EKONOMSKA ANALIZA,
2, XIV (1980), 279—286

O JEDNOM BIKRITERIJALNOM PROBLEMU IZBORA PROJEKTA

*Ljubomir MARTIĆ**

1. UVOD

U mojoj knjizi "Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize" čitavo jedno poglavlje bavi se primjenama cjelobrojnog programiranja u investicionom odlučivanju. Posljednji odjeljak tog poglavlja nosi naslov "Izbor projekta po više kriterija". U njemu sam izbor optimalne kombinacije projekata zapisao kao problem bikriterijalnog programiranja ovako:

$$\begin{aligned}
&Min\, z_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \\
&Max\, z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ (i = 1,2, \ldots, m) \\
&x_j \in \{0, 1\}, \ (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{1}$$

U prvoj funkciji cilja $t_j > 0$ je vrijeme povrata uloženih sredstava u j-ti projekt, a u drugoj funkciji cilja $c_j > 0$ je sadašnja neto vrijednost tog j-tog projekta. Parametri u ograničenjima dobiveni su diskontiranjem. Naime, a_{ij} je sadašnja vrijednost izdataka na projekt j u periodu i, dok je b_i sadašnja vrijednost plafona na izdatke u periodu i. Zapravo, sve su to očekivane vrijednosti. Iz prirode problema proizlazi da će izbor pasti bar na jedan projekt, tj. da $x = 0$ nije rješenje problema.

Rješavanje problema (1) može se svesti na rješavanje jednokriterijalnog problema:

* Ekonomski fakultet u Zagrebu.

$$Max \frac{(-t')\,x}{c'x} \qquad (2)$$

$$x \in S,$$

gdje je $t\,x = z_1$, $c\,x = z_2 > 0$, a S je skup mogućih rješenja problema (1), tj. skup mogućih 0—1 točaka. Naime, s jedne strane problem (2) ekvivalentan je problemu kontinuiranog hiperboličkog programiranja:

$$Max \frac{(-t')\,x}{c'x} \qquad (3)$$

$$x \in conv\, S,$$

gdje je conv S oznaka za konveksnu ljusku 0—1 točaka iz S. Sa druge strane poznato je da je optimalno rješenje problema (3) efikasno rješenje kontinuiranog bikriterijalnog problema: min z_1, max z_2, $x \in$ conv S.[1]) Konačno, taj kontinuirani problem ekvivalentan je problemu (1) u smislu da im je zajednički skup efikasnih bazičnih rješenja. Naime, svaka točka iz skupa S ekstremna je točka skupa conv S.

U spomenutoj knjizi ilustrirao sam rješavanje problema (1) na jednom numeričkom primjeru. Jedno efikasno rješenje dobio sam sekvencijalnom optimalizacijom.[2]) Problem (2) u knjizi je samo zapisan ali nije i riješen. To ćemo ovdje uraditi. U trećem odjeljku pokazat ćemo kako se problem (2) rješava jednom specijalizacijom Dinkelbachove metode iz kontinuiranog hiperboličkog programiranja, a u četvrtom odjeljku ovoga rada riješit ćemo tom metodom spomenuti numerički primjer. Zanimljivo je da se u svakom ciklusu našeg algoritma dobiva po jedno efikasno rješenje problema (1).

2. PROBLEM HIPERBOLIČKOG 0—1 PROGRAMIRANJA

Razmotrimo problem:

$$Max\, z(x) = \frac{c'x + c_o}{d'x + d_o} \qquad (4)$$

$$x \in S = \{x \in B^n_2 \mid Ax \leq b\},$$

gdje je $d'x + d_o > 0$ za $x \in S$, a B^n_2 je kombinirani n-produkt od $B_2 = \{0,1\}$. Problem (4) je specijalni problem pseudobooleovog programiranja, budući da su i razlomljena funkcija cilja i linearne funkcije u ograničenjima pseudobooleove funkcije.[3]) Svaki lokalni maksimum funkcije z(x), pod pretpostavkom da joj je nazivnik pozitivan, jest globalni maksimum.[4]) Kaže se, naime, da z(x) ima lokalni maksimum u točki x^*, ako je $z(x) \leq z(x^*)$ za svaki vektor x takav da je $\sum_{j=1}^{n} |x_j - x^*_j| = 1$.

