CUBO 11, 73-79 (1995)
Novena Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Clasificación de las métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie

Juan Leiva Vivar

Resumen.
Si G es un grupo de Lie y g su álgebra de Lie, cualquier producto interno en g, determina una métrica invariante a izquierda en G. Recíprocamente, dada una métrica invariante a izquierda en G, queda determinado un producto interno en g.
En este trabajo se establecen condiciones necesarias y suficientes para que dos productos internos en g, determinen métricas invariantes a izquierda en G, que sean isométricas. Esto es, se clasifican las métricas invariantes a izquierda bajo isometría.

1 Métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie.

Sea G un grupo de Lie n-dimensional y g su álgebra de Lie asociada. Dado x $\in$G, la aplicación $L_x : G \to G$, tal que $L_x(y) = xy$, es un difeomorfismo, llamado traslación a izquierda por x.
Un campo vectorial X en G, se dice *invariante a izquierda* si :
$(dL_x)_e X(e) = X(x), \forall x \in G$, donde e es el elemento neutro del grupo G.
Una métrica Riemanniana en G se dice *invariante a izquierda* si las traslaciones a izquierda son isometrías, esto es :

$$\langle (dL_x)_y\, u, (dL_x)_y\, v\rangle_y = \langle u, v\rangle_{xy}, \forall x, y \in G, \forall u, v \in T_yG \qquad (1)$$

Un grupo de Lie con una tal métrica resulta ser una variedad homogénea, pues para $x, y \in G$ existe la isometría $L_{yx^{-1}}$ que lleva x en y.
Dada una métrica invariante a izquierda en G, $\langle , \rangle$, queda determinado un único producto interno en $g = T_eG$, y éste es $\langle , \rangle_e$. Recíprocamente, dado $\langle , \rangle_e$ un producto interno en g, según [2] ,queda determinada una única métrica invariante a izquierda en G por :

$$< u, v >_x = < (dL_{x^{-1}})_x\, u, (dL_{x^{-1}})_x\, v >_e, \forall x, y \in G, \forall u, v \in T_xG$$

También tenemos que, dada una base $\{e_1, ..., e_n\}$ de g, ésta determina un único producto interno en g, para el cual esta base es ortonormal , y así queda determinada una única métrica invariante a izquierda en G.
Más generalmente, dada una matriz real de orden n, simétrica y positiva definida, queda determinada una única métrica invariante a izquierda en G. Por tanto, existe una familia $\frac{1}{2}n\,(n+1)$-dimensional de métricas invariantes a izquierda en G.(ver [1]).
Para el caso particular en que $G = \mathbb{H}_{2p+1}$ es el grupo de Heisenberg, en [4] se muestra que toda métrica invariante a izquierda en $\mathbb{H}_{2p+1}$ es equivalente bajo isometría a una de las métricas:

$$g_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \lambda_1^2\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right) + \ldots\ldots + \lambda_p^2\left(\alpha_p^2 + \beta_p^2\right) + \omega^2.$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R} - \{0\}$, donde $\{\alpha_i = dx_i; \beta_i = dy_i; \omega = dz + \Sigma_{i=1}^p x_i dy_i\}$ es la base dual de la base de campos invariante a izquierda dada por :

$$\left\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - x_i\frac{\partial}{\partial z}; Z = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

donde (x_i, y_i, z)es un sistema de coordenadas globales.

Así por ejemplo, para $\mathbb{H}_3$, se tiene que

$$\left\{X = \frac{\partial}{\partial x}; Y = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}; Z = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

es base de h_3 y $\{\alpha = dx; \beta = dy; \omega = dz + xdy\}$ es base dual y por tanto las métricas invariantes a izquierda sobre $\mathbb{H}_3$ son equivalentes bajo isometría a una de las siguientes :

$$g_\lambda = \lambda^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + \omega^2 = \lambda^2 dx + \left(\lambda^2 + x^2\right)dy^2 + dz^2 + 2xdzdy, \lambda \in \mathbf{R}.$$

2 Clasificación de las métricas invariantes a izquierda

Se quiere determinar condiciones necesarias y suficientes sobre el álgebra de Lie, de modo que si $\langle,\rangle^1 y$ $\langle,\rangle^2$son métricas invariantes a izquierda en un grupo de Lie G, se tenga que $(G,\langle,\rangle^1)$ y $(G,\langle,\rangle^2)$ sean isométricos. Los teoremas 2.4 y 2.5, a continuación, dan respuesta a este problema.

