CUBO 7, 16-21 (1991)
Recibido: Diciembre 1990

MODELOS DEL MAL DE CHAGAS

por
Ana María Maturana C.

Resumen. Se analizan dos modelos continuos compartimentados del *Mal de Chagas*, con el objetivo de ser utilizados posteriormente en políticas de control.

Los modelos se reducen a un problema de Cauchy y son resueltos utilizando las técnicas usuales de análisis de la Estabilidad de los Puntos de Equilibrios (Estudio Local y Global).

El *"Chagas"* (TRIPANOSOMIASIS AMERICANA) es una enfermedad de contagio indirecto, trasmitida por contaminación de la herida por la mordedura de la *"vinchuca"* (TRIATOMA INFESTANS (protozoos)), esta infección se produce por medio de las defecaciones que este insecto expulsa a medida que se alimenta, y la puerta de entrada son las heridas de estas picaduras.

La enfermedad produce debilitamiento del individuo, ocasionando afecciones respiratorias, digestivas (Megacolon), cardiacas, cutáneas y hasta la muerte en casos extremos.

Este insecto vive asociado al hombre, en las hendiduras de los techos, fisuras de las paredes, huecos de los pisos o en gallineros y palomares próximos a las viviendas de América Latina que, en general, son de tipo precario y construidas de material inadecuado.

No existe tratamiento satisfactorio para el *Mal de Chagas*, siendo esta enfermedad de tipo crónico. Así, la única forma de combatirla, es a nivel preventivo. Habitualmente para esto se usan pulverizaciones de las viviendas para eliminar al vector, pero este método tiene problemas, pues este vacío es llenado por los vectores silvestres ya que las pulverizaciones sólo se remiten a las viviendas [1]. El objetivo de este artículo es una primera aproximación a las modelaciones del *Mal de Chagas* con la intención a futuro de determinar las políticas de control más apropiadas.

En este trabajo estudiaremos dos modelos del *Mal de Chagas*. En el primer modelo, el más simple, usaremos las siguientes anotaciones.

N: Población total humana.

S: Susceptibles (fracción de individuos que podrían ser infectados por la enfermedad).

I: Infecciosos (fracción de individuos que han sido contagiados).

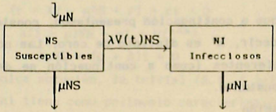
μ: Tasa de nacimientos y tasa de muertes.

λ: Tasa de contacto.

V: Número de vinchucas por unidades de 100.

Consideraremos en este modelo la población constante, **N** y por este motivo la tasa de nacimientos y la tasa de muertes se asumen iguales.

El diagrama para este modelo comportimentado es el siguiente:



Que en términos de ecuaciones diferenciales, se reduce al problema de Cauchy [5]:

$$\begin{cases} (NS)' = \mu N - \lambda V(t)NS - \mu NS \\ (NI)' = \lambda V(t)NS - \mu NI \end{cases}$$

$$NS(0)=S_0 > 0 \quad ; \quad NI(0)=I_0 > 0 \quad \text{y} \quad NS+NI=N$$

el cual es equivalente a:

$$\begin{cases} S' = \mu - \lambda V(t)S - \mu S \\ I' = \lambda V(t) - \mu I \end{cases} \qquad (*)$$

donde $S(0)=S_0>0$, $I(0)=I_0>0$ y $S+I=1$.

La dinámica de la vinchuca la suponemos (en este caso) regida por la ecuación logística [4]:

$$V'(t) = \phi V(t)(1-V(t)) \qquad (**)$$

que tiene como solución:

$$V(t)=\frac{1}{1+\Phi e^{-\phi t}}$$

Como se consideró una población constante tenemos que $S'+I'=0$, es decir, el sistema (*) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria:

$$S' = \mu-\mu S-\lambda V(t)S$$

que tiene como solución [3]

$$S(t) = \frac{\mu(1+\phi e^{-\phi t})}{\mu(1+\phi e^{-\phi t})+\lambda} + \left[S-\frac{\mu(1+\phi)}{\mu(1+\phi)+\lambda}\right]e^{\frac{\lambda}{\phi}\ln\frac{1+\phi}{\phi}-\mu t-\frac{\lambda}{\phi}\ln\frac{1+\phi e^{-\phi t}}{\phi e^{-\phi t}}}$$

Claramente se tiene que $S(t)\longrightarrow S^{*}$ y $I(t)\longrightarrow I^{*}$ cuando $t\longrightarrow\infty$, donde

$$S^{*}=\frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \text{y} \quad I^{*}=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

Es así que (S^{*}, I^{*}) solución del sistema (*) es, globalmente asintóticamente estable [2].

El modelo que a continuación presentamos, considera la población N variable, es decir, N' es distinto de cero. Las notaciones en el modelo serán diferentes (como a continuación se detallan) y V(t) se considerará constante.

