

Análisis cualitativo de una ecuación de Lienard con forzamiento cúbico.*

M. Wallace y J.E. Torres

Resumen.

En este trabajo estudiamos las singularidades del sistema de Liénard forzado $\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 \end{cases}$ con

$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{ax^3}{3} - \mu x$, $(a, \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, que es equivalente

al sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 - [x^4 - ax^2 - \mu]y \end{cases}$

Además estudiamos la existencia de ciclos límites de la familia $X_\epsilon : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 - \epsilon[x^4 - ax^2 - \mu]y \end{cases}$ para $\lambda > 0$, considerándola como una ϵ -perturbación del campo Hamiltoniano $X_0 : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 \end{cases}$

*Trabajo parcialmente financiado por proyecto DIN 01/93 de la U. Católica de la Sma. Concepción y Proyecto Fondecyt 920247

1 Introducción

1.1

En dinámica de poblaciones, el crecimiento de una única especie puede ser descrita por la ecuación diferencial de 2º orden de tipo Liénard:

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = 0$$

donde f y g satisfacen determinadas condiciones de regularidad. Esta ecuación fue introducida por J.P. Clark en 1971, [1] y es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -v - F(x) \\ \frac{dv}{dt} = g(x) \end{cases}, \quad \text{donde } F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau$$

El estudio de Clark se puede extender a interacciones entre dos especies. Estos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen interacciones de tipo predador-presa, pueden ser transformados, mediante cambios de variables, en sistemas de ecuaciones de tipo Liénard, es decir, en sistemas de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{n \geq 0} H_n(x) y^n \end{cases}$$

1.2

J. Billeke, H. Burgos y M. Wallace, [2], han estudiado el sistema de Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (1)$$

para el caso $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{ax^3}{3} - \mu x$, $(a, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

En este trabajo vamos a introducir un forzamiento cúbico al sistema (1), es decir, vamos a considerar el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x + \lambda x^3 \end{cases} \quad (2)$$

con la f anterior.

Mediante el cambio de variables:

$$X = x; \quad Y = y - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{ax^3}{3} - \mu x \right]$$

(2) puede escribirse:

$$\begin{cases} \dot{X} &= \dot{x} = y - \left[\frac{x^4}{5} - \frac{ax^2}{3} - \mu x \right] \\ \dot{Y} &= \dot{y} = -[x^4 - ax^2 - \mu] \dot{x} \end{cases}$$

esto es:

$$X : \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda x^3 - [x^4 - ax^2 - \mu]y \end{cases} \quad (3)$$

volviendo a llamar x e y a las variables.

2 Singularidades del campo X

2.1

Al estudiar las singularidades del sistema (3) se obtiene que $(0,0)$ es un foco repulsor si $\mu > 0$, foco atractor si $\mu < 0$ y foco débil si $\mu = 0, \forall a, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Para estudiar el orden de debilidad del foco, recurramos al Teorema de Lloyd, [3]:

Sea $V(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} V_k(x, y)$, con $V_k(x, y) = \sum_{i+j=k} C_{ij} x^i y^j$ función de Liapunov

del campo X tal que $V(x, y)$ tenga un valor extremo en $(0,0)$ y $\dot{V}(x, y) = \frac{dV}{dt}(x, y)$ sea de la forma:

$$\dot{V}(x, y) = \eta_2(x^2 + y^2) + \eta_4(x^2 + y^2)^2 + \eta_6(x^2 + y^2)^3 + \dots + \eta_{2k}(x^2 + y^2)^k + \dots \quad (4)$$

En estas condiciones tenemos el siguientes resultado:

2.2 Teorema de Lloyd

Si η_{2k_0} es el primer coeficiente no nulo de (4), entonces $k_0 - 1$ es el orden de debilidad del foco $(0,0)$; esto es, de él pueden bifurcarse a lo más $k_0 - 1$ ciclos límites.

