CUBO, Vol. 2, Marzo 1986
Pág. 57-65

ALGORITMOS HINDUES

Lionel Henríquez B. *

Los Vedas son los libros sagrados de la religión Hindú y su principal característica es que en ellos no sólo se relatan materias espirituales, sino que también, de manera tácita, se desprenden expresiones que corresponden a otras disciplinas cultivadas en la India ancestral; y, como es natural esperarlo, las matemáticas están en ellos, dado que es un conocimiento básico en toda cultura, las que aparecen bajo la forma de aforismos que, por lo complejo de la escritura del sánscrito, son difíciles de interpretar.

De los aforismos o Sutras o Algoritmos conocidos, se darán a conocer tres que por su relevancia para la enseñanza de la matemática básica, tiene mucho sentido consignarlos o glosarlos de alguna manera.

* Profesor del Instituto de Matemática, Universidad Austral de Chile.

1.- Nikhilam.

Este algoritmo se basa en la siguiente propiedad algebraica:

$$(x - a)\ (x - b) = x\ (x - a - b) + a\,b$$

en esta expresión, la letra x se denomina la base y generalmente toma como valor, una potencia de 10 o algún sumbúltiplo de esta potencia.

Por simplicidad este algoritmo se dará a conocer medianteun par de ejemplos.

Ejemplo 1. Considérese la multiplicación entre los enteros 6 y 8.

Como $6 = 10 - 4$ y $8 = 10 - 2$, entonces,

$$\begin{aligned} 6,8 &= (10-4)\ (10-2) \\ &= 10\ .\ (10-4-2) + 4\ .\ 2 \\ &= 10\ .\ (6-2) + 8 = 48 \end{aligned}$$

ahora, escribiendo este último resultado en la forma siguiente:

$\underline{10}|$

$6 - 4 \longrightarrow 10\ .\ (8 - 4) + 4\ .\ 2 = 48$

$8 - 2 \longrightarrow 10\ .\ (6 - 2) + 4\ .\ 2 = 48$

$\overline{\ 4 \qquad 8\ }$

Ejemplo 2. Consideremos 7 . 6

10|

$$
\begin{array}{ccc}
 & 7 \; - \; 3 & \\
 & 6 \; - \; 4 & \\
\hline
 & 3 \quad 2 & \\
+ & 1 & (*) \\
\hline
 & 4 \quad 2 &
\end{array}
$$

NOTA: Se cree que la cruz dió origen al signo x para la multiplicación.

2.- Ūrdhva - Tiryagbhyām.

Este sutra se basa en la multiplicación de dos polinomios reales de grado $\leq r$.

Sean $p(x),\ q(x) \in \mathbb{R}_r[x]$, tales que:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , \quad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i ,$$

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad n \leq m, \quad n+m \leq r.$$

entonces:

$$p(x) . q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i = s(x), \text{ donde:}$$

(*) Para poder adicionar el entero 12, éste se escribe como: $\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$

$$\left.\begin{array}{l}
c_0 = a_0 b_0 \\
c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
c_k = \displaystyle\sum_{i+j=k} a_i b_j \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
c_{n+m} = a_n b_m
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

NOTA: Estas fórmulas mediante una buena ejercitación es posible memorizarlas.

Es claro que cualquier número natural, lo podemos escribir como:

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$, donde los a_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ son los dígitos del número natural. Aquí el número 10, se le denomina base.

Luego, la multiplicación entre dos enteros cualquiera quedaría como:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 10^i = \sum_{i=0}^{n+m} c_i \cdot 10^i$$

y para multiplicarlos se usa (I).

Ejemplo: 2713 . 465

Usando (I) se tiene:

1. $2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2 = 8 \cdot 10^5$
2. $(7 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^1) = 40 \cdot 10^4$
3. $(1 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^1) + (2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^0) = 56 \cdot 10^3$
4. $(3 \cdot 10^0 \cdot 4 \cdot 10^2) + (1 \cdot 10^1 \cdot 6 \cdot 10^1) + (7 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^0) = 53 \cdot 10^2$
5. $(3 \cdot 10^0 \cdot 6 \cdot 10^1) + (1 \cdot 10^1 \cdot 5 \cdot 10^0) = 23 \cdot 10^1$
6. $3 \cdot 10^0 \cdot 5 \cdot 10^0 + 15 \cdot 10^0$

De donde:

$$2713 \cdot 465 = 8 \cdot 10^5 + 34 \cdot 10^4 + 56 \cdot 10^3 + 53 \cdot 10^2 + 23 \cdot 10^1 + 15 \cdot 10^0 = 1.261 \cdot 545$$

Puesto que las fórmulas dadas en (I) , se pueden memorizar mediante una buena ejercitación, el procedimiento anterior se reduce a la aplicación directa de la sutra en la siguiente forma:

Los resultados entregados por (I) se ubican de acuerdo al siguiente arreglo (conforme a las potencias de 10):

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 8 & 0 & 6 & 3 & 3 & 5 \\
+ & 4 & 5 & 5 & 2 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 5
\end{array}$$

A pesar de ser una muy buena metodología para la multiplicación de números enteros, tiene la desventaja, que si ésta no se usa a menudo, las fórmulas dadas en (I) se olvidan. Para evitar este problema se sugiere la siguiente regla nemotécnica:

Fórmese con los dígitos de los enteros, las matrices fila $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y efectúese la multiplicación matricial

$$\bar{a} \cdot \bar{b}^t = (c_{ij}),$$

entonces la suma de los elementos de la diagonal no principal de la matriz (c_{ij}), corresponderá a los resultados dados por (I).

