PREGLED NAUČNE OBLASTI
SURVEY OF A RESEARCH FIELD

NOVIJI REZULTATI U TEORIJI IGARA SA NENULTOM SUMOM

*Radivoj PETROVIĆ**

1. UVOD

Briljantni rezultati u teoriji igara postignuti pre dve do tri decenije otvorili su mogućnost naučnog prilaza važnim i realnim problemima raznovrsnih konflikata u savremenom svetu. Ti rezultati izazvali su ogromno interesovanje za teoriju igara i doprineli da se ulože veliki napori i sredstva u dalji razvoj teorije igara, tj. u istraživanje prirode konflikata, njihovo formalno opisivanje i traženje načina kako da se nađu najbolja rešenja u konfliktnim situacijama.

Početne teorijske uspehe sledilo je pravo razočaranje praktičara, koji su brzo shvatili da zanimljive teorijske rezultate nije ni malo lako primeniti kada se suočimo sa realnim zadacima u realnim konfliktnim ili delimično konfliktnim odnosima, Zatim, kao često u istoriji naučnih disciplina, nastupio je period racionalnog odnosa prema toj novoj disciplini, koja može da oduševi svojim matematičkim invencijama, složenošću logike i realnošću problema koje postavlja i treba da reši. Teoriju igara treba shvatiti kao matematičku disciplinu koja se bavi formalizacijom određivanja optimalnih odluka u uslovima konflikata, delimičnih konflikata ili u uslovima neizvesnosti. Teorija igara je strogo formalna teorija, pa i ako se bavi vrlo realnim problemima izbora optimalnih odluka, što svakodnevno okupira čoveka, ona ne gleda na te probleme sveobuhvatno, već zanemaruje njihove psihičke i voljne komponente i ne bavi se pitanjima faktičke realizacije optimalnih odluka. Stoga naglašavamo da u okvirima teorije igara ostaju samo uprošćene i idealizovane slike realnih konflikata.

Neosporno je da teorija igara, a posebno njen deo — teorija igara sa nenultom sumom nisu poznati širem krugu njenih potencijalnih korisnika kod nas. Najbolji dokaz ove konstaticije je činjenica da se u programima gotovo svih poslediplomskih studija u našoj zemlji posvećenih planiranju, upravljanju, organizaciji rada ili izučavanju sistema uopšte, teorija igara ili nikako ne nalazi, ili se izučavaju samo njeni uvodni delovi.

* Doktor tehničkih nauka, savetnik u Institutu »Mihailo Pupin«, Beograd.

Cilj autora je da u ovom pregledu izloži novije rezultate u specifičnoj oblasti teorije igara koja tretira probleme delimičnih konflikata, pregovaranja, kooperacije i kompromisa. Deo teorije igara u kome se to proučava poznat je pod nazivom »teorija igara sa nenultom sumom«. Pregled predstavlja vodič kroz jednu mladu i u praksi neafirmisanu teoriju. Nivo apstrakcije izlaganja je umeren. Autor se trudio da izabrane specifične rezultate ove teorije originalno interpretira razumljivim jezikom. Na kraju pregleda data je pažljivo odabrana bibliografija u kojoj zainteresovani mogu naći šire teorijske rezultate sa rigoroznim dokazima.

2. KRATKA ISTORIJA

Teorija igara se smatra za relativno mladu matematičku disciplinu, iako njeni koreni potiču iz doba renesanse. Još je Leibniz (1696) govorio »da bi bilo korisno studirati igre, i ako bi se neki vispreni matematičar udubio u njih, mogao bi doći do važnih rezultata, jer čovek nikada ne pokazuje toliko bistrine i originalnosti kao u svojim igrama«.

Prva naučna razmatranja igara bila su posvećena hazardnim igrama i nalaze se u prepisci francuskog matematičara Pascala. Složenost hazardnih igara u kojima obično učestvuju više igrača sa individualnim ciljevima i u psihičkoj atmosferi koju određuju mnoge okolnosti, a s druge strane nesavršenost matematičkih tehnika toga doba učinili su da stvarne hazardne igre ostanu daleko od bilo kakve matematičke analize. Trebalo je čekati 1927. i 1928. godinu da francuski matematičar Borel i genijalni J. von Neumann postave i dokažu »fundamentalnu teoremu«, koja je otvorila vrata razvoju teorije igara. Od tada je prošlo dve decenije do pojave poznate knjige, sada već klasičnog dela J. von Neumanna i O. Morgensterna »Teorija igara i ekonomsko ponašanje« (1944). A onda, u sledećem periodu od nešto više od dve decenije teorija igara doživljava neverovatan prosperitet. Smatra se da je do njenog izrazito brzog razvoja uglavnom došlo kroz rešavanje vojnih problema.

Danas je moguće govoriti ne o jednoj teoriji igara, već o teorijama igara. Postoji više formalnih načina klasifikovanja igara, a mi ćemo se ovde zadržati na dve klasifikacije. Postoje igre u kojima su učesnici u igri — igrači u potpunom konfliktu. To praktično znači da u zadatku koji razmatramo postoji više donosilaca odluka — međusobnih antagonista. Iako su tipični problemi te vrste borbene akcije, na primer susret dva neprijateljska odreda, ili presretanje neprijateljskih aviona, potpuno konfliktne situacije su česte i u »mirnodopskim« zadacima tehničke i ekonomske prirode. Proučavanje potpuno konfliktnih situacija je predmet teorije igara sa nultom sumom, koja je prva razvijana i u ovom periodu ima najviše rezultata. Nažalost, bilo je mnogo lakše razviti matematičku teoriju za proučavanje potpunih konflikata, nego što je to slučaj za samo delimične konflikte, gde su moguća pregovaranja, sporazumi, saradnja i udruživanje među igračima. Delimično konfliktne odnose proučava teorija igara sa nenultom sumom. Ona je mlađa i manje razvijena od prve. Međutim, mogućnosti njene primene u rešavanju ekonomskih zadataka su po mišljenju autora mnogo šire, pa je ovaj pregled posvećen njoj.

Druga važna klasifikacija odnosi se na podelu konfliktnih zadataka na dinamičke i nedinamičke. U dinamičkim zadacima traži se rešenje problema u funkciji vremena, a priroda nedinamičkih zadataka je takva da rešenja nisu funkcija vremena. Dinamičke konfliktne probleme proučava teorija diferencijalnih igara, dok su nedinamički konfliktni problemi predmet teorije matričnih i statičkih igara. Neosporno je da su dinamički konfliktni zadaci teorijski i za praksu zanimljivi i važni. Međutim, po mišljenju autora ovog pregleda, koji nije pesimista, do praktične primene teorije diferencijalnih igara u ovom periodu njenog razvoja smo prilično daleko. Stoga je ovaj pregled ograničen na teoriju matričnih i statičkih igara.

3. OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

Ukratko ćemo izložiti osnovne pojmove i definicije.

Igrač. Donosilac odluka se naziva igrač. U igri postoje bar dva igrača koji su međusobni antagonisti ili delimični antagonisti. Igrači su pojedinci, grupe pojedinaca, preduzeća, udruženja, itd.

Funkcija efekata (ili platežna funkcija). Svaki igrač kvantitativno meri efekat svojih odluka i odluka drugih igrača. Mera efekta za svakog igrača je funkcija efekta ili platežna funkcija.

Igra: Igra je kolekcija pravila poznata svim igračima. Pravila određuju šta igrači smeju da čine, kao i ishode i efekte njihovih izbora.

Potez. Potez je momenat u igri kada igrači moraju načiniti izbor iz skupa alternativa. Suština igre je da efekat jednog igrača ne zavisi samo od njegove odluke već i od odluka drugih igrača.

Strategija. Strategija jednog igrača je izabrani skup odluka koje vode računa o zavisnosti efekta igre za tog igrača od odluka drugih igrača. Ako igrač umesto odluka bira verovatnoće za izbor odluka, kaže se da bira mešovitu strategiju.

4. KLASE IGARA

Sada se može izvršiti klasifikacija igara:

(a) Prema broju igrača postoje igre dva igrača, igre tri igrača,... igre n igrača. Ako postoje više od tri igrača, moguće je obrazovati koalicije, gde grupa od dva ili više igrača nalazi interes u koordinaciji svojih strategija.

(b) Prema broju strategija igre se dele na igre sa konačnim brojem strategija i igre sa neograničenim brojem strategija.

(c) Prema osobini platežnih funkcija, igre su sa nultom sumom — kada je suma platežnih funkcija svih igrača jednaka nuli, i igre sa nenultom sumom — kada to nije slučaj. Najviše je proučavana klasa igara dva igrača sa nultom sumom, gde važi da ono što jedan igrač dobija drugi gubi. Teorija takvih igara je najpoznatija, a u ovom pregledu o njoj neće biti govora (1).

U igrama sa nenultom sumom postoje elementi konflikta i kooperacije. Potklasa igara sa nenultom sumom u kojoj igrači formiraju koalicije, ili se pre igre dogovaraju o svojim strategijama, nazivaju se kooperativne igre. Ukoliko nema dogovora, reč je o nekooperativnim igrama.

(d) Igre se dele na diferencijalne i matrične. Igra je diferencijalna ako su strategije igrača funkcije vremena, a platežne funkcije određeni integrali (2). Igra je matrična i statička ako strategije igrača nisu funkcije vremena. Platežne funkcije su tada zadate matricama ili realnim skalarnim funkcijama više promenljivih.

(e) Specifična klasa igara, koja je za ovu studiju značajna su igre protiv neizvesnosti (igre protiv »Prirode«[1]), gde pravi konflikti ne postoje, već razne neizvesnosti sa kojim se suočavamo pri donošenju neke odluke, shvatamo kao fiktivnu igru koju »Priroda« igra protiv nas. U tim igrama jedan igrač je donosilac odluka, a njegov oponent je »Priroda«.

5. MATRIČNA IGRA DVA IGRAČA SA NENULTOM SUMOM

U igri sa nenultom sumom igrači nisu u potpunom konfliktu. Igra se u normalnom obliku opisuje putem dve platežne matrice (P, Q) koje definišu plaćanja oba igrača u funkciji alternativnih parova strategija. Umesto dve obično se formira jedna matrica, čiji su elementi parovi brojeva — prvi broj je plaćanje igrača 1, a drugi broj plaćanje igrača 2,

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} (P_{11}, Q_{11}) & \cdots\cdots & (P_{1n}, Q_{1n}) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ (P_{m1}, Q_{m1}) & \cdots\cdots & (P_{mn}, Q_{mn}) \end{bmatrix} & \begin{array}{l} S_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{1m} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Igrač 1} \\ \text{bira strate-} \\ \text{giju } S_{1i} \end{array} \\ \quad S_{21} \quad \cdots\cdots \quad S_{2n} & \end{array}$$

Igrač 2 bira strategiju S_{2j}

Igrač 1 bira vrstu — jednu od m mogućih strategija, a igrač 2 bira kolonu jednu od n mogućih strategija. Ako igrač 1 izabere strategiju S_{1i}, a igrač 2 strategiju S_{2j}, tada je plaćanje (efekat) prvog igrača P_{ij}, a drugog igrača Q_{ij}. Pretpostavlja se da oba igrača znaju elemente platežnih matrica.

[1]) Engleski naziv za igre protiv neizvesnosti (»Prirode«) je Games against Nature.

Nekooperativna igra dva igrača

U nekooperativnoj igri igrači biraju svoje strategije nezavisno, bilo zbog toga što je koordinacija zabranjena, ili zato što sporazumi nisu mogući. U nekooperativnoj igri definiše se ravnoteža ili ravnotežna tačka igre.

Definicija. Ravnotežna tačka igre je onaj par strategija, ili one verovatnoće izbora strategija, pri kojima ni jedan igrač nema motiv za promenu svoje strategije ako bi delovao samostalno.

Neka je verovatnoća da će igrač 1 izabrati S_{1i} ravna p_i, tada mešovitu strategiju igrača 1 određuje vektor $p = (p_1, \ldots\ldots, p_m)$. Neka je verovatnoća da će igrač 2 izabrati S_{2j} ravna q_j, tada mešovitu strategiju igrača 2 određuje vektor $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Ravnotežna tačka je po definiciji par vektora — verovatnoća p^*, q^*, koji se nazivaju optimalne mešovite strategije u smislu očekivanih efekata. Ravnotežnu tačku definišu relacije,

$$pPq^* \leq p^* Pq^*, \quad p : p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

$$p^*Qq \leq p^* Qq^*, \quad q : q_j \geq 0 \quad \sum_j q_j = 1$$

Teorema. U svakoj igri dva igrača sa konačnim brojem strategija postoji bar jedna ravnotežna tačka. (Napomenimo da isto važi i za igre n igrača sa konačnim brojem strategija (3).

Klasičan akademski primer nekooperativne igre je igra poznata pod nazivom »dilema zatvorenika«. Dva zatvorenika optužena za jedan zločin nalaze se pred dilemom da li da priznaju svoj zločin ili ne! Ako ni jedan ne prizna biće pušteni na slobodu; ako oba priznaju biće umereno kažnjeni; ako jedan prizna, njega puštaju na slobodu a drugi dobija maksimalnu kaznu. Kada se ovi uslovi stave u kvantitativne okvire, dobija se platežna matrica u kojoj su elementi matrice jedna moguća kvantitativna predstava kazni,

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} (4,4) & (0,5) \\ (5,0) & (2,2) \end{bmatrix} & \begin{array}{l} S_{11}\text{: ne priznati} \\ S_{12}\text{: priznati} \end{array} \\ \begin{array}{cc} S_{21}\text{:} & S_{22}\text{:} \end{array} & \end{array}$$

Strategije zatvorenika 1

ne prizn. prizn.