El cálculo de los C_{ij} de la función $V(x, y)$ para nuestro campo X nos permite concluir que para $a \neq 0$ se tiene que $\eta_2 = 0$ y $\eta_4 \neq 0$, y el Teorema anterior nos permite concluir que $(0,0)$ es un foco débil de orden 1 si $a \neq 0$, cualesquiera sea el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. En cambio, para $a=0$ se tiene que $\eta_2 = \eta_4 = 0$ y $\eta_6 \neq 0$, y entonces $(0,0)$ es un foco débil de orden 2, independiente de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, para $\lambda > 0$, surgen las singularidades $(\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0)$ para el campo X .

Como $DX(\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & a\lambda + \mu - \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$, tenemos que $(\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, 0)$ son sillars hiperbólicas, $\forall \lambda > 0$.

3 Ciclos límites

3.1 Preliminares

Consideremos, en general, un sistema C^∞ de la forma

$$X_\epsilon : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y) \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

donde $H(x, y)$ es una función de Hamilton.

Supongamos que el sistema no perturbado:

$$X_0 : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

tiene un anillo de soluciones periódicas $\gamma(h)$, contenidas en las curvas $H=h$ para h en un intervalo J .

Consideremos una sección Σ transversal a la familia $\{\gamma(h)\}_{h \in J}$, parametrizada por h y calculemos la aplicación de retorno $P(h)$ del sistema X_ϵ dado en (5), para $h \in \Sigma$. Soluciones periódicas del sistema X_ϵ corresponden a ceros de la función desplazamiento:

$$V(h) = P(h) - h \quad h \in \Sigma$$

Sea $\gamma_\epsilon(h)$ una trayectoria del sistema perturbado, que parte de h en Σ . Entonces:

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_{\gamma_\epsilon(h)} \dot{H} dt = \int_{\gamma_\epsilon(h)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \right) dt \\ &= \int_{\gamma_\epsilon(h)} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y) \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y) \right) \right] dt \\ &= \epsilon \int_{\gamma_\epsilon(h)} \left(f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt \\ &= -\epsilon \int_{\gamma(h)} (f dy - g dx) + \theta(\epsilon) =: -\epsilon M(h) + \theta(\epsilon) \end{aligned}$$

donde $M(h) = \int_{\gamma(h)} (f dy - g dx)$ y $\gamma(h)$ es la órbita cerrada del sistema X_0 .

Entonces, se tiene:

Teorema 3.1 (Pontriagin). Si $h_0 \in \Sigma$ es tal que $M(h_0) = 0$ y $M'(h_0) \neq 0$, existe $\epsilon(h_0) > 0$ y una función C^1 , $F(\epsilon)$, definida para $|\epsilon| < \epsilon(h_0)$, con $F(0) = h_0$ y tal que X_ϵ tiene una solución periódica que corta la sección Σ en el punto $h = F(\epsilon)$.

Además, si $M(h_0) = M'(h_0) = \dots = M^{(k-1)}(h_0) = 0$ y $M^{(k)}(h_0) \neq 0$, entonces para $\epsilon \neq 0$ pequeño, X_ϵ tiene a lo más k ciclos límites que tienden a $\gamma(h_0)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

3.2

A continuación, en el campo vectorial X definido en (3), vamos a introducir una ϵ -perturbación en el último término de la segunda ecuación; obtenemos así la familia:

$$X_\epsilon : \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda x^3 - \epsilon[x^4 - ax^2 - \mu]y \end{cases} \quad (6)$$

Nos proponemos estudiar la existencia de ciclos límites de la familia X_ϵ , para $\lambda > 0$, considerándola como ϵ -perturbación del campo Hamiltoniano:

$$X_0 : \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \lambda x^3 \end{cases}, \quad H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{\lambda x^4}{4}$$

Como traza $DX_\epsilon(x, y) = -\epsilon(x^4 - ax^2 - \mu)$, por el criterio de Bendixon se tiene que el campo X_ϵ no tiene ciclos límites si $a^2 + 4\mu \leq 0$, $\forall \epsilon \neq 0$.

Aplicando el método expuesto en 3.1, debemos estudiar los ceros de la función:

$$M(h) = \int_{\gamma(h)} (x^4 - ax^2 - \mu) y \, dx, \quad \text{para } h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]$$

El sistema Hamiltoniano X_0 presenta el diagrama de fase de la Fig 1.