[1]) Vidi Lj. Martić [6], teorem 5.1, str. 49.

[2]) O sekvencijalnom pristupu problemu višekriterijalnog programiranja vidi u Lj. Martić [6], str. 4.

Peter L. Hammer (Ivanescu) i Sergiu Rudeanu [4] prvi se bave problemom hiperboličkog 0—1 programiranja. Oni minimaliziraju funkciju z, pretpostavljajući da je $c_j \geq 0$ i $d_j > 0$, $(j = 0, 1, \ldots, n)$. I Pierre Robillard [8] razmatra minimum funkcije z uz iste pretpostavke na parametre. On je razvio dva algoritma; prvi za slučaj neograničene, a drugi za slučaj ograničene minimalizacije. M. Florian i P. Robillard [2] studiraju nešto općenitiji problem hiperboličkog bivalentnog programiranja. Naime, oni pretpostavljaju samo da je $d_j > 0$ za svako j. Florian i Robillard razvili su algoritam, sličan Isbell-Marlowljevoj proceduri, po kojem se rješavanje hiperboličkog problema svodi na rješavanje konačnog niza linearnih problema.[5]) Još dva autora koriste se metodom J. R. Isbella i W. H. Marlowa. To su M. Grunspan i M. E. Thomas [3] koji razmatraju opći problem hiperboličkog cjelobrojnog programiranja. Kad se ograniče na rješavanje hiperboličkog bivalentnog problema, pokaže se da je njihov algoritam sasvim sličan Florian-Robillardovom.

3. ALGORITAM

Neka je x^o bilo koja točka iz S. Nadalje, neka je $z_1(x)$ oznaka za brojnik, a $z_2(x)$ oznaka za nazivnik funkcije z(x). Tada je očigledno da je

$$Max \left(\frac{z_1(x)}{z_2(x)} - z(x^o)\right) \geq 0, \; x \in S. \qquad (5)$$

Budući da je $z_2(x) > 0$ za svaki $x \in S$, iz (5) slijedi da je

$$Max\,(z_1(x) - z(x^o)\, z_2(x)) \geq 0\,, x \in S. \qquad (6)$$

To se može zapisati i ovako:

$$Max\,([c' - z(x^o)\, d']\, x + c_o - z(x^o)\, d_o) \geq 0\,, x \in S. \qquad (7)$$

ili

$$Max\,([c' - z(x^o)\, d']\, x \geq z(x^o)\, d_o - c_o\,, \; x \in S. \qquad (7')$$

[3]) Neka funkcija je pseudobooleova ako su joj argumenti u Booleovoj algebri $B_2 = \{0, 1\}$ a vrijednosti u skupu realnih brojeva R.

[4]) Vidi dokaz teorema 8 na str. 155 u knjizi Hammera i Rudeanua [4].

[5]) Vidi prikaz Isbell-Marlowljeve metode u radu Lj. Martić [5].

Evidentno je da je x^o optimalno rješenje problema (4), ako i samo ako je maksimum u (6) jednak nuli odnosno maksimum u (7') jednak $z(x^o)\,d_o - c_o$. Ako je rješenje od (6) vektor $x^1 \neq x^o$, supstituira se x^1 za x^o, pa se riješi novi problem (6) itd.[6])

Algoritam se može sažeti u slijedeća četiri koraka.

1. Nađe se neko moguće rješenje $x^o \in S$ i stavi $k = 1$.
2. Definira se slijedeći problem linearnog 0—1 programiranja.

$$Max\ f_k(x) = [c' - z(x^{k-1})\,d']\,x\,, x \in S. \tag{8}$$

3. Riješi se problem (8) nekom pogodnom metodom, recimo Balasovom metodom implicitne enumeracije. Optimalno rješenje označi se sa x^k.
4. Ako je $max\,f_k(x) = z(x^{k-1})\,d_o - c_o$, tada je $x^k = x^{k-1}$ optimalno rješenje problema (4). U protivnom slučaju prelazi k u k + 1 pa se ide natrag na korak 2.

Opisani algoritam konvergira, jer skup S sadrži konačno mnogo mogućih rješenja. Algoritam generira konačan niz točaka (x^k) tako da je $z(x^{k-1}) \leq z(x^k)$ za svako k. Kad za neko k dođe do jednakosti $z(x^{k-1}) = z(x^k)$, to povlači za sobom $f_k = z(x^{k-1})\,d_o - c_o$ pa je $x^{k-1} = x^k$ optimalno rješenje hiperboličkog problema.