Primeramente enunciaremos algunos hechos conocidos acerca de grupos de Lie que se usarán en las demostraciones de los teoremas. Estos pueden encontrarse en [3].

Proposición 2.1 *Si G es un grupo de Lie conexo, entonces existe $\widetilde{G}$, espacio de cubrimiento tal que $\widetilde{G}$ es un grupo de Lie simplemente conexo y la aplicación de cubrimiento $\pi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Proposición 2.2 *Sean G y G' grupos de Lie conexos y $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo. Entonces :φ es aplicación de cubrimiento si y solamente si $d\varphi_e : T_eG \longrightarrow T_{e'}G'$ es un isomorfismo.*

Proposición 2.3 *Sean G y G' grupos de Lie, con álgebras de Lie g y g' respectivamente, y G simplemente conexo.*
Sea $\psi : g \longrightarrow g'$ homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \longrightarrow G'$, tal que $d\varphi_e = \psi$.

Teorema 2.4 *Sean G grupo de Lie conexo n-dimensional y g su álgebra de Lie asociada,$B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ base de g,$\langle,\rangle_e^1$ producto interno en g tal que B_1 es ortonormal y $\langle,\rangle^1$métrica invariante a izquierda en G, determinada por $<,>_e^1$.*
Sea además, $\phi : g \longrightarrow g$ automorfismo de álgebra de Lie; así $B_2 = \{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ también es base de g. Sea $<,>_e^2$producto interno en g tal que B_2 es ortonormal y $<,>^2$ métrica invariante a izquierda en G, determinada por $<,>_e^2$.
Entonces $(G,<,>^1)$ es isométrico a $(G,<,>^2)$.

Demostración. Supongamos primero que G es simplemente conexo, así de (2.3) existe $\varphi : G \longrightarrow G$ automorfismo de grupos de Lie tal que $d\varphi_e = \phi$, donde

$d\varphi_e : g \longrightarrow g$.

Probaremos que $\varphi : (G, <,>^1) \to (G, <,>^2)$ es una isometría. O sea

$$\langle d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)\rangle^2_{\varphi(x)} = \langle u, v\rangle^1_x, \forall x \in G, \forall u, v \in T_xG.$$

Sean $x = e$ (el elemento neutro de G), $u = e_i, v = e_j; e_i, e_j \in B_1$; se tiene

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_e(e_i), d\varphi_e(e_j)\rangle^2_e &= \langle \phi(e_i), \phi(e_j)\rangle^2_e \\ &= \delta_{ij} \\ &= \langle e_i, e_j\rangle^1_e \end{aligned} \tag{2}$$

(Pues B_1 y B_2 son ortonormales respecto a $<,>^1_e$ y $<,>^2_e$ respectivamente).

Sean, ahora, $x \in G, u, v \in T_xG$ cualesquiera. Como L_x es difeomorfismo, entonces:

$$(dL_x)_e : T_eG \to T_xG$$

es isomorfismo y por tanto existen $u', v' \in T_eG$ tales que

$$u = (dL_x)_e u', v = (dL_x)_e v'.$$

Así tenemos :