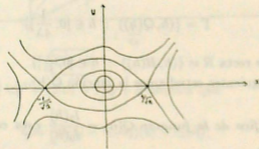


Fig 1: Diagrama de fase de X_0

Lema 3.2 La función $M(h)$ toma la forma:

$$M(h) = \left(\frac{8}{7\lambda} - a \right) I_2(h) - \left(\frac{4h}{7\lambda} + \mu \right) I_0(h)$$

con $I_n(h) = \int_{\gamma(h)} x^n y dx$, $n = 0, 2$.

Demostración. $H(x, y) = h \implies y^2 = 2 \left(h - \frac{x^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4} \right) \implies x^4 = \frac{2(y^2 + x^2 - 2h)}{\lambda}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_4(h) &= \int_{\gamma(h)} x^4 y dx = \int_{\gamma(h)} \frac{2}{\lambda} (y^2 + x^2 - 2h) y dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_{\gamma(h)} y^3 dx + \frac{2}{\lambda} \int_{\gamma(h)} x^2 y dx - \frac{4h}{\lambda} \int_{\gamma(h)} y dx \end{aligned}$$

Integrando por partes $\int_{\gamma(h)} y^3 dx$ obtenemos

$$I_4(h) = \frac{8}{7\lambda} I_2(h) - \frac{4h}{7\lambda} I_0(h)$$

de donde

$$M(h) = \frac{8}{7\lambda} I_2(h) - \frac{4h}{7\lambda} I_0(h) - a I_2(h) - \mu I_0(h)$$

$$M(h) = \left(\frac{8}{7\lambda} - a \right) I_2(h) - \left(\frac{4h}{7\lambda} + \mu \right) I_0(h)$$

Consideremos la función:

$$g(h) = \frac{M(h)}{\left(\frac{8}{7\lambda} - a \right) I_0(h)} = \frac{I_2(h)}{I_0(h)} - \frac{\frac{4h}{7\lambda} + \mu}{\frac{8}{7\lambda} - a} =: Q(h) - R(h)$$

Como $I_0(h) > 0, \forall h \in]0, \frac{1}{4\lambda}[$, si $\frac{8}{7\lambda} - a \neq 0$, es suficiente estudiar los ceros de la función $g(h)$ para $h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]$, es decir, los puntos de intersección de la curva:

$$\Gamma = \{(h, Q(h)) : h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]\}$$

con el segmento de recta $R = \{(h, R(h)) : h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]\}$ ■

En los lemas siguientes estudiamos la función $Q(h)$.

Lema 3.3 El gráfico de la función $Q(h) = \frac{I_2(h)}{I_0(h)}$ está compuesto por trayectorias del campo:

$$Z : \begin{cases} \dot{h} &= h(1 - 4\lambda h) \\ \dot{Q} &= \frac{5}{4}\lambda Q^2 - (2\lambda h + 1)Q + h \end{cases} \quad (7)$$

Demostración $Q'(h) = \left(\frac{I_2}{I_0} \right)' (h) = \frac{I_2'(h)}{I_0(h)} - \frac{I_2(h)}{I_0(h)} \frac{I_0'(h)}{I_0(h)}$.

Integrando por partes y relacionando las integrales involucradas obtenemos:

$$Q'(h) = \frac{1}{h(1-4\lambda h)} \left[\frac{5}{4} \lambda Q^2 - (2\lambda h + 1)Q + h \right]$$

Escribiendo $\dot{h} = h(1-4\lambda h)$, y dado que $\dot{Q} = Q'(h) \dot{h}$, tenemos que el gráfico de $Q(h)$ está compuesto por trayectorias del campo (7). ■

Observación 1. El campo Z definido en (7) tiene 4 singularidades: 2 sillars, un foco atractor y uno repulsor, en los puntos $(0,0)$, $(\frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{\lambda})$, $(\frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{5\lambda})$ y $(0, \frac{4}{5\lambda})$, respectivamente. (Ver Fig. 2)

