CUBO 11, 13-27 (1995)
Recibido: Setiembre 1995.

Reparametrización en modelos jerárquicos .*

Antonio Sanhueza C. - Guido del Pino M.

Resumen.

Usualmente se tiene acceso a un conjunto restringido de paquetes estadísticos computacionales, los cuales emplean ciertos tipos particulares de restricciones. Por ejemplo, el paquete estadístico GLIM emplea restricciones de celda de referencia, en tal caso las componentes paramétricas están condicionadas a ser expresadas bajo estas restricciones. Sin embargo, a uno le puede interesar obtener nuevas componentes paramétricas empleando otro tipo de restricción, pero no existe algún paquete estadístico que permita realizar ésto.

Mostraremos fórmulas generales que permiten relacionar dos parametrizaciones distintas (distintas restricciones) para un modelo lineal con estructura factorial (modelos jerárquicos).

1 Introducción

El Modelo Lineal Generalizado (M.L.G.) es una herramienta estadística que permite estudiar modelos lineales no clásicos. Fue propuesto por Nelder y Wedderburn (1972).

Un M.L.G. es en general definido por una distribución perteneciente a la familia exponencial, una estructura lineal y una función de enlace.

*Financiado completamente por proyecto DIUFRO 9323

Sean $Y_1, ..., Y_n$ variables aleatorias independientes con densidades $f_1, ..., f_n$ respectivamente. La componente aleatoria de un M.L.G. especifica una familia paramétrica de densidades a las que pertenecen las f_i.
Se acostumbra a escribir la función de densidad de una variable en términos de la parametrización natural y de un parámetro adicional ϕ :

$$f(y, \theta, \phi) = \exp\{\frac{y\theta - b(\theta)}{\phi} + c(y, \phi)\} \tag{1.1}$$

con $b(\cdot)$ y $c(\cdot)$ funciones conocidas y ϕ es llamado parámetro de escala, que es supuesto conocido para cada Y_i. Notar que para ϕ fijo esta función de densidad pertenece a la familia exponencial.
El parámetro natural θ está en correspondencia uno a uno con la media $\mu = E(Y)$.

Ejemplo 1.1 *Modelo Normal. Consideremos la variable Y_i con distribución normal de media μ_i y varianza σ^2. La función de densidad de Y_i es*

$$f(y, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

que puede ser escrita como:

$$f(y, \theta, \phi) = \exp\{\frac{(y\mu - \frac{\mu^2}{2})}{\sigma^2} - \frac{1}{2}(\frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2))\}$$

Por inspección esta pertenece a la familia exponencial y

$$\theta = \mu \ , \ \phi = \sigma^2 \ , \ b(\theta) = \frac{\theta^2}{2} \ , \ c(y, \phi) = -\frac{1}{2}\{\frac{y^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2)\}$$

Suponemos ahora que la media μ_i de la variable Y_i está determinada por los niveles $x_1^i, ..., x_k^i$ de k factores $F_1, ..., F_k$, donde el factor F_i tiene niveles en el conjunto A_i (discreto o continuo).
La componente sistemática de un M.L.G. es aquella que permite encontrar una función conocida, supuesta monótona y diferenciable, que relacione la media de la variable Y_i y una función de los niveles de los factores $F_1, ..., F_k$, es decir :

$$\lambda(\mu_i) = h(x_1^i, ..., x_k^i), \quad i = 1, ..., n.$$

Aquí λ recibe el nombre de función de enlace y h tiene la forma :

$$h = \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_i$$

para algún vector $\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)'$.

Lo anterior permite describir la estructura lineal del modelo, que es representada por:

$$\gamma = X\beta \tag{1.2}$$

con

$$\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)' \ , \ \beta = (\beta_1, ..., \beta_p)'$$

y X es la matriz de $n \times p$ $(p < n)$ conocida de rango p. Decimos de esta forma que el modelo es lineal en γ.

El vector γ recibe el nombre de predictor lineal y X matriz de diseño.