Interesantna je veza između optimalnog rješenja problema (8) i skupa efikasnih rješenja problema (1). O tome govori slijedeći teorem.

Teorem 1. Optimalno rješenje problema (8) za svako $k = 1, 2, \ldots$ efikasno je rješenje bikriterijalnog linearnog problema (1).

Dokaz. Funkcija cilja u (8) je varijabilni dio funkcije cilja u (6). U problemu (6) je $z(x^o) < 0$. Naime, problem (1) ekvivalentan je problemu (2), a funkcija cilja u problemu (2) je $z(x) < 0$ za svako $x \in S$. Prema tome, u (6) se maksimalizira linearna kombinacija (ponderirana suma) funkcija $z_1(x)$ i $z_2(x)$ sa pozitivnim koeficijentima (ponderima) $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -z(x^o)$. No, poznato je (Vidi npr. G. R. Bitran [1], str. 132) da je optimalno rješenje takvog problema ujedno i efikasno rješenje odgovarajućeg bikriterijalnog problema, tj. problem (1).

Naš algoritam u svakom svom ciklusu producira, dakle, po jedno efikasno rješenje x^k. Posljednje efikasno rješenje x^*, tj. optimalno rješenje hiperboličkog problema, može se tretirati kao najbolje s obzirom na dodatni kriterij izražen hiperboličkom funkcijom cilja. Naime, po tom kriteriju program investicija x^* pruža maksimalnu sadašnju neto vrijednost po jedinici vremena povrata uloženih sredstava (Vidi numerički primjer).

Algoritam se može geometrijski interpretirati na slijedeći način.

Pođe se od neke točke $x^o \in S$ i skupa točaka

$$N = \{x \mid z_1(x) = 0,\ z_2(x) = 0,\ x \in R^n\}. \tag{9}$$

[6]) Opisana metoda u suštini je specijalizirana Dinkelbachova metoda, svojedobno razvijena za kontinuirani problem hiperboličkog programiranja a vrlo malo se razlikuje od Isbell-Marlowljeve metode (Vidi Lj. Martić [6], str. 44).

To dvoje, točka x^o i skup N određuju hiperravninu

$$z_1(x) - z(x^o)\,z_2(x) = 0 \tag{10}$$

ili

$$f_1(x) = z(x^o)\,d_o - c_o\,. \tag{10}$$

U trećem koraku algoritma ta hiperravnina se translatira do optimalne ekstremne točke x^1 konveksne ljuske od S. Sada točka x^1 i skup N određuju novu hiperravninu

$$f_2(x) = z(x^1)\,d_o - c_o\,. \tag{11}$$

U prvom ciklusu algoritma hiperravnina (10) prelazi, zapravo, rotacijom oko N u hiperravninu (11). Ako je (11) potporna hiperravnina konveksne ljuske skupa S, algoritam se zaustavlja. Točka x^1 je optimalna za funkciju z(x). U protivnom slučaju hiperravnina (11) se translatira do optimalne ekstremne točke x^2 itd.

4. *Primjer izbora projekta po dva kriterija*

Treba naći efikasno rješenje slijedećeg bikriterijalnog problema:

$$Min\ z_1 = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 5x_8 + 4x_9 + 7x_{10}$$

$$Max\ z_2 = 20x_1 + 18x_2 + 17x_3 + 15x_4 + 15x_5 + 10x_6 + 5x_7 + 3x_8 + x_9 + x_{10}$$

$$30x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 18x_4 + 17x_5 + 11x_6 + 5x_7 + 2x_8 + x_9 + x_{10} \leq 55$$

$$x_j = 0 \text{ ili } 1\,,\ (j = 1, 2, \ldots, 10)$$

Taj problem svodi se na problem hiperboličkog bivalentnog programiranja:

$$Max\ z = \frac{-3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 6x_5 - 3x_6 - 6x_7 - 5x_8 - 4x_9 - 7x_{10}}{20x_1 + 18x_2 + 17x_3 + 15x_4 + 15x_5 + 10x_6 + 5x_7 + 3x_8 + x_9 + x_{10}}$$

uz isto ograničenje.