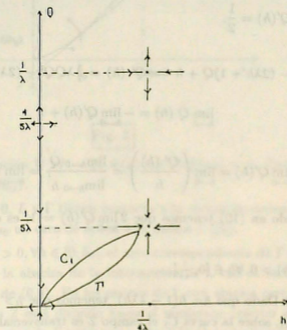


Fig. 2

Observación 2. $\dot{Q} = \frac{5}{4} \lambda Q^2 - (2\lambda h + 1)Q + h$ implica que

$$\dot{Q} = \frac{5}{4} \lambda (Q - r_1(h))(Q - r_2(h)) \quad (8)$$

con

$$r_1(h) = \frac{2}{5\lambda} [2\lambda h + 1 - \sqrt{4\lambda^2 h^2 - \lambda h + 1}] \text{ y}$$

$$r_2(h) = \frac{2}{5\lambda} [2\lambda h + 1 + \sqrt{4\lambda^2 h^2 - \lambda h + 1}]$$

Sobre la curva $C_1 : \{(h, r_1(h)) : h \in]0, \frac{1}{4\lambda}]\}$ (y también sobre la curva $C_2 : \{(h, r_2(h)) : h \in]0, \frac{1}{4\lambda}]\}$ el campo Z es horizontal. Se tiene que: $r_1(0) = 0$, $r_1(\frac{1}{4\lambda}) = \frac{1}{5\lambda}$, $r_1'(h) > 0, \forall h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]$ y en particular:

$$r_1'(0) = 1 \quad (9)$$

Lema 3.4 (i) $\lim_{h \rightarrow 0} Q(h) = 0$; (ii) $\lim_{h \rightarrow \frac{1}{4\lambda}} Q(h) = \frac{1}{5\lambda}$.

Demostración

(i) Se prueba por cálculo directo.

(ii) Se prueba por integración. ■

Lema 3.5 $\lim_{h \rightarrow 0} Q'(h) = \frac{1}{2}$.

Demostración

$$\dot{Q}(h) = \frac{5}{4}\lambda Q^2 - (2\lambda h + 1)Q + h \implies \dot{Q}'(h) = \frac{5}{2}\lambda Q Q' - (2\lambda h + 1)Q' - 2\lambda Q + 1.$$

Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \dot{Q}(h) = - \lim_{h \rightarrow 0} Q'(h) + 1 \quad (10)$$

Pero

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{Q}'(h)}{h} \right) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \dot{Q}'(h)}{\lim_{h \rightarrow 0} h} = \lim_{h \rightarrow 0} \dot{Q}'(h)$$

Reemplazando en (10) tenemos que $2 \lim_{h \rightarrow 0} Q'(h) = 1$, es decir $\lim_{h \rightarrow 0} Q'(h) = \frac{1}{2}$. ■

Lema 3.6 $Q'(h) > 0, \forall h \in [0, \frac{1}{4\lambda}[$.

Demostración Dado que $\dot{h} = h(1 - 4\lambda h)$, tenemos que $\dot{h} > 0, \forall h \in]0, \frac{1}{4\lambda}[$. Como $Q'(h) = \dot{Q}(h)/\dot{h}$, sobre la curva C_1 el campo Z es transversal a C_1 y apunta hacia la derecha (ver Fig. 2). Por (9), $r_1'(0) = 1 > \frac{1}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} Q'(h)$, de modo que la curva Γ no cruza la curva C_1 y está por debajo de ella, pues por (8) $\dot{Q} > 0$ si $Q(h) < R_1(h)$.

Así, sobre $\Gamma : \dot{Q} > 0$ y por lo tanto $Q'(h) > 0, \forall h \in [0, \frac{1}{4\lambda}[$. ■

Lema 3.7 $Q''(h) > 0, \forall h \in [0, \frac{1}{4\lambda}[$.

Demostración Es fácil probar que $Q''(0) = \frac{2\lambda}{4}$.

Supongamos que existe un $h \in]0, \frac{1}{4\lambda}[$ tal que $Q''(h) = 0$ y sea h_0 el valor de h más próximo a 0 tal que $Q''(h_0) = 0$. Entonces $Q''(h) > 0, \forall h \in [0, h_0[$.

Sea L la recta tangente a Γ en el punto $(h_0, Q(h_0))$. Parametricemos L por $L: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, u \rightarrow L(u)$. Sea v vector no nulo ortogonal a L en $(h_0, Q(h_0))$ (ver Fig. 3).