Strategije zatvorenika 2

Ravnotežna tačka ove igre je par strategija S_{12}, S_{22}: priznati — priznati, sa efektima (2,2). Razlog: svaki od igrača bi lošije prošao ako bi promenio svoju strategiju, a da pri tome drugi igrač ne promeni svoju.

Ovaj primer jasno pokazuje da bi oba igrača bolje prošla kada bi izabrali S_{11}, S_{21}, sa efektima (4,4). Time se želi naglasiti potreba za koordinacijom i razmenom mišljenja (što je ovde zabranjeno), a i zaključiti da pojedinačno racionalno ponašanje može rezultirati u inferiornije ishode za sve pojedince.

Matrična kooperativna igra dva igrača bez raspodele efekata

U ovim igrama dolazi do razmene ideja o izboru strategija i sporazuma o koordiniranju strategija među oba igrača. Međutim, nema sporazuma o deobi ukupnog efekta, već svaki igrač ostaje na svom plaćanju.

Da bi se mogao uvesti pojam kooperativnog rešenja ove igre, moramo dati nove definicije.

Definicija bezbedne strategije. Svaki od igrača ima svoju bezbednu strategiju i korespondentni efekat koji se definišu relacijama,

$$P^s = \max_p \ \min_q \ \sum_i \sum_j p_i \ q_j \ P_{ij}$$

$$Q^s = \max_q \ \min_p \ \sum_i \sum_j p_i \ q_j \ Q_{ij}$$

Vektori p^s, q^s koji daju P^s, Q^s nazivaju se bezbedne strategije.

Definicija Pareto optimalnih efekata. Skup Pareto optimalnih efekata π kooperativne igre je skup mogućih parova efekata (P', Q'), takav da ne postoje drugi mogući parovi (P, Q) za koje bi važilo $P \geq P'$ i $Q \geq Q'$.

Definicija pregovaračkog skupa. Pregovarački skup Φ je skup parova (P'', Q'') za koji važi $P'' \geq P^s$ i $Q'' \geq Q^s$.

Definicija dominantnog pregovaračkog skupa. Dominantni pregovarački skup je skup ravnotežnih tačaka igre koji pripadaju pregovaračkom skupu Φ.

Koncept kooperativnog rešenja dao je Nash (4). Da bi rešenje bilo jednoznačno uvode se sledeće pretpostavke:

(i) Postoji simetrija, tj. numerisanje igrača ne utiče na rešenje igre.

(ii) Postoji invarijantnost u odnosu na monotone linearne transformacije platežnih funkcija (značajno u praktičnoj primeni).

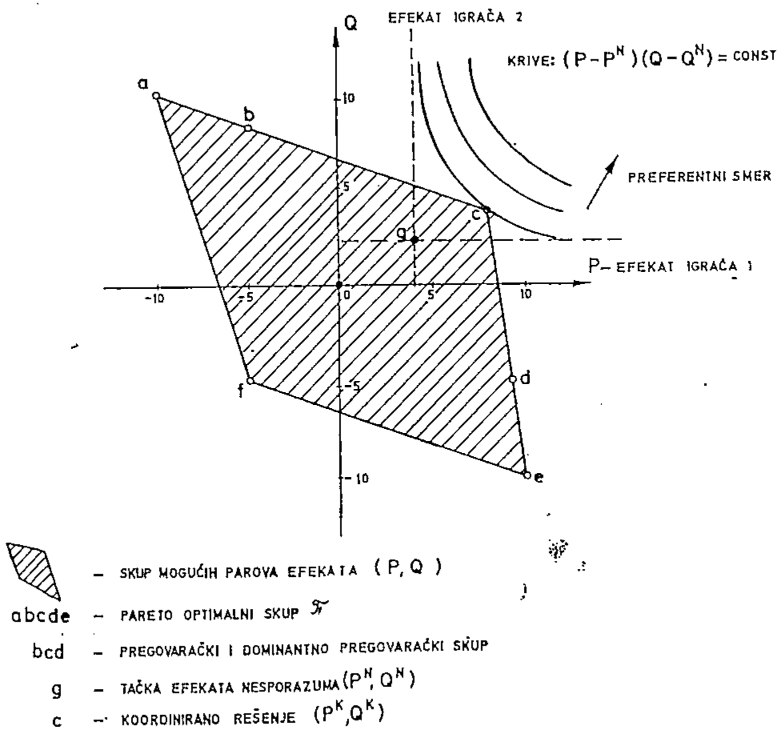
(iii) Postoji nezavisnost od irelevantnih alternativa, tj. rešenje se neće promeniti ako strategije neobuhvaćene rešenjem odbacimo.

(iv) Rešenje mora pripadati Pareto optimalnom skupu.

Igrači postižu sporazum o koordiniranju svojih strategija pod pritiskom da neuspeh sporazma dovodi do izvesnih nedovoljno pogodnih efekata za oba igrača, koji se nazivaju efekti nesporazuma, ili plaćanja nesporazuma ($P^N Q^N$). Koordinirano rešenje (P^K, Q^K) je tada ono koje maksimizira proizvod dopunskih efekata u odnosu na efekte nesporazuma, tj. treba potražiti,

$$\max_{(P,\, Q)} \; (P - P^N) \; (Q - Q^N)$$

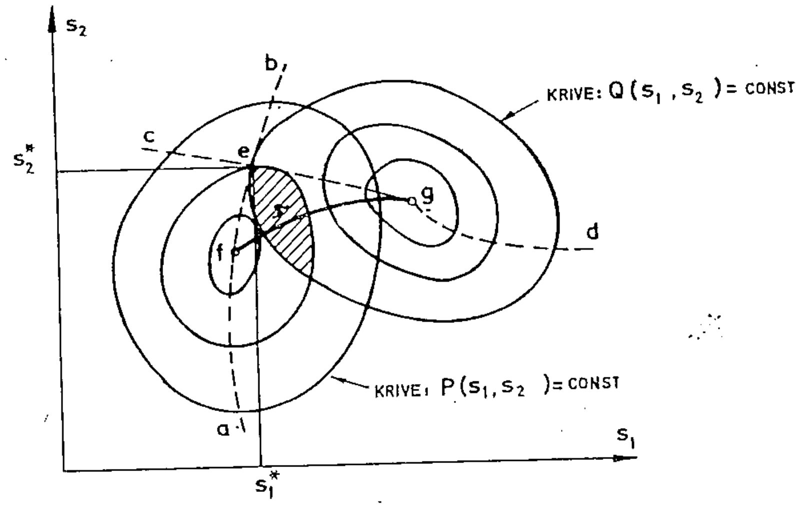
Uvedene definicije, efekat nesporazuma i koordinirano rešenje za jednu igru, grafički su objašnjene na sl. 1. Na apscisi i ordinati naneti su efekti za oba igrača, respektivno. Šrafirana površina predstavlja skup mogućih parova efekata (P, Q), a sama slika dobro objašnjava sve uvedene definicije.



