

CREACION POR BIFURCACIONES DE CICLOS LIMITES SEMI-ESTABLES
EN EL PLANO

Jorge Billeke González *

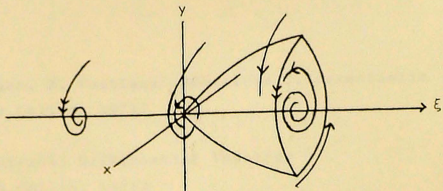
1.- INTRODUCCION:

1.1.- Es ampliamente conocida en la literatura de la matemática la bifurcación de Andronow-Hopf, ver por ejemplo [1],[2], esta consiste en la creación de un ciclo límite estable a partir de la bifurcación de un foco no hiperbólico. Allí se considera la siguiente familia a 1- parámetro de campos vectoriales en \mathbb{R}^2

$$X_{\xi}(x,y) = \begin{cases} \dot{x} = -y + x [\xi - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y [\xi - (x^2 + y^2)] \end{cases}$$

cuyo diagrama de bifurcación es:

* Departamento Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile, Sede Regional Talcahuano.

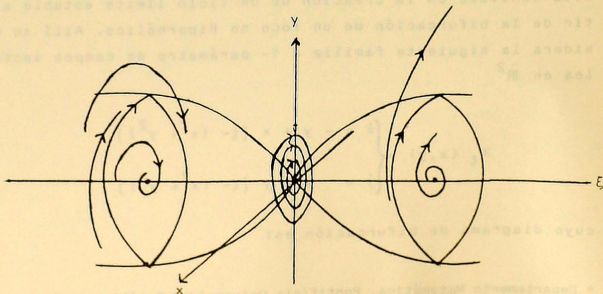


El ciclo límite en el plano es $S_{\xi}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = \xi^2\}$

1.2.- Consideremos ahora la familia a 1-parámetro de campos vectoriales en \mathbb{R}^2 dada por las ecuaciones:

$$X_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = 2y + 2x\xi [x^2 + y^2 - \xi^2]^2 \\ \dot{y} = -2x + 2y\xi [x^2 + y^2 - \xi^2]^2 \end{cases}$$

En el capítulo siguiente demostraremos que el diagrama de bifurcación es el siguiente



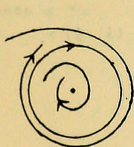
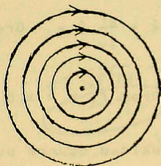
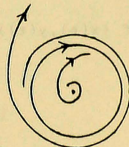
2.- CONSTRUCCION DEL EJEMPLO:

2.1.- Tomemos la familia a 1-parámetro de campos vectoriales dada 1.2. $X_0(x,y) = (2y, -2x)$ es un campo vectorial lineal y el origen es una singularidad tipo centro cuyas órbitas tienen período π .

TEOREMA

Para $\xi > 0$, $x_\xi(x,y)$ tiene a S_ξ^1 como único ciclo límite y este es semi-estable. Atractor en su interior y repulsor en el exterior y el origen es un foco hiperbólico repulsor.

Para $\xi < 0$ la situación es la inversa, es decir

 $\xi < 0$  $\xi = 0$  $\xi > 0$

2.2.- DEMOSTRACION

Sea γ la curva cerrada en el plano dada por la ecuación $f(x,y) = x^2 + y^2 - \zeta^2 = 0$. f es de C^∞ y no tiene puntos críticos sobre γ y además

$$f \Big|_{\text{Exterior de } \gamma} > 0 \quad \text{y} \quad f \Big|_{\text{Interior de } \gamma} < 0 \quad \dots (*)$$

Usando las técnicas dadas por R. Sverdlöve en [3] veamos algunas consideraciones generales para que un C^∞ - campo vectorial en el plano $X = (P(x,y), Q(x,y))$ solo tenga a γ como ciclo límite donde $\gamma = f^{-1}(0)$ con f un polinomio real en (x,y) con la propiedad (*) dada más arriba.

Como γ debe ser un conjunto invariante por el flujo debemos tener:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = \langle \text{Grad } f, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle \\ &= \langle \text{Grad } f, X \rangle = 0 \end{aligned}$$

Esta última igualdad ocurre pues se está sobre una curva de nivel de f .

2.3.- LEMA 1

$\langle \text{Grad } f, X \rangle = 0$ en $f^{-1}(0)$ si y sólo si existen funciones $A, B_1, B_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \neq 0$ tal que:

$$P = A \frac{\partial f}{\partial y} + B_1 f \quad \text{y} \quad Q = -A \frac{\partial f}{\partial x} + B_2 f$$

PRUEBA

Consideremos el campo de vectores $V = (\text{grad } f)^\perp$,
luego sobre γ se tiene $X = A(x, y) V(x, y)$, entonces

$$X = AV + Bf \text{ con } B = (B_1, B_2) \text{ arbitraria}$$

$$\text{es decir } (P, Q) = A \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right) + (B_1 f, B_2 f)$$

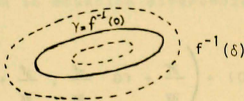
2.4.- LEMA 2

Si $\frac{df}{dt}$ tiene signo constante en cada componente de $\mathbb{R}^2 - \gamma$

(sobre las órbitas) entonces γ es un ciclo límite.

PRUEBA

Como f no tiene puntos críticos sobre γ implica que
cero es un valor regular para f entonces las curvas de nivel
de f para $\delta \in (-\xi, \xi)$, (ξ pequeño) son curvas cerradas ani-
llando a γ .