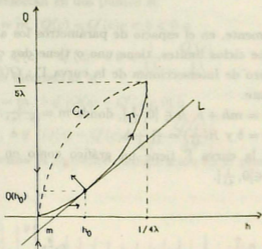


Fig. 3

Consideremos la función $\Psi: I \rightarrow \mathbb{R}, \Psi(u) = \langle Z(L(u)), v \rangle$. Entonces $\Psi(u_0) = 0$ con $L(u_0) = (h_0, Q(h_0))$.

Como $Q''(h_0) = 0$, L y Γ tienen contacto a lo menos de orden 2, y entonces la función Ψ tiene en u_0 un cero de orden a lo menos 1 ([5]).

Dado que $Q''(h) > 0, \forall h \in [0, h_0[$, el arco correspondiente de Γ está situado por arriba de L . Sea m la abscisa de la intersección de L con la recta $h = 0$. $(0, m)$ está situada debajo de $(0, 0)$. En los puntos de L con abscisa cercana a h_0 (por la izquierda), el campo Z está dirigido hacia el semiplano inferior determinado por L , porque en los puntos de Γ cercanos a $(h_0, Q(h_0))$ la inclinación del campo es menor que la de L ($Q''(h) > 0 \implies Q'(h)$ creciente). Como en $(0, m)$ el campo está dirigido hacia el semiplano superior determinado por L , concluimos que Ψ debe tener un cero para algún $u_1 \neq u_0$ con $L(u_1) \in]m, Q(h_0)[$. Siendo Z un campo cuadrático, $\Psi(u)$ es un polinomio de grado 2 y por lo tanto la existencia de un cero doble u_0 y uno simple u_1 implica $\Psi(u) = 0$. Se tiene así que Γ debe ser una recta. Esto es una contradicción, puesto que $Q''(0) \neq 0$. Hemos probado así que $Q''(h) > 0, \forall h \in [0, \frac{1}{4}\lambda]$. ■

Conclusión. De los lemas anteriores, podemos concluir que la curva Γ y la

recta $R = \{(h, R(h)) : R(h) = \frac{4}{8-7a\lambda} h + \frac{7\lambda\mu}{8-7a\lambda}\}$ se intersectan en a lo más dos puntos, por lo que el sistema X_ϵ tiene a lo más 2 ciclos límites.

3.3

Determinemos, finalmente, en el espacio de parámetros los abiertos en los cuales el campo X_ϵ no tiene ciclos límites, tiene uno o tiene dos ciclos límites, lo que corresponde al número de intersecciones de la curva $\Gamma : Q(h)$ con la recta $R(h)$ obtenida anteriormente.

Escribamos $R(h) = mh + b$, $h \in [0, \frac{1}{4\lambda}]$, donde $m = \frac{4}{8-7a\lambda}$, $b = \frac{7\lambda\mu}{8-7a\lambda}$ y fijemos $\lambda > 0$. Se tiene $R(0) = b$ y $R(\frac{1}{4\lambda}) = \frac{m}{4\lambda} + b$.

Recordemos que la curva Γ tiene un gráfico como en la Figura 4 y que $Q'(h) \in]\frac{1}{2}, \infty[$ con $h \in]0, \frac{1}{4\lambda}[$.

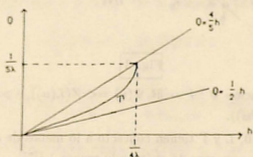


Fig. 4

Es evidente que no hay intersección entre $Q(h)$ y $R(h)$ si

$$b > 0, \frac{m}{4\lambda} + b > 0 \quad \text{o} \quad b < 0, m < \frac{1}{2}$$

y que existe una intersección entre $Q(h)$ y $R(h)$ si

$$b > 0, \frac{m}{4\lambda} + b < \frac{1}{5\lambda} \quad \text{o} \quad b < 0, \frac{m}{4\lambda} + b > \frac{1}{5\lambda}$$