Así en el ejemplo anterior se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (4 \quad 6 \quad 5) = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 28 & 42 & 35 \\ 4 & 6 & 5 \\ 12 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

NOTA: Esta metodología permite multiplicar fácilmente polinomios con varios términos.

3.- <u>Parāvartya</u>.

Recuérdese del álgebra elemental lo siguiente:

i) Dados los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, con $q(x) \neq 0$, el teorema del algorimto de división, permite encontrar otros dos polinomios $s(x)$ y $r(x)$, tales que:

$$P(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el de $q(x)$, o bien, $r(x) = 0$.

ii) La demostración de este teorema entrega al algoritmo, que siempre se recuerda con desagrado.

El algoritmo <u>Parāvartya</u> que se basa en el mismo teorema, es sólo un reordenamiento del algoritmo mencionado en (ii), pero sólo en el caso en que el divisor sea un polinomio mónico y en el caso que no lo sea se procede según la observación que se da mas adelante.

El estudio de esta sutra se hará con un ejemplo.

<u>Ejemplo</u>. Dividir:

$$(2x^5 + 3x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 9x + 2) : (x^3 + 3x + 1)$$

La solución de esta división viene dada por la línea final del siguiente ordenamiento:

2	3	8	1	9	2	0	-3	-1
	0	-6	-2					
		0	-9	-3				
			0	-6	-2			
2	3	2	0	0	0			

donde:

i) Los números de la primera fila: 2, 3, 8, 11, 9 y 2 corresponden a los coeficientes del polinomio dividendo, y 0, -3, -1 son los coeficientes del polinomio divisor, con signo contrario, excluido el coeficiente principal (todos los coeficientes son escritos de izquierda a derecha, de acuerdo a las potencias decrecientes de x).

ii) Los tres números de la segunda fila corresponden a la multiplicación del coeficiente principal del polinomio dividendo, con los coeficientes 0, -3 y -1.

iii) Los enteros de la tercera fila, se obtienen multiplicando la suma de la segunda columna con los números 0, -3 y -1.

iv) Los enteros que aparecen en la cuarta fila, son el producto de la suma de la tercera columna con los coeficientes 0, -3 y -1.

v) La última fila corresponde a la suma de las seis primeras columnas, donde los tres primeros términos son los coeficientes del cuociente y los tres últimos corresponden a los coeficientes del resto.

Observación:

i) La división sintética o método de Horner, es un caso particular de la sutra Paravārtya.

ii) Si el polinomio divisor q(x) no es mónico, se efectúa la división entre p x) y $\frac{1}{a_n}$ q (x), dividiéndose posteriormente los coeficientes del cuociente por a_n.

Comentarios.

i) La primera sutra puede desarrollarse mediante sumas en vez de diferencias, así por ejemplo el número 125, puede escribirse como 100 + 25. Esta misma sutra da una metodología para el estudio de las tablas de multiplicación, cuyo estudio par parte de los escolares básicos, es en algunos casos frustrante.

a) Habría que clarificar la conmutatividad de la multiplicación.
b) Sólo se tendría que aprender de memoria, hasta la tabla del 5.
c) Aplicación con abundantes ejemplos (es claro que las operaciones básicas de adición y sustracción, deben ser muy bien dominadas por parte del escolar).

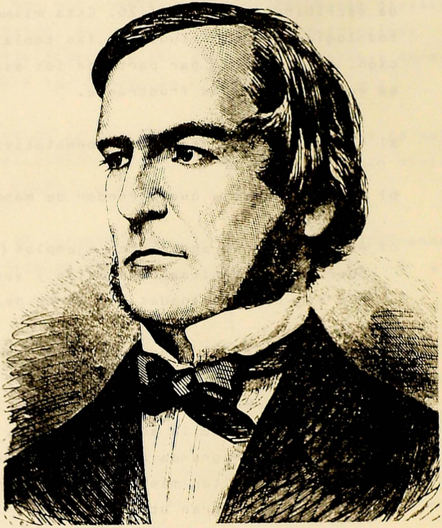
ii) Puesto que tanto el segundo como el tercer algoritmo, no son nada más que reordenamientos de la multiplicación y división de polinomios (en la multiplicación, la metodología derivada de la segunda sutra), tópicos pertenecientes a los programas de enseñanza media, y como estas operaciones resultan más fáciles mediante estas metodologías, sería de gran utilidad incluirlas en dichos programas. A maera de avalar esta última afirmación, efecúase las siguientes operaciones mediante los métodos propuestos y los tradicionales, y compárese sus diferencias:

Multiplíquese: $(2x^5+5x^3+3x^2-4x-7)\,(2x^3-3x^2-5x+1)$

Divídase: $((n-1)x^n-nx^{n-1}+1) : (x^2-2x+1)$

BIBLIOGRAFIA

Sankarācārya, Jagadguru.: Vedic Mathematics. Benares. Hindu Vishvavidyalaya Sanskrit Publication Board, 1965.



GEORGE BOOLE
(1815-1864)