrebno je elementarno poznavanje topologije i funkcionalne analize. Korištenje metoda i rezultata iz ovog područja dolazi s potrebom da se riješe konkretni ekonomski (i ne samo ekonomski) problemi u svakodnevnom planiranju. Mnogi otvoreni problemi stabilne optimalizacije predstavljaju izazov ne samo za ekonomiste već i za primjenjene matematičare.

Primljeno: 01. 12. 1989.
Prihvaćeno: 07. 01. 1990.

LITERATURA

[01] Ben-Israel, A., A. Ben-Tal, S. Zlobec: "Optimality in Nonlinear Programming: A Feasible Direction Approach", Wiley Interscience, New York, 1981.

[02] Brunet, M.: "Numerical experimentations in input optimization", Mr. Sc. Thesis, McGill University, september 1988.

[3] Еремин, И. И., Н. Н. Астафьев: „Введение в теорию линейного и выпуклого программирования", Наука, Москва, 1976.

[04] Golstein, E. G.: "Konvexe Optimierung", WTB Mathematik-Physik, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[05] Greville, T. N. E., A. Ben-Israel: "Generalized Inverses, Theory and Applications", Wiley Interscience, New York, 1974.

[06] Jemrić, I.: "Stabilno planiranje u Leontievljevom modelu", SYM-OP-IS 88, Zbornik radova, Brioni, (1988), str. 139—142.

[07] Nelson, R. R., S. G. Winter: "An Evolutionary Theory of Economic Change", The Belknap Press of Harward University Press, Cambridge, Massachussets and London, 1982.

[08] Petrić, J., S. Zlobec: „Nelinearno programiranje", preuređeno i prošireno izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[09] Semple, J.: "Continuity of Mathematical Programming Models and Lagrange Multipliers", M. Sc. Thesis in Applied Mathematics, McGill University, 1986.

[10] Semple, J., S. Zlobec: "Continuity of a Lagrangian multiplier function in input optimization", Mathematical Programming 34 (1986), str. 362—369.

[11] Silverberg, G.: "Modelling Economic Dynamics and Technical change: Mathematical Approaches to Self-Organization and evolution", u: Freedman, C., G. Dosi, L. Soete (urednici): "Technical Change and Economic Theory" (u pripremi).

[12] Zlobec, S., A. Ben-Israel, A. Ben-Tal: "Characterization of Optimality in Convex Programming without a Constraint Qualification", Journal of Optimization theory and applications, 20 (1976), str. 417—437.

[13] Zlobec, S.: "Characterizing an Optimal Input in Perturbed Convex Programming", Mathematical Programming, 25 (1983), str. 109—121.

[14] Zlobec, S.: "Characterizing in Optimal Input in Perturbed Convex Programming — Corrigendum" Mathematical Programming, 35 (1986), str. 368—371.

[15] Zlobec, S.: "Characterising Optimality in Mathematical Programming Models", Acta Applicandae Mathematicae 12, (1988), str. 113—180.

[16] Zlobec, S.: "Input Optimization I: A Constructive Approach", McGill University, Montreal, 1983. (research report).

[17] Zlobec, S.: "Input Optimization I: Optimal Realizations of Mathematical Models", Mathematical Programming 31 (1985), str. 245—268.

[18] Zlobec, S.: "Input Optimization III: Optimal Realizations of Multiobjective Models", Optimization, 17 (1986), str. 429—455.

[19] Zlobec, S.: "Marginal Values for Regions of Stability in Convex Optimization", Glasnik Matematički 17 (1982), str. 197—207.

[20] Zlobec, S.: "Structural Optima in Nonlinear Programming" rad u knjizi J. Guddat et al.: "Advances in Mathematical Optimization", Series: Mathematical Research 45, Akademie-Verlag, Berlin (1988), str. 218—226.

[21] Zlobec, S.: "A Survey of Input Optimization", Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization, 18 (1987), str. 309—348.

[22] Zlobec, S.: "Topics in Input Optimization", rad prezentiran na International Symposium on the Occasion of Professor A. Charnes 70-th Birthday, University of Texas, Austin, 1987.

[23] Zlobec, S., A. Ben-Israel: "Duality in Convex Programming: a Linearization Approach", Matematische Operationsforschung und Statistik, series Optimization, 10 (1979), str. 171—178.

[24] Zlobec, S. A. Ben-Israel: "Perturbed Convex Programs: continuity of optimal solutions and optimal values", Operations Research Verfahren, XXXI, 1 (1979), str. 737—749.

[25] Zlobec, S., B. Craven: "Stabilization and calculation of the minimal index set of binding constraints in convex programming", Matematische Operationsforschung und Statistik, series Optimization, 12 (1981), str. 203—220.

[26] Van Rooyen, M., S. Zlobec: "Characterizing optimal states of economic models", preprint, srpanj 1987.

[27] Van Rooyen, M., M. Sears, S. Zlobec: "Constraint qualification in input optimization", Journal of the Australian Mathematical Society, series B (1988).