Por otra parte, observemos que para cada $m > \frac{1}{2}$ existe un único $c \in]0, \frac{1}{4\lambda}[$ tal que $Q'(c) = m$, de modo que la condición $Q(c) - Q'(c)c = b$ equivale a que la

recta $R(h)$ coincide con la tangente a Γ en $(c, Q(c))$. Esto origina en el plano de parámetros (a, μ) una curva $\zeta : \mu = \mu(a)$, $a \in [0, \frac{8}{7\lambda}]$ tal que para cada $(a, \mu(a)) \in \zeta$ existe un único $m > \frac{1}{2}$ y una única $R(h)$ tangente a Γ con pendiente m . Entonces, $R(h)$ y $Q(h)$ se intersectan en dos puntos si:

$$\frac{1}{2} < m < \frac{4}{5}, \quad Q'(c) = m, \quad Q(c) - Q'(c)c < b < 0 \quad \text{o}$$

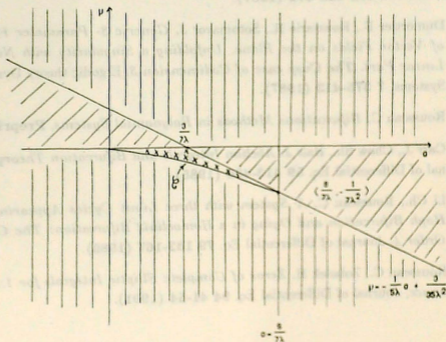
$$m > \frac{4}{5}, \quad Q'(c) = m, \quad Q(c) - Q'(c)c < b < \frac{1}{5\lambda} - \frac{Q'(c)}{4\lambda}$$

y $R(h)$ y $Q(h)$ no se intersectan si

$$\frac{1}{2} < m < \frac{4}{5}, \quad Q'(c) = m, \quad b \notin [Q(c) - Q'(c)c, 0] \quad \text{o}$$

$$m > \frac{4}{5}, \quad Q'(c) = m, \quad b \notin \left[Q(c) - Q'(c)c, \frac{1}{5\lambda} - \frac{Q'(c)}{4\lambda} \right]$$

Este análisis determina la siguiente configuración en el plano de parámetros (ver Fig. 5).



- |||: no existen ciclos límites
 ///: existe un ciclo límite
 xxx: existen dos ciclos límites

Fig. 5

Referencias

- [1] Clark J.P. *The Second Derivate and Population Modelling*, Ecology, 52 606-613 (1971).
- [2] Billeke J., Burgos H., Wallace M. *Some theorems on the Non Existence, Uniqueness and Existence of Two Limit Cycles for the Liénard Equation of Degree Five*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXVIII, (1990).
- [3] Lloyd, N.G. *Limit Cycles of Polynomial Sustems. Some recent developments*, Proc. London Math. Soc., 2 192-234 (1985).
- [4] Lloyd, N.G. *Liénard Systems with Several Limit Cycles*, Math Proc. Camb. Phil. Soc., 102 565-572 (1987).
- [5] Dumortier F., Roussarie R., Sotomayor J. *Generic 3- Parameter Families of Vector Fields on the Plane. Unfolding a Singularity with Nilpotent Linear Part. The Cusp case of Codimension 3*, Ergodic theory Dynamical Systems, 7 375-413 (1987).
- [6] Rousseau C. *Bifurcations Methods in Polynomial Systems*, Preprint.
- [7] Carr J., Chow Sh., Hale J. *Abelian Integrals and Bifurcation Theory*, Journal of Differential Eq. 59 413-436 (1985).
- [8] Li Ch., Rousseau C. *A System with three Limit Cycles Appearing in a Hoph Bifurcation and Dying in a Homoclinic Bifurcation: The Cusp of Order 4*, Journal of Differential Eq. 79 132-167 (1989).
- [9] Rousseau C., Zoladek H. *Zeros of Complete Elliptic Integrals for 1:2 Resonance*, Journal of Differential Eq. 94 41-54 (1991).

Dirección de los autores:

Myrna Wallace

Departamento de Matemáticas

Universidad de Concepción

Casilla 4009. Concepción

Juan Esteban Torres

Departamento de Matemática

Universidad Católica de la Sma. Concepción

Casilla 297. Concepción