$$\begin{aligned} \langle d\varphi_x(u), d\varphi_x(v)\rangle^2_{\varphi(x)} &= \langle \left(dL_{\varphi(x)^{-1}}\right)_{\varphi(x)} d\varphi_x(u), \left(dL_{\varphi(x)^{-1}}\right)_{\varphi(x)} d\varphi_x(v)\rangle^2_e, \text{ de (1)} \\ &= \langle \left(dL_{\varphi(x)^{-1}}\right)_{\varphi(x)} d\varphi_x(dL_x)_e u', \left(dL_{\varphi(x)^{-1}}\right)_{\varphi(x)} d\varphi_x(dL_x)_e v'\rangle^2_e \\ &= \langle d\left(L_{\varphi(x)^{-1}} \circ \varphi \circ L_x\right)_e u', d\left(L_{\varphi(x)^{-1}} \circ \varphi \circ L_x\right)_e v'\rangle^2_e \\ &= \langle d\varphi_e u', d\varphi_e v'\rangle^2_e, \text{ pues } L_{\varphi(x)^{-1}} \circ \varphi \circ L_x = \varphi \\ &= \langle u', v'\rangle^1_e. \text{ de (2) y bilinealidad} \\ &= \langle (dL_x)_e^{-1} u, (dL_x)_e^{-1} v\rangle^1_e \\ &= \langle u, v\rangle^1_x, \text{ pues la métrica es invariante a izquierda.} \end{aligned}$$

Luego φ es una isometría.

Ahora supongamos que G no es simplemente conexo. De (2.1), existe $\widetilde{G}$ grupo de Lie simplemente conexo, espacio de cubrimiento de G, tal que la aplicación de cubrimiento $\pi : \widetilde{G} \to G$ es homomorfismo de grupos de Lie. Además, de (2.2)se tiene que $d\pi_{\widetilde{e}} : \widetilde{g} \to g$ es isomorfismo (donde $\widetilde{g}$ es el álgebra de Lie de $\widetilde{G}$ y $\widetilde{e}$ es la identidad de $\widetilde{G}$).

Así tenemos el diagrama siguiente, y puede definirse $\widetilde{\phi} : \widetilde{g} \to \widetilde{g}$, por $\widetilde{\phi} = d\pi_e^{-1} \circ \phi \circ d\pi_{\widetilde{e}}$ que es automorfismo de álgebras de Lie.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{g} & \overset{\widetilde{\phi}}{\cdots\to} & \widetilde{g} \\ d\pi_{\widetilde{e}} \downarrow & & \downarrow d\pi_{\widetilde{e}} \\ g & \overset{\phi}{\to} & g \end{array}$$

Como $\widetilde{G}$ es simplemente conexo, existe $\widetilde{\varphi} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ automorfismo de grupos de Lie tal que

$$d\widetilde{\varphi}_{\widetilde{e}} = \widetilde{\phi}$$

o sea

$$d\widetilde{\varphi}_{\widetilde{e}} = d\pi_{\widetilde{e}}^{-1} \circ \phi \circ d\pi_{\widetilde{e}}$$

de donde

$$\phi = d\pi_{\widetilde{e}} \circ d\widetilde{\varphi}_{\widetilde{e}} \circ d\pi_{\widetilde{e}}^{-1} \tag{3}$$

Ahora tenemos el diagrama siguiente, donde queremos definir $\varphi : G \to G$ automorfismo de grupos de Lie, tal que: $d\varphi_e = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \overset{\widetilde{\varphi}}{\to} & \widetilde{G} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G & \overset{\varphi}{\cdots\to} & G \end{array}$$

Primero observemos que, como π es epimorfismo, puede definirse $\xi : G \to \widetilde{G}$ homomorfismo de grupos de Lie tal que $\pi \circ \xi = Id_G$ Así tenemos que

$$d(\pi \circ \xi)_e = Id_g$$

o sea

$$d\pi_{\widetilde{e}} \circ d\xi_e = Id_g$$

de donde

$$d\xi_e = d\pi_{\widetilde{e}}^{-1} \tag{4}$$

Definamos ahora $\varphi : G \longrightarrow G$ por $\varphi = \pi \circ \widetilde{\varphi} \circ \xi$ Se tiene, de (3) y (4), que :

$$\begin{aligned} d\varphi_e &= d\pi_e^{\sim} \circ d\widetilde{\varphi}_e^{\sim} \circ d\xi_e \\ &= d\pi_e^{\sim} \circ d\widetilde{\varphi}_e^{\sim} \circ d\pi_e^{\sim -1} \\ &= \phi \end{aligned}$$

