CUBO, Vol.2, Marzo 1986
Págs. 3-13

UNA APLICACION DEL METODO DE NEWTON A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

Mario Ahués *

0.- INTRODUCCION:

Sea $(B, \|\ \|)$ un espacio de Banach, $(L(B), \|\ \|)$ el álgebra de las aplicaciones lineales continuas de B en si mismo, Ω un abierto en $(B, \|\ \|)$ y $F : \Omega \to B$ un operador fuertemente derivable en todo punto de Ω. La identidad en B es I, dado $x \in \Omega$, $F'(x)$ es la derivada fuerte de F en x y $\Omega_r(x)$ es la bola abierta en $(B, \|\ \|)$ con centro $x \in B$ y radio $r > 0$.

Formalmente, el Método de Newton aplicado a resolver el problema

(P) Hallar $x^* \in \Omega$ tal que $F(x^*) = 0$

* Departamento de Matemáticas, Universidad de Chile.

consiste en generar la sucesión

$$(S)\quad \begin{cases} x_0 \in \Omega \\ x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}(F(x_k)),\ k \geq 0 \end{cases}$$

lo cual es posible si $F'(x_k)$ es una aplicación lineal no singular para cada $k \in \mathbb{N}$.

El siguiente teorema da condiciones suficientes sobre el comportamiento local de F en torno a x^* para asegurar la convergencia de la sucesión (S) a x^*.

<u>Teorema</u>

Si existe x^* solución de (P) y se verifica

H1) $F'(x^*)$ no singular y $F'(x^*)^{-1} \in L(B)$

H2) $x \in \Omega \to F'(x) \in L(B)$ continua

entonces $\forall \varepsilon \in]0,1[\ \exists \rho > 0$ tq la sucesión (S) verifica

$$\|x_k - x^*\| \leq \varepsilon^k \|x_0 - x^*\|$$

siempre que $x_0 \in \Omega_\rho(x^*)$

Δ

La demostración puede hacerse estudiando el operador

$$A(x) = x - F'(x)^{-1}(F(x))$$

definido en una vecindad de x^*. Se verifica que $A'(x^*) = 0$ y ello permite argumentar con el Teorema del Punto Fijo de Banach. Debe tenerse en cuenta que

$$F(x^*) = 0 \iff A(x^*) = x^*.$$

Los detalles se encuentran en [3].

1) El Teorema de Kantorovich.

Sean $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\Omega_r(x_0) \subseteq \Omega$.

Supongamos que

$$F' : x \in \Omega_r(x_0) \longrightarrow F'(x) \in L(B)$$

satisface una desigualdad de Lipschitz con constante ℓ y que $F'(x_0)$ es un homeomorfismo. Si existen constantes d_0 y r_0 tales que

$$\|F'(x_0)^{-1}(F(x_0))\| \leq r_0$$

$$\|F'(x_0)^{-1}\|^{-1} \geq d_0$$

$$2\ell r_0 \leq d_0$$

$$r \geq \frac{d_0}{\ell} - a$$

donde $a = \frac{1}{\ell}(d_0(d_0 - 2\ell r_0))^{1/2}$

entonces la sucesión (S) está bien definida y converge a una solución x^* de (P). Además

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{2a\,\theta^{2^k}}{1-\theta^{2^k}}$$

con

$$\theta = \frac{d_0 - \ell(a+r_0)}{\ell\, r_0}$$

Δ

La demostración puede hallarse en [2], donde se introduce una interesante noción de tasa de convergencia.

2) Aplicación

Sea L un operador lineal cerrado densamente definido en un subespacio D de B y con inverso T continuo en B. Sea N un operador fuertemente derivable en B y con derivada fuerte N' lipschitziana en cada bola abierta de B.
Suponemos que N es estrictamente no lineal en el sentido de tener parte afín nula. Equivalentemente, suponemos que N verifica

(2.1) $N(0) = 0 \in B \quad , \quad N'(0) = 0 \in L(B)$.