Ejemplo 1.2 *En el Modelo Normal :*

$$Y_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2) \ , \ E(Y_{ij}) = \mu_{ij}$$

con función de enlace y estructura lineal

$$\lambda_{ij} = \lambda(\mu_{ij}) = \mu_{ij} \ , \ \lambda_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

Al trabajar con modelos lineales generalizados, donde se consideran k factores categóricos, el significado del vector de parámetros β en (1.2) depende de las restricciones impuestas (contrastes de identificación). Esto se discute en detalle en del Pino, Rodríguez y Quintana (1991), donde analizan los contrastes de identificación, encontrando una regla general que permite expresar restricciones adecuadas a una parametrización arbitraria, lo que permite determinar una expresión general para las componentes paramétricas presentes en el modelo como combinación lineal de los valores del predictor lineal.

2 Modelos Jerárquicos

2.1 Conceptos Generales de los Modelos Jerárquicos

2.1.1 Conceptos básicos

Consideremos un M.L.G. con k factores $F_1, F_2, ..., F_k$, donde el factor F_i tiene niveles en el conjunto $A_i = \{1, 2, ..., n_i\}$, $i = 1, 2, ..., k$. Sea $A = A_1 \times \cdots \times A_k$. Para cada $x \in A$, los tratamientos, tenemos un parámetro asociado θ (parámetro natural), llamado en este caso parámetro de celda. Esta relación es representada por una función real valuada h definida sobre A:

$$h: A \to R, \quad \theta = h(x),$$

h es llamada función de respuesta. Si se impone la condición de que esta función pertenezca a un subespacio vectorial M se obtiene un modelo lineal.

Ejemplo 2.1 Sea $Y_{i,j}$ variable con distribución Poisson de parámetro $\mu_{i,j}$. Sean F_1 y F_2 dos factores con niveles $A_1 = \{1,2\}$ y $A_2 = \{1,2,3\}$ respectivamente. La función h es:

$$h(i,j) = \theta_{i,j} = \log(\mu_{i,j}),$$

y un modelo lineal de interés es :

$$\theta_{i,j} = \eta + \alpha_i + \beta_j$$

2.1.2 Notación Funcional de los Modelos Lineales

Denotaremos por $\overline{k}$ al conjunto $\{1,2,...,k\}$, donde k es el número de factores. Usaremos la siguiente notación :

1) B es un subconjunto genérico de $\overline{k}$. $B = \Phi$ o $B = \{i_1,...,i_r\}$, con $i_1 < ... < i_r$.

2) $x_B = (x_{i_1},...,x_{i_r})$.

3) f_B es una función que depende de $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ y que es constante con respecto a los x_i, $i \notin B$. En otras palabras el valor de $f_B(x)$ depende sólo de x_B. Si $B = \Phi$ se interpreta a f_Φ como una función constante.

4) N_B es el conjunto de todas las funciones del tipo f_B.

5) $\overline{f}_B$ es una función arbitraria de $x_B = (x_{i_1},...,x_{i_r})$. De este modo $f_B(x_1,...,x_k) = \overline{f}_B(x_{i_1},...,x_{i_r})$.

6) $\overline{N}_B$ es el conjunto de las funciones $\overline{f}_B$.

7) $n_B = \prod_{i \in B} n_i, \quad B \in \mathcal{B}$.

Para una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos B del conjunto $\{1,2,...,k\}$ denotamos por $N(\mathcal{B})$ al subespacio

$$N(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} N_B$$

Definición 2.1 *El subespacio vectorial M de funciones real valuadas con dominio común $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ es un modelo jerárquico si y sólo si*

$$M = N(\mathcal{B})$$

para alguna familia $\mathcal{B}$.