Sl. 1

6. KONTINUELNA KOOPERATIVNA IGRA BEZ RASPODELE EFEKATA

U ovom odeljku razmotriće se specifična podklasa kooperativnih igara u kojoj svaki igrač može da izabere vrednost jedne veličine — jednog parametra, a od izbora svih igrača zavisi efekat svakog od igrača. Takva igra dva igrača najbolje se tumači grafički sl. 2. Nek je efekat za igrača 1 skalarna funkcija $P = P(s_1, s_2)$, a efekat za igrača 2 : $Q = Q(s_1, s_2)$.



Sl. 2

Prvi igrač bira s_1, a drugi s_2. Oba igrača teže da maksimiziraju svoje efekte P i Q, respektivno. Na sl. 2. su pokazane krive konstantnih efekata P, Q u ravni s_1, s_2. Maksimumi su u tačkama (f) i (g) za igrača 1 i igrača 2, respektivno.

Kriva ab je geometrijsko mesto tačaka — racionalnih izbora igrača 1 za utvrđeno s_2. Kriva cd je geometrijsko mesto tačaka — racionalnih izbora igrača 2 za utvrđeno s_1. Ako postoji presek ovih krivih, to je ravnotežna tačka igre (e), i može se uzeti kao rešenje nekooperativne igre. Ni jedan od igrača, ako su racionalni, ne usuđuje se da izabere neku drugu vrednost osim s_1^* (igrač 1) i s_2^* (igrač 2).

Ako su igrači voljni da kooperiraju stanje se menja. Šrafirana površina definiše rešenja koja su povoljnija za jednog ili oba igrača u odnosu na ravnotežnu tačku (e). Slično kao u prethodnom paragrafu i ovde se definiše Pareto optimalni skup rešenja π. To je kriva fg, neinferiornih rešenja za oba igrača. Tačke na njoj imaju osobinu da svaka devijacija od neke tačke na krivoj fg ne može dovesti do poboljšanja efekata jednog igrača bez gubitka efekta za drugog. Analitička definicija skupa neinferiornih rešenja je sledeća: skup tačaka (s_1', s_2') čini neinferioran skup π, ako i samo ako za bilo koju tačku (s_1, s_2) postoji tačka $(s_1', s_2') \in \pi$, za koju važi:

$$P(s_1, s_2) \leq P(s_1', s_2') \; ; \; Q(s_1, s_2) \leq Q(s_1', s_2')$$

Iz osobine elemenata skupa π, da tačke iz π su tangentne tačke na krive P = const, Q = const, slede algoritmi za određivanje skupa π. Mi ovde nećemo ulaziti u računske algoritme određivanja skupa π jer je to tehničko pitanje koje pri praktičnoj primeni ne bi trebalo da bude problem (5).

Ako ravnotežna tačka (s_1^*, s_2^*) pripada Pareto optimalnom skupu π, smatra se da je to najpoželjnije kooperativno rešenje igre.

Slično kao u prethodnom paragrafu, i u kontinuelnoj igri možemo razmotriti šta je potrebno učiniti ako je jedan od igrača neracionalan. Možemo pretpostaviti da jedan od igrača umesto da teži maksimizaciji svog efekta, želi da najviše ošteti partnera, tj. minimizira njegov efekat. On se u stvari postavlja kao da rešava problem igre sa nultom sumom u odnosu na sopstvenu platežnu funkciju. Tako se dolazi do pojma bezbednih vrednosti s_1^s, s_2^s koje su maxmin vrednosti oba igrača, kada svaki od njih smatra svoga partnera neracionalnim.

Sva izlaganja u ovom paragrafu jednostavno se prenose na igre n igrača. Pojava n igrača umesto 2 ne unosi nikakve koncepcijske novine niti principijelne teškoće. Međutim, sa porastom broja igrača u igri rastu računske teškoće u određivanju ravnotežnih tačaka, bezbednih strategija, Pareto optimalnih tačaka pa, prema tome, i rešenja igre.

7. MATRIČNA KOOPERATIVNA IGRA SA RASPODELOM EFEKATA

U igračkim odnosima problem pregovaranja je izuzetno složen. Pojavljuje se niz fenomena kao što su kooperacija, koalicija, kompromis, pretnja, forsiranje, o kojima teorija igara još nije dala konačan sud niti ponudila definitivne formalne rezultate. Međutim, jedan praktično interesantan problem je detaljnije teorijski razmatran. To je kooperativna igra u kojoj su igrači voljni da razmatraju totalni efekat igre i da ga pravedno dele među sobom.

Neka je dat skup igrača u igri n igrača,

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Koalicija se naziva svaki podskup $S \subset N$.

Definicija. Karakteristična funkcija igre $V(S)$ je realna funkcija — maksimalni totalni efekat svake od mogućih 2^n koalicija.

Karakteristična funkcija se može normalizovati tako da su njene vrednosti između 0 i 1. Normalizovana karakteristična funkcija je po konvenciji 0 kada igrači nastupaju individualno, a 1 kad obrazuju veliku koa-

liciju, tj. $V(N) = 1$. Karakteristična funkcija igre poseduje osobinu superaditivnosti,

$$V(S_1 \cup S_2) \geq V(S_1) + V(S_2)$$

Pretpostavka superaditivnosti je rezonska, jer bez nje ne bi imalo smisla obrazovati veće koalicije.

Definicija. Imputacija F je vektor čije su komponente efekti svakog igrača u igri,

$$F = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Dve pretpostavke o grupnoj i pojedinačnoj racionalnosti ograničavaju broj mogućih imputacija. Analitički iskaz tih pretpostavki je:

(i) grupna racionalnost: $V(N) = \sum_{i \in N} P_i = \sum_{i=1}^{n} P_i$

(ii) pojedinačna racionalnost: $P_i \geq V(\{i\})$ za svako $i \in N$.

Teorija uvodi dva kriterijuma dominantnosti koalicija:

(i) slabi kriterijum dominantnosti: koalicija S je efektivna za imputaciju F ako važi: $V(S) \geq \sum_{i \in S} P_i$,

(ii) jači kriterijum dominantnosti: svaka koalicija treba da poseduje isti stepen racionalnosti kao i individualni igrač. »Jezgro« je skup imputacija za koje važi $\sum_{i \in S} P_i \geq V(S)$, a to znači da »jezgro« zadovoljava pojedinačnu, koalicionu i grupnu racionalnost.