Sea g un elemento dado en B.

Consideramos el problema

(P1) Hallar $x^* \in D$ tal que $L(x^*)+N(x^*)+g = 0$.

Puesto que L no es necesariamente continuo reformulamos (P1) como

(P2) Hallar $x^* \in B$ tal que $x^*+T(N(x^*))+T(g) = 0$

que corresponde al problema (P) con el operador $F: B \longrightarrow B$ definido por

$$F(x) = x+T(N(x))+T(g) \qquad \forall x \in B$$

Este operador es fuertemente derivable en B y su derivada fuerte está definida por

$$F'(x)(u) = u + T\,N'(x)(u)) \qquad \forall u \in B \qquad \forall x \in B$$

En particular, en virtud de (2.1),

$$F'(0) = I$$

$$F(0) = T(g)$$

y por lo tanto podemos definir las constantes d_0 y r_0 del Teorema de Kantorovich así:

$$d_0 = 1$$

$$r_0 = \|T\| \cdot \|g\|$$

Si $\mu(r)$ es una constante de Lipschitz de N' en la bola $\Omega_r(0)$ entonces podemos suponer que, para r suficientemente grande,

$$r \cdot \mu(r) \geq \|T\|^{-1}$$

En tal caso, si g verifica

$$\|g\| \leq \frac{1}{2\mu(r)\|T\|^2}$$

y si definimos

$$\ell = \mu(r)\|T\|$$

como constante de Lipschitz de F' en $\Omega_r(0)$ entonces se tendrá

$$2\ell r_0 \leq d_0$$

$$\ell r \geq d_0 - (d_0(d_0 - 2\ell r_0))^{1/2}$$

es decir, se satisfarán las hipótesis del Teorema de Kantorovich.

La iteración de Newton se escribe

$$x_{k+1} = x_k - v_k$$

donde v_k satisface

$$F'(x_k)(v_k) = F(x_k)$$

es decir,

$$v_k + T(N'(x_k)(v_k)) = x_k + T(N(x_k)) + T(g)$$

Puesto que $v_k \in D$, $x_k \in D$ y $T(B) = D$ podemos aplicar L y obtener

$$L(v_k) + N'(x_k)(v_k) = L(x_k) + N(x_k) + g$$

o bien, reemplazando v_k por $x_k - x_{k+1}$

$$(2.2) \quad (L+N'(x_k))(x_{k+1}) = N(x_k) - N'(x_k)(x_k) + g$$

lo que permite, dada $x_k \in D$, obtener $x_{k+1} \in D$, partiendo con $x_0 = 0$.

3) Ejemplo.

Consideramos en $B = C[0,1]$, con la norma

$$\|x\| = \operatorname{Max} \{|x(t)| : 0 \leq t \leq 1\},$$

el operador $\quad L = -\dfrac{d^2}{dt^2}$

con dominio

$$D = \{ x \in C^2[0,1] \ : \ x(0) = x(1) = 0 \}$$

y el operador $N(x) = x^2$.

La función g será

$$g(t) = 2 - t^2(1-t)^2 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

de modo que la solución de (P) es aquí

$$x^*(t) = t(1-t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

En este caso el operador T está definido por

$$T(x)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)ds \qquad 0 \leq t \leq 1$$

donde

$$k(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s(1-t) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para más detalles puede consultarse [1].

Entonces

$$\|T\| = \operatorname*{Max}_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 k(t,s)ds = \frac{1}{8}$$

$$N'(x)(u) = 2xu \qquad \forall x, u \in C[0,1]$$

$\mu(r) = 2$ independientemente de r

$$\ell = \frac{1}{4}$$

$$d_0 = 1$$

$$\|g\| = 2$$

$$r_0 = \frac{1}{4}$$

y el parámetro θ pertenece a $]0.0333,\ 0.0334[$.