2.2 Parametrizaciones en Modelos Jerárquicos

Consideremos un modelo jerárquico $M = N(\mathcal{B})$. Para la función $h \epsilon M$ tenemos que

$$h = \sum_{B \in \mathcal{B}} h_B, \quad h_B \in N_B, \quad B \in \mathcal{B} \tag{2.1}$$

que puede ser también escrita como :

$$h(x_B) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \overline{h}_B(x_B), \quad \overline{h}_B \in \overline{N}_B, \quad B \in \mathcal{B},$$

donde $i_1 < i_2 < ... < i_r$ son los elementos ordenados de B.
En forma natural, una parametrización para el modelo jerárquico es :

$$\beta = (\overline{h}_B, \quad B \in \mathcal{B}),$$

donde $\mathcal{B}$ debe considerarse como una familia ordenada de conjuntos.
Dado que el conjunto $\overline{N}_B$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto N_B, se puede elegir como una parametrización equivalente del modelo jerárquico a :

$$\beta = (h_B, \quad B \in \mathcal{B})$$

Especificar la función $\overline{h}_B$ es equivalente a especificar los n_B valores $\overline{h}_B(x_B)$.
De esta forma la función h está expresada en términos de $\sum_{B \epsilon \mathcal{B}} n_B$ parámetros.
La descomposición de h en (2.1) no es única, presentando muchos parámetros redundantes.
La redundancia de parámetros se puede visualizar también del modelo jerárquico

$$M = N(\mathcal{B}) = N_{B_1} + N_{B_2} + ... + N_{B_r}$$

donde $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_r\}$, debido a que los subespacios $N_{B_i}, \quad i = 1, 2, ..., r$ no son ortogonales entre si, ya que existen intersecciones no triviales en estos conjuntos. Aún si B_i y B_j son disjuntos, se tiene que $N_{B_i} \bigcap N_{B_j} = N_\Phi$, que es el conjunto de las funciones constantes.

Para evitar la redundancia de parámetros se debe imponer restricciones sobre las funciones h_B. En del Pino (1986) se muestra que bajo ciertas condiciones podemos encontrar subespacios R_B, $B \in \mathcal{B}$ vinculados a los N_B, tales que los R_B son una descomposición ortogonal de un modelo jerárquico

$$M = \sum_{i=1}^{r} R_{B_i},$$

lo que permitiría evitar la redundancia de parámetros. Estos subespacios ortogonales son obtenidos aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a la sucesión de subespacios :

$$N_{B_1}, \quad N_{B_1} + N_{B_2}, \quad \dots, \quad N_{B_1} + N_{B_2} + \dots + N_{B_r}$$

Esto da como resultado los siguientes subespacios ortogonales :

$$R_{B_1} = N_{B_1}$$

$$R_{B_s} = (N_{B_1} + \dots + N_{B_s}) \bigcap (N_{B_1} + \dots + N_{B_{s-1}})^{\perp}, \quad s = 2, \dots, r$$

De esta forma el modelo jerárquico puede ser escrito como:

$$M = N(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{r} R_{B_i}$$

En del Pino y Quintana (1993) se demuestra la siguiente caracterización :

Teorema 2.2 *La función g pertenece al espacio R_{B_s} si y solo si cumple con:*

$$g \in N_{B_s}, \quad g \perp N_{B_i} \bigcap N_{B_s}, \quad \forall i < s \tag{2.2}$$

Denotemos por g_B a un elemento genérico de R_B, la función $h \in M$ puede ahora ser escrita como:

$$h = \sum_{i=1}^{r} g_{B_i}, \quad g_{B_i} \in R_{B_i} \tag{2.3}$$

La familia de funciones $\beta^* = (g_B : B \in \mathcal{B})$, puede considerarse como una parametrización del modelo jerárquico, donde no existen componentes redundantes. Estas componentes dependen linealmente de la función h.