Si por ejemplo $\frac{df}{dt}(x(t), y(t)) > 0$ con $(x(t), y(t))$
solución que por $t = 0$ pasa por $(x_0, y_0) \in \text{Interior de } \gamma$, en-
tonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x(t), y(t)) = 0$$

$$t \rightarrow +\infty$$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{df}{dt}(x, y) = 4(x^2 + y^2)(1 + \xi[x^2 + y^2 - \xi^2]) > 0$$

Volvamos al caso general: Veamos que $\frac{\partial f}{\partial t}$ tiene signo constante fuera de γ .

$$\frac{df}{dt} = \langle \text{Grad } f, x \rangle = f(B_1 \frac{\partial f}{\partial x} + B_2 \frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\text{Tomando } B_1 = B'_1 \frac{\partial f}{\partial x}, B_2 = B'_2 \frac{\partial f}{\partial y} \text{ con } B'_1 B'_2 > 0$$

Tenemos: $B_1 \frac{\partial f}{\partial x} + B_2 \frac{\partial f}{\partial y} = B'_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + B'_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ que tiene signo constante.

Sin perder generalidad tomemos: $B'_1 = B'_2 = G$ y $A \equiv 1$

entonces

$$X = (P, Q) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + fG \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} + fG \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

es un campo de vectores que tiene a γ como único ciclo límite.

2.5.- LEMA 3

Si G cambia de signo al cruzar γ entonces γ es un ciclo semi-estable.

PRUEBA

f y G ambos cambian de signo al cruzar γ por lo tanto

$$\frac{df}{dt} = \langle \text{grad } f, (P, Q) \rangle = fG \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]$$

tiene el mismo signo fuera de Y .

Finalmente en nuestro ejemplo tenemos:

$$G(x, y) = \xi [x^2 + y^2 - \xi^2] \quad \text{y} \quad f(x, y) = (x^2 + y^2 - \xi^2)$$

lo que nos muestra que $Y = f^{-1}(0)$ es un ciclo semi-estable ubicado en S_{ξ}^1 .

3.- OBSERVACIONES Y PROBLEMAS

3.1. R. Sverdlove en [3] hace un análisis del siguiente tipo: Dada una colección de curvas cerradas simples disjuntas en el plano Y_i dadas por ecuaciones $f_i(x, y) = 0, f_i \in C^{\infty}$. f_i no tienen puntos críticos sobre Y_i y f_i es positiva en el exterior de Y_i y negativa en el interior de Y_i . El encuentra funciones $P(x, y), Q(x, y)$ tales la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Sólo tiene a los Y_i como ciclos límites. Además mediante elecciones adecuadas de f y A, B_1, B_2 en el lema 1 estos ciclos límites pueden ser de carácter estable. (atractor o repulsor) y semi-estables.

3.2. Observemos que en el ejemplo dado en el capítulo 2, la derivada de la transformación de Poincaré es uno, es decir

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \text{div } X \, dt = 0$$

Un problema interesante es encontrar un campo de vectores polinomial de grado k que tenga un único ciclo límite no hiperbólico y tal que las derivadas de la transformación de Poincaré hasta el orden $n-1$, n impar sea nula y la de orden n sea no nula. Luego hiperbolizar este ciclo límite dentro de los campos polinomiales de grado k . (Este problema fue propuesto por V. Guíñez).

3.3. Otro problema es crear por bifurcaciones ciclos límites semi-estables en el plano pero de grado < 5 (el nuestro es de grado 5).

3.4. Dado $X_0(x,y) = (-y,x)$ centro en el plano. ¿Es posible encontrar una perturbación $X_\xi(x,y) = X_0(x,y) + f(\xi, x, y)$ tal que $f(0,x,y) = 0$, $f(\xi, x, y)$ sea un polinomio de grado 2 en (x,y) y $X_\xi(x,y)$ tenga un único ciclo límite semi-estable en el plano?

(Este problema fue propuesto por R. Bamon)

REFERENCIAS

- [1] J. Billeke - R. Bamon "Clasificación de singularidades de campos vectoriales en el plano. Parte I" Contribuciones C. y Tec. N°56 (1982), 17-50
- [2] M. Saavedra "Bifurcaciones Genéricas de Campos Vectoriales" Tesis de Magister. U. de Concepción 1985.

[3] R. Sverdlove

"Inverse problems for Dynamical
Systems"

Journal of Diff. Eq. Vol 42 N° 1
(1981), 72-105.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
 DEPARTMENT OF CHEMISTRY
 5712 SOUTH DICKENS STREET
 CHICAGO, ILLINOIS 60637

TO THE DIRECTOR OF THE DIVISION OF THE PHYSICAL SCIENCES
 FROM THE DEPARTMENT OF CHEMISTRY

RECEIVED

1967

1967

INSTRUMENTATION & LA TECNICA DELL'INCHIESTA

SECCION 2

Il sistema di ricerca di cui si parla in questo capitolo è un sistema di ricerca di tipo "a priori" che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche generali del campo di indagine. Il sistema di ricerca di cui si parla in questo capitolo è un sistema di ricerca di tipo "a posteriori" che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche particolari del campo di indagine. Il sistema di ricerca di cui si parla in questo capitolo è un sistema di ricerca di tipo "a priori" che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche generali del campo di indagine.

La teoria di ricerca di cui si parla in questo capitolo è una teoria di ricerca di tipo "a priori" che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche generali del campo di indagine. La teoria di ricerca di cui si parla in questo capitolo è una teoria di ricerca di tipo "a posteriori" che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche particolari del campo di indagine.