Postavlja se teorijski zanimljiv i praktično važan zadatak određivanja ključa raspodele totalnog efekta koalicije na igrače. Teorija nudi jedan ključ raspodele koji se zasniva na takozvanoj Shapley-evoj vrednosti (6). Ideja ovog ključa je u postavci da se »snaga« svakog igrača ogleda u dodatnom efektu, koji je posledica pristupanja tog igrača koaliciji u kojoj prethodno nije bio. Pod pretpoštavkom da svakom igraču pripada njegov prosečni doprinos svim koalicijama čiji je potencijalni član, efekat »i«-tog igrača je očekivana vrednost $V(S \cup \{i\}) - V(S)$, gde je S podskup igrača u kome nije »i«-ti igrač, a $S \cup \{i\}$ je koalicija tog podskupa i »i«-tog igrača. Ta očekivana vrednost je,

$$P_i = \sum_{\text{svi } S \in N} k_n(S) \, [V(S \cup \{i\}) - V(S)]$$

gde je $k_n(S)$ težinski faktor,

$$k_n(S) = (s! \, (n-s-1)!)/n! \qquad (s \text{ broj igrača u } S)$$

Određivanje težinskih faktora $k_n(S)$ nije lak računski zadatak, jer u igri n igrača može biti formirano $n!$ koalicija; s igrača u kolaciji S pre uključenja »i«-tog igrača može se formirati na $s!$ različitih načina, a preostalih $n-s-1$ igrača mogu formirati $(n-s-1)!$ različitih koalicija.

Faktori $k_n(S)$ imaju ekonomsko-matematičku interpretaciju: to su jednostavno verovatnoće da će jedan igrač pristupiti koaliciji S, pod pretpostavkom jednake verovatnoće formiranja koalicija n igrača.

8. IGRA PROTIV »PRIRODE«

Jedna oblast teorije igara razmatra problematiku donošenja odluka u prisustvu neizvesnosti. Stvarni konflikt tada ne postoji, pa čak ne postoje ni dva igrača. Drugi igrač i konflikt samo su pretpostavke jedinstvenog subjekta — jedinog igrača. On donosi odluke, a pri tome dopušta da su posledice svake njegove odluke višeznačne. Šta će biti posledice, a time i efekti odluke zavisi od nekih donosioca odluka nepoznatih zakonitosti »Prirode« i/ili okoline. Donosilac odluke može pretpostaviti da je istinska zakonitost njemu najmanje naklonjena. Drugim rečima subjekt zamišlja da umesto objektivne ali njemu nepoznate »Prirode«, na primer, ponašanja drugih privrednih subjekata, ima direktnog i svesnog protivnika koji teži da minimizira efekte njegovih odluka. Može se primetiti da je ovakva pretpostavka pesimistička i da se suviše koncentrišemo na najgore što se može desiti. To je sigurno tačno i predstavlja ograničenje teorijskog igračkog pristupa. Umesto igračkog pristupa na raspolaganju nam stoje bar dve druge alternative: prvo, često je moguće da se uz malo napora i troškova skupi više informacija o nepoznatim faktorima »Prirode«; drugo, može se potražiti rešenje koje u svojoj strukturi sadrži povratne sprege, pa se njima koriguju naše odluke u zavisnosti od uticaja nepoznatih faktora »Prirode«. Međutim, sigurno je važno utvrditi šta je moguće učiniti bez dodatnih informacija ili povratne sprege, a odgovor na ovo pitanje daje baš primena teorije igara protiv »Prirode«.

Matematički model dinamičke igre protiv »Prirode« je diskretni višestepeni proces sa odlukama, opisan rekurentnim relacijama,

$$x^{k+1} = G(x^k, u^k, v^k), \qquad x^0 = \text{zadato}, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1$$

gde su:

x^k — stanje sistema u vremenskom periodu k,

u^k — odluka u k-tom periodu (igrača 1),

v^k — neizvesnost u k-tom periodu, faktor koji stoji na raspolaganju »Prirodi« (igrač 2).

Postoji samo jedna funkcija efekata (funkcija cilja), i to za igrača 1. Ona je u opštem slučaju dvojaka:

(i) Aditivna funkcija svih stanja kroz koje sistem o kome odlučuje igrač 1 prolazi, i svih odluka uključujući i odluke »Prirode«.

(ii) Funkcija krajnjeg stanja sistema x^K.

U oba slučaja važna je pretpostavka da li prvo igrač 1 bira u^k, a za tim »Priroda« bira v^k, ili obratno. Ako se prvo bira odluka u^k, tada »Pri roda« vrši izbor na osnovu potpunog poznavanja odluke igrača 1, i obratno Formalna razlika je u tome što igrač 1 bira odluke kao brojne vrednosti: $u^1, u^2, \ldots$, dok drugi igrač bira funkcije $v^1(u^1), v^2(u^2) \ldots$

U izboru najboljih odluka efikasno se primenjuje dinamičko programiranje (7).

Optimalne odluke $u^{1*}, u^{2*}, \ldots$, za igrača 1 kao i optimalna vrednost funkcije efekta F^* zavise i od naše pretpostavke o redosledu poteza igrača. U teoriji je razmotren i slučaj kada svoje odluke oba igrača biraju istovremeno. Tada, umesto da oba igrača biraju na svakom koraku k svoje odluke — određene brojne vrednosti, oni biraju raspodele verovatnoća za u^k i v^k. Ako igrač 1 u svakom periodu ima m mogućih odluka, a igrač 2, n mogućih odluka, tada u svakom periodu treba naći verovatnoće $p_1^k, \ldots, p_m^k$ i $q_1^k, \ldots, q_n^k$, $k = 0, \ldots, K-1$, koje daju optimalnu vrednost očekivane vrednosti efekata. Te verovatnoće su optimalne strategije za oba igrača. Prema poznatoj minmax teoremi J. von Neumanna optimalne strategije u ovom slučaju ne zavise od redosleda poteza igrača.

U određivanju optimalnih strategija može se i u ovom slučaju primeniti algoritam dinamičkog programiranja. Praktična vrednost algoritma zavisi od broja komponenata vektora stanja x^k i vektora odluka u^k, v^k, ali isto tako i od brojeva mogućih odluka m, n. Ako su $m \leq 5$, $n \leq 5$, računske teškoće u primeni algoritma dinamičkog programiranja su još uvek savladive, uz pomoć dovoljno snažnih računara.