THE OPTIMIZATION OF CONVEX MODELS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING A SECTION BY SECTION SURVEY

Part Two

CHARACTERIZATION OF OPTIMAL ENTRY

Igor JEMRIĆ

Summary

The purpose of this paper is to present the basic ideas of stable optimization of models of mathematical programming as a new approach to solving problems of parameter programming, which gives an answer to the following question:

"How to direct a dynamic system (economic or any other) from some given state in the sense of ever-improving (and finally optimal) realization of goals placed before it, but in such a way that the policy of directing the system retains continuity i. e. so that sudden drastic effects would not result?"

The information which MP model optimization gives as an answer to this question is a series of system states the first model of which represents the given state of the system and the last member describes its optimal state. The characteristic members of series is that every member in the series (i. e.) every new state of the system in the dynamic process enables better ralization of the set goals. Such states are linked by steady routes which enable small changes to which the system can adjust without great difficulties.

The existing related theories such as the duality theory, the analysis of sensitivity and parameter programming give only partial answers to the question posed. None of these theories seek dynamic optimization of the set goals.

Also conceptually new is the treatment of the problem of stability in the context of MP model optimization. Its constructive approach to that problem, through the spheres of stability, is based on the fact that, at least for convex models, many such spheres can be calculated. The key role in such an approach has the idea of "overlap" between the range of restrictions of the MP model, real restrictions and those which are deemed superfluous in view of the structure of the remaining restrictions. This idea is close to another problem of mathematical programming: the search for minimal representation of the range of permissible solutions of the mathematical programme (this problem also includes the determination of superfluous variables i. e. variables with constant values for the whole permissible range).

However, it is debatable to what extent the results realized within the confines of that problem are applicable in that context in view of the pronounced (dynamic) interrelationship between the MP model and the real system which it describes, which is reflected in the insistence upon the starting values of parameter variables as an MP model element which significantly influences the results of the process of optimization of that model, or, rather, on the possible difficulties in the reinterpreta-

tion of result arrived at by the minimal representation of the model (the minimal representation of the MP model itself is an open question).

The basic limitation of the idea of model optimization of mathematical programming lies in the fact that it is not possible for its instruments to guarantee certain global optimal states of the system which is a consequence of the insistence on stable changes in the system and for such changes it is often not possible to reach the global optimal state. Since that is the cause of potential global suboptimal results of MP model optimization, it is important when applying it to pay special attention to the meaning of mathematical demand for model stability in the real system which the given model portrays.

But this "limitation" can also be taken as an advantage because the question of the meaning of the need for determining global optimal state is debatable insofar as insistence on it leads to the destruction of the structure of the system itself.

One of the areas in which the assumption of the unbroken model coefficient change (incorporated in the concept of stability and MP model optimization) which can be wholeheartedly accepted is the approximization of economic (especially macroeconomic) systems by theoretical mathematical models. Of course, the manifold application of MP model optimization can primarily be found in models of dynamic analysis of economic processes. Together with some ideas mentioned in this paper in that respect, looks especially interesting the role of MP model optimization as a mathematical instrument in the so-called theory of evolution as a new approach to dynamic economic phenomena, primarily in technological development. Relating to the theory of self-organization which explores (through socioeconomic surroundings) the interrelationship between individual behaviour and "rational" choice, the theory of evolution attempts to determine the conditions under which the disobedience of the prevailing rules of behaviour can initiate change in the environment which conditioned the existence of those rules.

Mathematical models which are used by the evolution theory are inevitably non-linear because, on the one hand, when describing systems without long-term rules of behaviour and also very sensitive starting conditions these models have to include the possibility of multiple equilibriums, bifurcations and exceptionally non-linear phenomena, and on the other hand, "disequilibrium open systems can evolve only if they are in the sphere of non-linearity."

All this, together with the fact that one of the main intentions of the models of the theory of evolution is to "discover" critical points in the development of the system in which the decision progressively and irreversibly leads the system along one of the specific courses of development, points to the special suitability of the concept of the model optimization of mathematical programing in ths context. Bearing in mind the basically unoptimizing character of the theoretical postulates of evolution, a crucial role is held by the first stage of the MP model optimization process (the analysis of model stability together with the possible detection of bifurcation points in the stability areas).

The second restriction of the MP model optimization is related to the conditions of the form of MP model by which the system is defined, or to the insistence on convex models in the final-dimensional vector spaces. However, it looks as if that condition is only temporary because we are currently working on the generalization of optimization of MP models on generalized convex (quasiconvex, pseudoconvex, invex) and there already exist results which refer to the transmission of that idea to abstract spaces.

Last, but not least, the limitation lies in the present underdevelopment of numerical methods which follow the optimization of the MP model. Here we have to emphasize that these methods are significantly different from all other numerical methods of mathematical programming because we are faced with the optimization of the unknown function $f(\theta)$ in the spheres of stability. Numerical methods are also the subject of intensive research.

For further theoretical research of stable optimization we need elementary understanding of topology and functional analysis. The use of methods and results from this area come with the need for solving concrete economic (and not only economic) problems in everyday planning. Many open problems of stable optimization present a challenge not only for economists but also for applied mathematicians.