3 Operadores de Proyección y Reparametrizaciones

3.1 Operadores de Proyección

3.1.1 Conceptos Básicos

Introducimos una familia de operadores P_D, $D \subset \{1, ..., k\}$ definidos en el espacio de todas las funciones real valuadas sobre $A = A_1 \times \cdots \times A_k$. La función $P_D h$ pertenece a N_D y se obtiene promediando los valores $h(x)$ con respecto a las componentes $x_i, i \notin D$. Simbólicamente podemos escribir

$$(P_D h)(x_1, ..., x_k) = h(z_1, ..., z_k) \tag{3.1}$$

con

$$z_i = x_i, i \in D, \quad z_i = \bullet, i \notin D, \tag{3.2}$$

donde el símbolo $\bullet$ en (3.2) indica promediar los valores $h(x_1, ..., x_k)$ con respecto a la componente correspondiente de niveles del factor F_i. El promedio sobre los niveles del factor F_i no debe ser necesariamente aritmético sino que puede entregar ponderaciones diferentes a cada uno de los niveles del factor, como lo veremos en la siguiente sección. Denotaremos el operador sobre el espacio N_B por $P_{N_B} = P_B$

Teorema 3.1 *Para todo $B \subset \overline{k} = \{1, ..., k\}$, el operador P_B es un proyector sobre el espacio N_B.*

Demostración Es claro que $P_B h \in N_B$ para todo h y que $P_B h = h$ para todo $h \in N_B$. Basta entonces verificar que P_B es lineal, lo que es consecuencia directa de la linealidad de la operación de promediar.

La familia de proyectores $(P_B, \quad B \subseteq \overline{k})$ tiene la importante propiedad indicada en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 *Para cualquier $B, C \in \mathcal{B}$, se tiene*

$$P_B P_C = P_{B \cap C} \tag{3.3}$$

De (3.3) se deduce que :

a) Si $B \subset C$, entonces $P_B P_C = P_B$.

b) $P_B P_C = P_C P_B$

3.1.2 Uso de los Operadores de Proyección

Anteriormente vimos la forma de encontrar parámetros sin redundancia para un modelo jerárquico. Esto dió como resultado a (2.2), que puede ser expresada ocupando operadores de proyección :

$$g_{B_s} \in N_{B_s}, \quad P_{B_i \bigcap B_s} g_{B_s} = 0, \quad i < s$$

En este caso

$$P_{B_i \bigcap B_s} g_{B_s} = 0, \quad i < s \tag{3.4}$$

son las restricciones de estimabilidad.

Teorema 3.3 *El siguiente sistema de ecuaciones tiene una y sólo una solución para un* $h \in M = N(\mathcal{B})$ *:*

$$h = \sum_{i=1}^{r} g_{B_i} \quad g_{B_i} \in N_{B_i} \quad i = 1, 2, ..., r$$

$$P_D(g_{B_i}) = 0 \quad \forall D \in D_i \quad i = 1, 2, ..., r$$

donde

$$D_i = \{B_i \bigcap B_j \quad j < i\} \qquad i > 2$$

La demostración de este Teorema la encontramos en del Pino et. al. (1991).

Habiamos mencionado que era posible expresar a g_B, $B \in \mathcal{B}$ en función de h. El siguiente teorema basado en Rodriguez (1989) ayudará a ver esto.

Teorema 3.4 *Sea*

$$R_{B_1} = N_{B_1}$$

$$R_{B_s} = (N_{B_1} + ... + N_{B_s}) \bigcap (N_{B_1} + ... + N_{B_{s-1}})^{\perp}, \quad s = 2, ..., r$$

Sea también

$$Q_{B_s} = P_{R_{B_s}} \quad s = 1, ..., r$$

Entonces

$$Q_{B_s} = P_{B_s} \prod_{i=1}^{s-1} (I - P_{B_i}) \quad s = 2, ..., r$$

El teorema permite escribir g_{B_i} como :

$$g_{B_i} = Q_{B_i} h \quad i = 1, 2, ..., r \tag{3.5}$$

lo que formaliza la idea de que los parámetros g_{B_i} se obtengan linealmente a partir de h.

3.1.3 Casos particulares de Restricciones de Estimabilidad

El subespacio R_{B_i} puede ser escrito como:

$$R_{B_i} = \{g_{B_i} \in N_{B_i} / P_{B_s \bigcap B_i} g_{B_i} = 0, \quad i < s\}$$

y

$$P_{B_s \bigcap B_i} g_{B_i} = 0, \quad i < s$$

son las restricciones. Como los proyectores están determinados por los promedios que los definen, diferentes casos particulares se obtienen para distintas elecciones de los promedios para cada factor, es decir, para distintos significados de $*$ en (3.2):

a) Restricciones Usuales :
Este caso corresponde a $* = \bullet$, el promedio aritmético de los valores $h(x_1, ..., x_k)$ de la función h sobre los niveles del factor correspondiente.