Polazimo od mogućeg rješenja

$$x^o = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)'$$

To je, naime, rješenje linearnog problema max z_2 uz gornja ograničenja na varijable. $z(x^o) = -\dfrac{37}{50}$.

U drugom koraku definiramo problem:

$$Max\, f_1(x) = \frac{59}{5}x_1 + \frac{233}{25}x_2 + \frac{379}{50}x_3 + \frac{51}{10}x_4 + \frac{51}{10}x_5 + \frac{22}{5}x_6 - \frac{23}{10}x_7 - \frac{139}{50}x_8 - \frac{163}{50}x_9 - \frac{313}{50}x_{10}$$

$$30x_1 + 25x_2 + \ldots + x_{10} \leq 55,\ x_j \in \{0, 1\}.$$

Taj problem riješili smo Balasovom aditivnom metodom. Maksimum od $f_1(x)$ postiže se u točki $x^1 = (1, 1, 0, \ldots, 0)'$ a $z(x^1) = -\frac{7}{38}$.

Sada se aditivna metoda primijeni na problem:

$$Max\, f_2(x) = \frac{1}{38}(26x_1 - 26x_2 - 71x_3 - 123x_4 - 123x_5 - 44x_6 - 193x_7 - 169x_8 - 145x_9 - 259x_{10})$$

uz ista ograničenja na varijable.

Funkcija $f_2(x)$ postiže maksimum u točki $x^2 = (1, 0, \ldots, 0)'$ gdje je $z(x^2) = -\frac{3}{20}$.

Sada treba riješiti problem:

$$Max\, f_3(x) = -\frac{1}{20}(26x_2 + 49x_3 + 75x_4 + 75x_5 + 30x_6 + 105x_7 + 91x_8 + 77x_9 + 137x_{10})$$

uz ista ograničenja. Očigledno je da je najbolje rješenje $x^3 = (1, 0, \ldots 0)$. No, $x^3 = x^2$ pa je x^2 optimalno rješenje razmatranog hiperboličkog bivalentnog problema. Prema teoremu 1 oba rješenja, x^1 i x^2, su efikasna rješenja našeg bikriterijalnog problema izbora projekta. Prema rješenju x^1 treba izabrati prva dva projekta od deset ponuđenih, a prema rješenju x^2 treba izabrati samo prvi projekt. Izbor x^1 je bolji po kriteriju maksimalne sadašnje neto vrijednosti od izbora x^2, ali je x^2 bolji od x^1 po kriteriju minimalnog vremena povrata uloženih sredstava. Prema tome, postoji indiferencija u odlučivanju između x^1 i x^2. Oba izbora su kompromisna rješenja s obzirom na spomenuta dva kriterija. Drugo kompromisno rješenje je bolje utoliko što daje veću sadašnju neto vrijednost po jedinici vremena povrata uloženih sredstava. Naime, sadašnja neto vrijednost prvog projekta odnosi se prema vremenu povrata uloženih sredstava kao 20:3 dok je za prva dva projekta taj omjer samo 38:7. Treba primijetiti da je i početno rješenje x^0 efikasno što sam utvrdio u citiranoj knjizi, uzevši da je sadašnja neto vrijednost prvostepeni a vrijeme povrata uloženih sredstava drugostepeni kriterij izbora projekta. Stoga je x^0 bolje rješenje po tom prvom kriteriju od x^1 i x^2, ali i gore po drugom kriteriju od ta dva rješenja. Osim toga početno rješenje ima najniži omjer (50:37) sadašnje neto vrijednosti i vremena povrata uloženih sredstava.

Primljeno: 5. 2. 1980.
Prihvaćeno: 15. 2. 1980.

L I T E R A T U R A

1. G.R. Bitran, Linear Multiple Objective Programs With Zero — One Variables, *Mathematical Programming*, Vol. 13, 1977, No. 2, 121—139.
2. M. Florian et P. Robillard, Programmation hyperbolique en variables bivalentes, *Revue francaise d'informatique et de recherche opérationnelle*, Vol. 5, 1971, No. 1, 3—9.
3. M. Grunspan and M.E. Thomas, Hyperbolic Integer Programming, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 20, 1973, No. 2, 341—356.
4. P.L. Hammer and S. Rudeanu, *Boolean Methods in Operations Research*, Berlin, 1968.
5. Lj. Martić, Jedno proširenje Isbell-Marlowljeve metode, *Ekonomska analiza*, Vol. 8, 1974, No. 3—4, 273—278.
6. Lj. Martić, *Višekriterijalno programiranje*, Zagreb, 1978.
7. Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Zagreb, 1980.
8. P. Robillard, (0, 1) Hyperbolic Programming Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 18, 1971, No. 1, 47—58.