9. MEDIJALNA KONKURENTSKA IGRA

Poslednjih pet godina razvija se zanimljiva teorija medijalnih konkurentskih igara dva igrača. Čini se da ona može imati praktičnu primenu. Ova teorija se zasniva na predstavljanju raspodele efekata za oba igrača pomoću medijana efekata. Slično kao u paragrafu 5, igra se predstavlja platežnim matricama čiji su elementi parovi brojeva koji konstituišu moguće ishode igre a poznati su obojici igrača. Kaže se da igrač postupa protektivno ako pokušava da maksimizira svoj efekat bez obzira na efekat drugog igrača. Kaže se da igrač postupa vindiktivno ako pokušava da minimizira efekat drugog igrača, bez obzira kakav će biti njegov efekat.

Teorema. Postoji najveća vrednost P, (Q), u platežnoj matrici za igrača 1, (2), tako da ako igra protektivno, igrač može osigurati bar ovaj efekat sa verovatnoćom bar 1/2.

Teorema. Postoji najmanja vrednost P', (Q'), u platežnoj matrici za igrača 1, (2), tako da ako igra vindiktivno, igrač 2, (1) može osigurati sa verovatnoćom bar 1/2, da igrač 1, (2) postigne najviše ovaj efekat.

Dokazuje se da važi: $P' \leq P$, $Q' \leq Q$.

Neka je A, (B) skup onih ishoda kada je efekat za igrača 1, (2) bar P, (Q), a efekat za igrača 2, (1) najviše Q', (P'). Kaže se da je igra medijalna — konkurentska ako igrači mogu osigurati sa verovatnoćom bar 1/2 da će se desiti jedan ishod iz skupa A, (B). Optimalna strategija za jednog igrača postoji ako i samo ako je igra medijalna konkurentska u odnosu na njega (9).

10. POGODBENA IGRA

Specifična oblast teorije igara je teorija pogodbi. Ova teorija prvenstveno razmatra ponašanje dva igrača — učesnika u pogodbi, kada se ovi nađu u uslovima bilateralnog monopola. Ove igre objasnićemo na jednom primeru koga smatramo tipičnim. Transportno preduzeće kao ponuđač transportnih usluga i proizvodno preduzeće kao korisnik tih usluga često formiraju bilateralni monopol. Od interesa je teorijsko razmatranje ponašanja tih dvaju organizacija u međusobnim pregovorima o kupoprodaji transportnih usluga. Razmotrićemo najjednostavniji teorijski slučaj u kome se pregovori odvijaju na sledeći način. Jedno preduzeće predlaže jediničnu cenu prevoza i količinu tereta za transport koja bi bila predmet ugovora. Drugo preduzeće prihvata predlog ili daje svoj predlog. Oba preduzeća nekada uspevaju da posle pregovora dođu do ugovornih odnosa, čiji su glavni elementi jedinična cena prevoza i količina tereta koju treba prevesti u ugovornom periodu. U teorijskom smislu osnovna tendencija ovih ugovaranja je doći do količine tereta koja maksimizira zbir dobiti oba preduzeća, i do cene koja tu dobit pravedno deli. Mi ćemo detaljnije razmotriti jedan teorijski slučaj u kome pretpostavljamo ravnopravan odnos pregovarača i njihovu jednaku ekonomsku snagu.

Neka transportno preduzeće karakteriše linearna funkcija srednjih troškova transporta,

$$C/Q = A_T + B_T Q$$

gde je Q — količina prevezenog tereta, C — ukupni troškovi transporta, A_T i B_T — parametarski pokazatelji transportnog preduzeća.

Neka korisnika transporta karakteriše linearna funkcija jediničnog prihoda,

$$R/Q = A_P - B_P Q$$

gde je R — ukupan prihod proizvođača, A_P i B_P — parametarski pokazatelji proizvodnog preduzeća. Ukupna dobit oba preduzeća je,

$$D = D_1 + D_2 = R - C = A_P Q - B_P Q^2 - A_T Q - B_T Q^2;$$

Dobit D će biti maksimalna kada je,

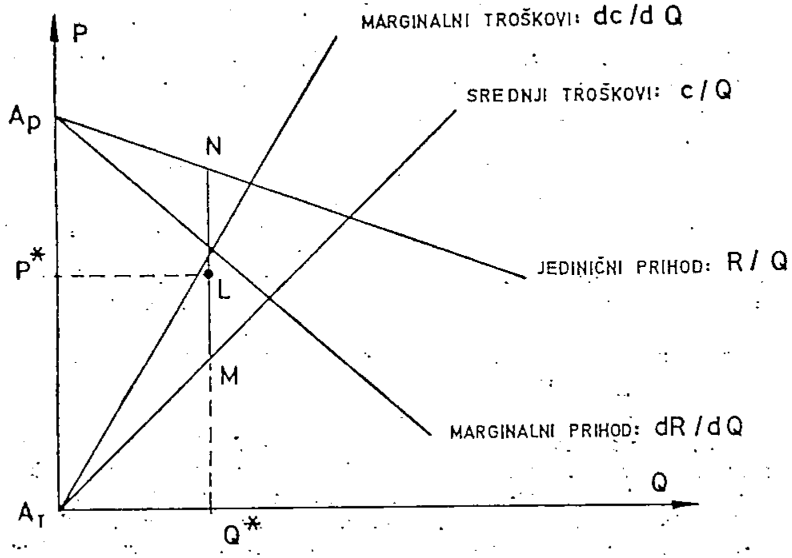
$$Q^* = (A_P - A_T) / 2\,(B_P + B_T)$$

Na sl. 3. prikazani je skup cena (segment MN) koji odgovara Q^*, a to su Pareto optimalne cene. Bilo koji ugovor čiji su elementi Q^*, P iz ovog skupa ima sledeću osobinu: ne postoji drugi ugovor kojim bi se simultano poboljšale dobiti oba partnera; ugovori izvan MN parova Q, P će umanjiti jediničnu dobit bar jednog preduzeća. Od interesa je tačka L na sredini Pareto segmenta kojoj odgovara cena P^*,

$$P^* = (A_P B_T + A_T B_P) / (B_P + B_T)$$

Ovom cenom ukupna dobit se deli između preduzeća na jednake delove.

Postoje zanimljivi teorijski rezultati i za složenije pogodbene igre (10). Razvoj ove teorije ide u više pravaca kao na primer: (i) srednji troškovi i/ili funkcija jediničnog prihoda preduzeća ugovarača nisu linearni i ne poznajemo ih analitički, već su dati u obliku tabelarne zavisnosti od Q, P; (ii) preduzeća — pregovarači nemaju istu ekonomsku snagu, već jedno od njih je u položaju da diktira cenu; (iii) umesto bilateralnog monopola postoji oligopol — kada na tržištu ima više velikih ponuđača usluga; (iv) ugovarači ne poseduju potpune informacije o partnerima (o prihodu i troškovima).