Entonces

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{7.5\,(0.0334)^{2^k}}{1-(0.0334)^{2^k}}$$

y en particular,

$$(3.1)\quad \begin{cases} \|x_0 - x^*\| \leq 0.26 \\ \\ \|x_1 - x^*\| \leq 0.84.10^{-2} \end{cases}$$

En este ejemplo, (2.2) es la ecuación diferencial lineal

$$(3.2)\quad \begin{cases} -x''_{k+1} + 2x_k\ x_{k+1} = g - x_k^2 \\ \\ x_{k+1}(0) = x_{x+1}(1) = 0 \end{cases}$$

que permite calcular x_{k+1} conociendo x_k y comenzando con $x_0=0$.

Generalmente, en la práctica, (2.2) no admite una resolución analítica y debe, por lo tanto, emplearse algún procedimiento numérico. Por ejemplo, en el caso del problema diferencial (3.2) que tiene condiciones de borde en dos puntos, podemos utilizar el método de diferencias finitas. Se trata de aproximar $x''(t)$ por la diferencia

$$\frac{\delta^2 x(t)}{h^2} = \frac{x(t+h)-2x(t)+x(t-h)}{h^2}$$

Se demuestra que

$$\left| x''(t) - \frac{\delta^2 x(t)}{h^2} \right| \leq Ch^2$$

donde C no depende de h para h suficientemente pequeño.

La discretización de (3.2) por diferencias finitas conduce a resolver para cada k un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$:

$$A_k y_{k+1} = b_k$$

donde la matriz A_k tiene como coeficiente en fila i y columna j

$$A_k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 1 \text{ o } i = j = n \\ \frac{2}{h^2} + 2y_k(j) & \text{si } 2 \leq i = j \leq n-1 \\ -\frac{1}{h^2} & \text{si } 2 \leq i \leq n-1 \text{ y } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

el vector b_k tiene i ésima coordenada

$$b_k(i) = g(t_i) - y_k(i)^2$$

siendo

$$h = \frac{1}{n-1}$$

$$t_i = (i-1)h \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$y_0(i) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

Se demuestra que, al haber convergencia del método de Newton, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; k_0$ tal que tal que si $k > k_0$ entonces

$$\varepsilon_k = \max_{1 \leq i \leq n} | x^*(t_i) - y_k(i) | \leq Ch^2 + \varepsilon$$

siendo C independiente de k.

Por ejemplo, si n = 9 entonces h = 0.125 y se tiene la siguiente Tabla de Resultados

				k=0	k=1
i	t_i	$g(t_i)$	$x^*(t_i)$	$y_0(i)$	$y_1(i)$
1	0	2.	0.	0.	0.
2	0.125	1.98804	0.109375	0.	0.107292
3	0.25	1.96484	0.1875	0.	0.183521
4	0.375	1.94507	0.234375	0.	0.229049
5	0.5	1.9375	0.25	0.	0.244185
6	0.625	1.94507	0.234375	0.	0.229049
7	0.75	1.96484	0.1875	0.	0.183521
8	0.875	1.98804	0.109375	0.	1.107292
9	1.	2.	0.	0.	0.
				ε_0	ε_1
				0.25	0.5815×10^{-2}

En este ejemplo observamos que la cota para $\|x_1-x^*\|$ establecida en (3.1) es del orden de h^2:

$$\|x_1-x^*\| \leq 0.84\times 10^{-2} \leq 0.54h^2$$

lo que sugiere no continuar iterando pues se ha alcanzado la precisión que permite la discretización de (3.2) con diferencias finitas de paso h=0.125.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS CITADAS

[1] CHATELIN, F. (1983)
Spectral Approximation of Linear Operators .
Academic Press, New-York

[2] POTRA, F. and PTAK, V. (1980)
Sharp Error Bounds for Newton's Process.
Numer. Math. 34, 63-72

[3] WITOMSKY, P. (1980)
Curso: Méthodes Numériques pour des E.D.P. non linéaires;
D.E.A. de Análisis Numérico U. de Grenoble.
(Manuscrito no publicado)