ON A BICRITERION PROJECT SELECTION PROBLEM

Ljubomir MARTIĆ

S u m m a r y

In this paper we study a capital budgeting problem expressed as a bicriterion pseudo-Boolean programming problem (1). The symbol t_j in the first function and c_j in the second objective function represent the payback period and the present net value of investment project j, respectively. In Section 1 we show that one solution to problem (1) can be obtained by solving problem (2), and that is the 0—1 hyperbolic programming problem. Namely, the optimal solution to problem (2) is one of

the basic efficient solutions to problem (1). In Section 2 we show how the 0—1 hyperbolic programming problem has been solved by different authors, from Hammer and Rudeanu [4] to Grunspan and Thomas [3]. In Section 3 we show an algorithm similar to the one by Florian-Robbilard [2], by which problem (4) is reduced to solving series of linear problems (8).

Then, theorem 1 is proved, according to which the optimal solution to problem (8) is the efficient solution to the bicriterion linear problem. Thus, our algorithm, in each of its cycles, produces one efficient solution x^k. The last efficient solution x^*, and that is the optimal solution to the hyperbolic problem, can be treated as the best one, regarding the criterion expressed by the fractional objective function. Namely, according to this criterion, the investment programme x^* gives maximum present net value per payback unit. At the end of Section 3, a geometrical interpretation of the proposed algorithm is given.

In the last section, the algorithm from Section 3 is illustrated using a numerical example. In each cycle, Balas' additive method is applied to the problem (8). The results are two efficient solutions, x^1 and x^2, the last of which is the optimal solution to the hyperbolic problem.

EKONOMSKA ANALIZA,
2, XIV (1980), 287—304

UTJECAJ PROMJENA U TEHNOLOŠKOJ MATRICI NA PROIZVODNJU POJEDINIH SEKTORA

*Mate BABIĆ**

UVOD

U procesu izrade plana input-output model se integrira s drugim analitičkim modelima. Prednost je input-output modela, pred drugim modelima, u tome što input-output model povezuje parcijalne i globalne analitičke pristupe i na taj način omogućuju simultano planiranje međuzavisnih dijelova privrednog sistema, kao i pojedinih aspekata funkcioniranja cjelokupnog procesa reprodukcije. Na taj način input-output model daje cjelovitu kvantitativnu sliku o proizvodnim međuzavisnostima pojedinih dijelova procesa reprodukcije. Zbog toga input-output modeli predstavljaju nenadoknadiv okvir za koordinaciju razvojnih odluka pojedinih subjekata planiranja (OOUR-a).

Osim strukturnog usklađivanja i bilanciranja, kojim se u procesu izrade plana ispituje konzistentnost ciljeva, a time i sama izvedivost pojedinih planskih proporcija, input-output model omogućuje da se već u procesu izrade plana ispituju složene reperkusije pojedinih varijanti plana na sve elemente privredne strukture. Na taj se način mogu otkriti osnovni strukturni problemi, prije svega u proizvodnoj sferi, koji se u planskom razdoblju mogu očekivati. Tako se pomoću input-output modela mogu identificirati proizvodni sektori koji predstavljaju limitirajuće faktore razvoja i dovode u pitanje ostvarivanje planskih proporcija, ali i uvjete i načine njihova usklađivanja i složene implikacije koje bi takva usklađivanja imala na sve elemente privredne strukture.

FORMULIRANJE INPUT-OUTPUT MODELA ZA PLANIRANJE

Osnovna prednost input-output modela pred drugim modelima jest njegova primjena u analizi strukture proizvodnih međuzavisnosti svih sektora na koje je narodna privreda raščlanjena.[1])

* Fakultet za vanjsku trgovinu, Zagreb.

[1]) O problemima dezagregiranja vidi opširnije u: M. Babić: »Osnove input-output analize«, Narodne novine, Zagreb, 1978. i M. Sekulić: »Primjena strukturnih modela u planiranju privrednog razvoja«, Narodne novine, Zagreb, 1968.