Sl. 3

11. IGRA SA DOMINANTNIM I PODREĐENIM IGRAČEM

Igrači ne moraju uvek biti ravnopravni, već jedan može biti dominantan. Dominantnost je posledica veličine ili moći, brzine obrade podataka ili jednostavno nedostatka informacija kod jednog od igrača. To se održava na taj način što jedan igrač, na primer igrač 1, dopušta igraču 2 da ovaj prvi odabira svoju strategiju, pa praktično igrač 2 dominira.

Neka igračima 1 i 2 stoji na raspolaganju izbor po jedne promenljive s_1 i s_2, a njihove funkcije efekta su $P(s_1, s_2)$ i $Q(s_1, s_2)$, respektivno. Oba igrača teže da minimiziraju svoje P odnosno Q pri čemu je izbor promenljivih ograničen: $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, a još pri tome prvo se bira s_2 a zatim s_1.

Ako postoji preslikavanje T kojim se za svako $s_2 \in S_2$ određuje $s_1 = Ts_2$, i to tako da je $P(Ts_2, s_2) \leq P(s_1, s_2)$ za svako $s_1 \in S_1$, i ako postoji $s_2^{*2} \in S_2$ takvo da je $Q\left(Ts_2^{*2}, s_2^{*2}\right) \leq Q(Ts_2, s_2)$, tada par $\left(s_1^{*2} = Ts_2^{*2}, s_2^{*2}\right)$ predstavlja optimalne strategije za oba igrača, kada je igrač 2 dominantan. Ove strategije nazivaju se optimalne u smislu Stackelberga. Na sličan način definišu se optimalne strategije $\left(s_1^{*1}, s_2^{*1}\right)$ kada je igrač 1 dominantan.

U gornjoj definiciji optimalne Stackalbergove strategije podrazumeva se da podređeni igrač reaguje optimalno na svaki potez dominantnog igrača. Stoga se definiše skup racionalnog reagovanja D_1 za igrača 1 kada je igrač 2 dominantan, a takođe skup D_2 za igrača 2 kada je igrač 1 dominantan,

$$D_1 = \{(s_1, s_2) \varepsilon S_1 \times S_2 : s_1 = T_1 s_2, \quad s_2 \varepsilon S_2\}$$

$$D_2 = \{(s_1, s_2) \varepsilon S_1 \times S_2 : s_2 = T_2 s_1, \quad s_1 \varepsilon S_1\}$$

Ako se formira presek skupova $D_1 \cap D_2$ i ako je on neprazan skup tada postoji Nashova optimalna strategija $\left(s_1^k \; s_2^k\right)$ za oba igrača koji postaju međusobno ravnopravni. I dalje, ako se Stackelbergove strategije poklapaju bez obzira na to koji je igrač dominantan, tada se poklapaju sa Nashovom strategijom, tj. dominantni igrač nema nikakve prednosti.

Dokazuje se da ako su S_1' i S_2' kompaktni skupovi u Euklidovom prostoru, a funkcije P i Q realne i neprekidne na $S_1' \times S_2'$, tada postoje Stackelbergove optimalne strategije (12). One se određuju sledećim postupkom. Prvo se odrede skupovi D_1 i D_2, kao geometrijska mesta tačaka za koje je $\partial P / \partial s_1 = 0$ i $\partial Q / \partial s_2 = 0$. Da bi se našla Stackelbergova optimalna strategija za slučaj da je igrač 2 dominantan, treba potražiti uslovljeni minimum Q, tj. $\min\limits_{s_2 \varepsilon D_1} Q$, i slično tome, kada je igrač 1 dominantan treba potražiti $\min\limits_{s_1 \varepsilon D_2} P$.

Posebno ćemo izložiti postupak određivanja Stackelbergovih strategija za matričnu igru kada su platežne funkcije zadate bimatricom, kao u paragrafu 5. Neka je igrač 2 dominantan. Tada u svakoj koloni $j = 1, \ldots, n$, treba odrediti elemenat sa minimalnim P_{ij}. Skup parova (S_{1i}, S_{2j}) za koji se postiže $\min\limits_{i} P_{ij}$ za svako $j = 1, \ldots, n$ čini skup D_1. Optimalna Stackelbergova strategija je onaj par S_{1i}^{*}, S_{2j}^{*} za koji se postiže minimum Q_{ij} u elementima matrice (P_{ij}, Q_{ij}) za ono i čiji je par $(S_{1i}, S_{2j}) \varepsilon D_1$. Sličnim postupkom nalazi se optimalna strategija za slučaj kada je igrač 1 dominantan.

Primer: *Neka je matrična igra zadata bimatricom*

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 3{,}4 & 2{,}5 & 8{,}5 \\ 4{,}0 & 2{,}3 & 4{,}1 \\ 5{,}3 & 7{,}1 & 6{,}3 \\ 5{,}0 & 3{,}2 & 7{,}2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{array} & \end{array}$$

Potražimo optimalnu Stackelbergovu strategiju za slučaj kada je igrač 2 dominantan. Za svaku kolonu igrač 1 izabraće vrstu pri kojoj se minimizira prvi broj elementa matrice. Tako se formira skup $D_1 = \{(S_{11}, S_{21}), (S_{11}, S_{22}), (S_{12}, S_{23})\}$. *Optimalna Stackelbergova strategija je onaj par iz* D_1 *pri kome je drugi broj elementa matrice najmanji, a to je* (S_{12}, S_{23}). *Njemu korespondentni optimalni efekti za oba igrača su* $\left(P_{ij}^{*2}, Q_{ij}^{*2}\right) = (4, 1)$.

Slično gornjem skup D_2 *je:*

$$D_2 = \{(S_{11}, S_{21}), (S_{12}, S_{21}), (S_{13}, S_{22}), (S_{14}, S_{21})\}$$

Optimalna Stackelbergova strategija kada je igrač 1 dominantan je (S_{11}, S_{21}), *a optimalni efekti za oba igrača su* $\left(P_{ij}^{*1}, Q_{ij}^{*1}\right) = (3, 4)$. *U ovoj igri Nashova strategija je* $(S_{11}, S_{21}) \varepsilon D_1 \cap D_2$. *Pošto se ona poklapa sa Stackelbergovom kada je igrač 1 dominantan, zaključuje se da igrač 1 nema prednosti iako je u dominantnom položaju.*

12. OSVRT NA PRIMENU TEORIJE IGARA

Opšte je mišljenje da se teorija igara retko primenjuje u praksi, iako se u njoj došlo do značajnih i bogatih teorijskih rezultata. Stvarno, činjenica je da gotovo svakodnevno se po naučnim časopisima i zbornicima radova sa naučnih konferencija pojavljuju teorijski doprinosi, a vrlo retko se nalaze prikazi primene, opisi pozitivnih ili negativnih iskustava primene. Zaostajanje primene karakteristično je svuda u svetu, pa i u Jugoslaviji. Istina, učinjeno je par usamljenih pokušaja primene kod nas, ali oni nisu imali ozbiljnijeg značaja za praksu.