Ahora, como $d\varphi_e$ es isomorfismo, entonces φ es aplicación de cubrimiento, debido a (2.2) ,y por tanto φ debe ser automorfismo de G.
Finalmente, aplicando el mismo razonamiento que en el caso simplemente conexo, se prueba que $(G, <,>^1)$ es isométrico a $(G, <,>^2)$. ■

Teorema 2.5 *Sean G grupo de Lie n-dimensional, g su álgebra de Lie, $<,>^1$ y $<,>^2$ métricas invariantes a izquierda en G.*
Si $(G, <,>^1)$ es isométrico a $(G, <,>^2)$ entonces existe ϕ automorfismo del álgebra de Lie g tal que si $B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ es base de g, ortonormal respecto al producto interno $<,>_e^1$ en g, se tiene que $B_2 = \{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ es base de g, ortonormal respecto al producto interno $<,>_e^2$.

Demostración Sea $\varphi : (G, <,>^1) \to (G, <,>^2)$ isometría, entoces $\phi = d\varphi_e : g \to g$ es isomorfismo de espacios vectoriales. Sea $B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ base de g, ortonormal respecto al producto interno $<,>_e^1$ en g. B_1 determina una base de campos invariantes a izquierda en G, $\{E_1, ..., E_n\}$, definidos por

$$E_i(x) = (dL_x)_e e_i, i = 1, ..., n.$$

entonces

$$\{d\varphi_e(E_1), ..., d\varphi_e(E_n)\}$$

también es base de campos invariantes a izquierda.
Como $d\varphi_e$ es isomorfismo, usando los símbolos de Christofel, se obtiene que :

$$\nabla_{d\varphi_e(E_i)} d\varphi_e(E_j) = d\varphi_e(\nabla_{E_i} E_j) \tag{5}$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana en G. Así tenemos, de (5) y de la simetría de ∇, que :

$$\begin{aligned} [d\varphi_e(E_i), d\varphi_e(E_j)] &= \nabla_{d\varphi_e(E_i)} d\varphi_e(E_j) - \nabla_{d\varphi_e(E_j)} d\varphi_e(E_i) \\ &= d\varphi_e(\nabla_{E_i} E_j) - d\varphi_e(\nabla_{E_j} E_i) \\ &= d\varphi_e[E_i, E_j] \end{aligned}$$

Por tanto $\phi = d\varphi_e$ es automorfismo de algebras de Lie.
Finalmente, B_2 es ortonormal respecto a $<,>_e^2$. En efecto :

$$\begin{aligned}\langle \phi(e_i), \phi(e_j)\rangle_e^2 &= \langle d\varphi_e(e_i), d\varphi_e(e_j)\rangle_e^2 \\ &= \langle e_i, e_j\rangle_e^1, \text{ pues } \varphi \text{ es isometría.} \\ &= \delta_{ij}, \text{ ya que } B_1 \text{ es ortonormal respecto a } \langle , \rangle_e^1\end{aligned}$$

Así se completa la prueba. ∎

Referencias

[1] Milnor J. *Curvatures of left invariant metrics on Lie Groups*, Advances in Mathematics, **21** **(1976)**.

[2] Dotti I., Leite M.L. *Métricas invariantes en Grupos de Lie*, Escola de Geometría Diferencial. U. Estadual de Campinas, **(1980)**.

[3] Warner F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag **(1983)**.

[4] Goze M., Piu P. *Classification des métriques invariantes á gauche sur le groupe de Heisenberg*, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo, **Serie II Tomo XXXIX (1990)**.

Dirección del autor:

Juan Leiva V.
Instituto de Matemáticas
Universidad Austral de Chile
Casilla 567, Valdivia
jleiva@valdivia.uca.uach.cl