$N(t)$ = Población

S = Cantidad de individuos susceptibles

I_S = Cantidad de individuos enfermos sintomáticos

I_A = Cantidad de individuos enfermos asintomáticos

r = Tasa de nacimientos

μ = Tasa de muertes naturales

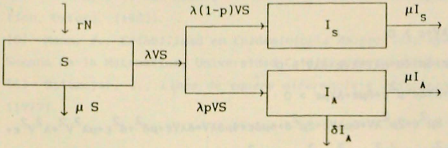
λ = Tasa de contacto

p = Fracción de enfermos que no tienen síntomas de la enfermedad

δ = Tasa de muertes debido a la enfermedad

V = Población total de vinchucas

El diagrama que gobierna nuestro modelo es :



En término de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, ahora tenemos el siguiente problema de Cauchy [5]:

$$\begin{cases} S' = rN - \lambda VS - \mu S \\ I'_S = \lambda(1-p)VS - \mu I_S \\ I_A = \lambda pVS - (\mu + \delta)I_A \end{cases}$$

donde $S(0)=S_0>0$; $I_S(0)=I_{S_0}>0$; $I_A(0)=I_{A_0}>0$ y $S+I_S+I_A = N$.

La región factible epidemiológicamente hablando es el primer octante de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{P} = \left\{ (S, I_S, I_A)\in\mathbb{R}^3 / \ S>0 \ , \ I_S>0 \ , \ I_A>0 \right\}$$

Los puntos de equilibrio deben satisfacer el sistema:

$$(r - \lambda V - \mu)S + rI_S + rI_A = 0$$

$$\lambda(1 - p)VS - \mu I_S = 0 (***)$$

$$\lambda pVS - (\mu + \delta)I_A = 0$$

el cual tiene como única solución, la trivial $(S, I_S, I_A)=(0,0,0)$ [6].

Este sistema lineal tiene como polinomio característico al polinomio $P(x)= x^3+(3\mu+\delta+\lambda V)x^2+(3\mu^2+2\mu\lambda V+2\delta\mu-2\mu r-\delta r+\delta\lambda V-r\lambda V)x++\mu^3+\mu^2\delta+\lambda V\mu^2-r\mu^2- r\mu\delta+\lambda V\mu\delta-r\lambda V(\mu+\delta-\delta p)$ que se obtiene desde el Jacobiano del campo vectorial (***) en el punto de equilibrio.

El punto de equilibrio será globalmente, asintóticamente estable si los coeficientes del polinomio P(x) satisfacen las condiciones de HURWITZ [4], es decir:

$$a_1>0, \ a_2>0, \ a_3>0 \text{ y } a_1a_2-a_3>0, \text{ donde } P(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

Para efectos de simplificación denotaremos $\varepsilon=r-\mu$ y analizaremos para qué valores de ε se tiene la estabilidad global.

CASO 1:

Si $\varepsilon\leq0$ se tendrá que el punto de equilibrio (0,0,0) es un atractor global, ya que

$$a_1 = 2\mu+\delta+\lambda V+\varepsilon > 0$$

$$a_2 = \mu^2+2\mu\varepsilon+\delta\mu+\delta\varepsilon+\mu\lambda V+\lambda V\varepsilon+\delta\lambda V > 0$$

$$a_3 = r\lambda V\delta p+\lambda V\delta\varepsilon+\mu^2\varepsilon+\delta\mu\varepsilon+\lambda V\mu\varepsilon > 0$$

$$a_1a_2 - a_3 = 8\mu^2\varepsilon+2\mu^2\lambda V+6\mu\lambda V\varepsilon+2\mu^2\delta+6\mu\delta\varepsilon+4\mu\delta\lambda V+\delta\lambda V\varepsilon+\mu\delta^2+\delta^2\varepsilon+\mu\lambda^2V^2+\lambda^2V^2\varepsilon+$$
$$\delta^2\lambda V+\delta\lambda^2V^2+2\mu r^2+\delta r^2+\delta\lambda V\mu+r^2\lambda V+\delta\lambda Vr(1-p) > 0$$

CASO 2:

Si $\varepsilon>0$ se tendrá la estabilidad global si $\varepsilon<\mu+\delta$ (esto viene dado por las condiciones de HURWITZ).

CONCLUSIONES.

Como se ve, la estabilidad en el primer modelo no está afectada por el crecimiento de la población de la vinchuca ya que la solución estable de este modelo no refleja el efecto de la magnitud del parámetro ϕ de la ecuación (**).

Es así como se plantea el segundo modelo pensando que la población de la vinchuca esta al nivel de saturación y por eso se toma constante.

En el modelo con población variable, el proceso de nacimientos y muertes controla el crecimiento de la población (ε negativo), pero este crecimiento de la población puede ser controlado debido a la mortalidad causada por la enfermedad (ε positivo). La separación en sintomáticos y asintomáticos no es reflejada en la dinámica en cuanto al crecimiento de la población.

REFERENCIAS.

[1] Enciclopedia Barsa, Tomo XV, (1962).

[2] Hethcote, H.W., *Asymptotic Behavior in a Deterministic Epidemic Model*, Bull. Math. Biology 35:607-614 (1973).

[3] Hirsch, M.W. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York (1974).

[4] Jordan, D.W. and Smith, P. *Nonlinear Ordinary Differential Equation*, Oxford, (1983).

[5] Mena, J., *Estabilidad en Epidemiología Matemática*, Apuntes de la Semana de la Matemática, Universidad Católica de Valparaíso (1988).

[6] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA (1979).

DIRECCION DEL AUTOR

Ana María Maturana C.
INSTITUTO DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO
CASILLA 4059 VALPARAISO-CHILE.