Veliki jaz između stanja teorijske misli u oblasti igara i primene teorije u praksi autor ovog pregleda objašnjava sledećim razlozima:

(a) Nedovoljno poznavanje mogućnosti ove teorije od strane onih koji bi mogli biti protagonisti njene primene.

(b) Svaki pokušaj primene je težak istraživački zadatak i polazak od početka, jer se u literaturi gotovo ne mogu naći primeri praktične primene, sem jednostavnih primera akademskog značaja.

(c) Svaka realna primena zahteva kombinovano angažovanje stručnjaka raznih specijalnosti, dakle formu rada na koju nismo dovoljno navikli.

(d) Realna primena zahteva »dobre« ulazne podatke, a njihovo pribavljanje je mukotrpan i dugotrajan posao, zbog čega se često odustaje.

(Rad primljen februara 1974.)

BIBLIOGRAFIJA I KOMENTARI

(1) Videti *Owen, G.*: »Game Theory«, Sounders Co., London, 1965, glava 2 (prevedeno na ruski, Mir, 1971).

(2) Jedna od najpoznatijih knjiga o diferencijalnim igrama je *Isaacs, R.*: »Differential Games«, John Wiley, 1965.

(3) Dokaz ove teoreme nalazi se u knjizi *Intriligator, M. D.*: »Mathematical Optimization and Economic Theory«, Prentice Hall, 1971, (str. 106).

(4) Originalni rad *Nash, J.F.*: »Non-Cooperative Games«, Anals of Mathematics, Vol. 54, 1951, (str. 286—295).

(5) Pregled novijih računskih algoritama za određivanje elemenata Pareto optimalnog skupa može se naći u radu *Ho, Y. C.:* »Differential Games, Dynamic Optimization and Generalized Control Theory«, J. of Opt. Th. and Appl. (JOTA), No. 3, 1970.

(6) Čini se da bi se ova teorija mogla koristiti u formiranju teorijske baze za analizu i sintezu procesa udruživanja, kooperisanja i integracije u samoupravnim odnosima među preduzećima. Naravno to je stvar budućnosti i u tom pravcu treba još mnogo da se radi.

(7) Videti, na primer, pregledni rad *Minichreiter-Klemenčić B.:* »Dinamičko programiranje«, Ekonomska analiza, No. 3—4, 1969.

(8) XIV glava, str. 18—190, poznate knjige *Bellman, R.:* »Adaptive Control Processes«, Princeton Univ. Press, 1961. (prevedeno na ruski, Mir, 1965) posvećena je primeni dinamičkog programiranja u igrama protiv prirode.

(9) Uvod u teoriju medijalnih igara dat je u radu *Wilsh, J.*, Kelleher, G.: »Description of Median Game Theory«, Revie Belge de Statistique et de Recherche Operationnelle, Vol. 10, No. 4, 1971.

(10) Klasično delo u oblasti teorije grupnog odlučivanja i pogađanja je knjiga *Siegel, S., Fouraker, L.:* »Bargaining and Group Decision Making«, McGraw-Hill, 1961.

(11) Videti originalni rad Von Stackelberg, H.: »The Theory of the Market Economy«. Oxford University Press, Oxford, 1952.

(12) Stackelbergove ideje su pre par godina ponovo postale predmet proučavanja. U jednom od novijih radova analizirane su mnoge nove osobine Stackelbergovih strategija: Simaan M., Cruz J. B.: »On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games«, JOTA, Vol. 11, No. 5, pp. 533—555, 1973.

BIBLIOGRAFIJA

— deset odabranih knjiga —

1. Aumann, R. J., *A Surway of Cooperative Games without Side Payments,* Princeton University Press, 1967.
2. Intriligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory,* Prentice-Hall 1971.
3. Kaufmann, A., Faure, R., Le Garff, A., *Le jeux d'entreprises,* Presses Universitaires de France, Paris, 1960. (prevedeno na ruski, Mir, 1966).
4. Luce, R. D., Raiffa, H., *Games and Decisions,* John Wiley, 1957.
5. Owen, G., *Game Theory,* Saunders Co. London, 1968. (prevedeno na ruski, Mir, 1971).
6. Shapley, L. S., Shubik, M., »Concepts and Theory of Pure Competion«, Princeton University Press, 1967.
7. Shubik, M. Ed., *Game Theory and Social Behavior,* John Wiley, 1964.
8. Ventcelj, E. S., *Elementi teorije igara,* Fizmatgiz, 1959, (na ruskom).
9. Von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1944.
10. Vorobjev, N. N., *Matematička teorija igara,* Znanie, Lenjingrad, 1963, (na ruskom).

JEDNO PROŠIRENJE ISBELL-MARLOWLJEVE METODE

J. R. Isbell i W. H. Marlow [1] autori su prve metode u razlomljeno linearnom ili hiperboličkom programiranju. Prošle godine M. Grunspan i M. E. Thomas [2] poopćili su tu metodu da bi riješili problem cjelobrojnog hiperboličkog programiranja. Ovdje ćemo pokazati da se originalni Ibell-Marlowljev algoritam može proširiti na pseudokonveksno razlomljeno nelinearno programiranje.

1. Isbell-Marlowljev algoritam

Isbell i Marlow razmatrali su problem maksimalizacije numeričke diferencijabilne funkcije

$$z = \frac{C'X + c_0}{D'X + d_0} \tag{1}$$

na zatvorenom i ograničenom konveksnom skupu

$$S = \{X \mid AX \leq A_0,\ X \geq 0\}, \tag{2}$$

uzimajući da je

$$D'X + d_0 > 0 \qquad \text{za svako } X \in S \tag{3}$$

Njihova zamisao bila je da se problem razlomljeno linearnog programiranja (1) — (3) svede na rješavanje niza problema linearnog programiranja. U tu svrhu oni polaze od nekog X_1 iz S da bi riješili problem

$$\max[f(X) = (D'X_1 + d_0)(C'X + c_0) - (C'X_1 + c_0)(D'X + d_0)] \quad X \in S. \tag{4}$$

Budući da je X_1 moguće rješenje, $\max f(X) \geq 0$. Naime, ako je X_1 optimalno rješenje linearnog programa (4), tada je $\max f(X) = 0$ i problem (1) — (3) jest riješen. Ako X_1 nije optimalno rješenje, tada je $\max f(X) > 0$. Neka je $f(X_2) = \max f(X)$. Tada iz $f(X_2) > 0$ i pretpostavke (3) slijedi da je $z(X_2) > z(X_1)$, tj. rješenje X_2 je bolje od X_1 za problem (1) — (3). Sada se postupak iterira. U funkciju cilja problema (4) dolazi X_2 umjesto X_1 pa se novi problem riješi. Ako je X_2 optimalno rješenje tog problema, tada