Estas restricciones son bastante usadas en los textos de Diseños de Experimentos, en particular para obtener efectos principales e interacciones. Se usan también en modelos para tablas de contingencia (Bishop, Fienberg and Holland (1975)).

b) Restricciones de Celda de Referencia:
En este caso $* = ref$, donde ref es un nivel fijo del factor, habitualmente el primero o el último.

Muchos paquetes estadísticos computacionales emplean este tipo de restricciones para la definición de los parámetros, por ejemplo SAS (ver SAS Institute Inc. (1985)) utiliza como referencia el último nivel, mientras que GLIM (ver Baker and Nelder (1978), Payne (1985)) emplea como referencia al primero.

3.2 Parametrizaciones Alternativas para un modelo Jerárquico

3.2.1 Planteamiento General

Estudiaremos en esta sección la relación que existe entre dos parametrizaciones alternativas para un mismo modelo jerárquico. En del Pino, Quintana y Rodriguez (1991) vemos fórmulas generales que permiten encontrar más de una representación arbitraria para un modelo jerárquico, empleando distintos contrastes de identificación (restricciones de identificabilidad). En esta parte deducimos fórmulas generales que relacionan dos representaciones cualquiera de un modelo jerárquico de la forma (2.3). Supongamos entonces que se han obtenido las representaciones alternativas

$$M = \sum_{i=1}^{r} R_{B_i} = \sum_{i=1}^{r} T_{B_i}$$

correspondientes a dos tipos de promedio $\star$ y $\bullet$. Sean $P_B^\star$ y $P_B^\bullet$ los proyectores correspondientes.

Los espacios R_{B_i} y T_{B_i} se construyen de manera análoga:

$$R_{B_s} = \{g_{B_s} \in N_{B_s} / P^\star_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} g_{B_s} = 0 \quad i < s\}$$

$$T_{B_s} = \{f_{B_s} \in N_{B_s} / P^\bullet_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} f_{B_s} = 0 \quad i < s\}$$

Podemos ahora escribir la función h de las formas :

i) $h = \sum_{B \in \mathcal{B}} g_B$

ii) $h = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$

con

$$g_{B_s} \in N_{B_s} \quad P^\star_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} g_{B_s} = 0 \quad i < s$$

$$f_{B_s} \in N_{B_s} \quad P^\bullet_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} f_{B_s} = 0 \quad i < s$$

las cuales corresponden a dos parametrizaciones distintas para un mismo modelo.

Podemos encontrar tanto los parámetros g_B como los f_B como transformaciones lineales de h. Nos planteamos el problema de encontrar los parámetros f_B en función de los parámetros g_B, es decir, obtener nuevos parámetros a partir de otros.

3.2.2 Teoremas Fundamentales

Teorema 3.5 *Sean los espacios*

$$R_{B_s} = \{g_{B_s} \in N_{B_s} / P^*_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} g_{B_s} = 0 \quad i < s\}$$

y

$$T_{B_s} = \{f_{B_s} \in N_{B_s} / P^*_{N_{B_s} \bigcap N_{B_i}} f_{B_s} = 0 \quad i < s\}$$

Consideremos dos parametrizaciones alternativas para un mismo modelo jerárquico, que son expresadas por :

$$h = \sum_{B \in \mathcal{B}} g_B \qquad h = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$$

donde $g_B \in R_B$, *y* $f_B \in T_B$, *con* $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_r\}$. *Si se conoce* g_B, *entonces* f_B *se obtiene de la siguiente expresión :*

$$f_{B_s} = \sum_{j=1}^{r} P_{B_1} g_{B_j} \quad s = 1$$

$$f_{B_s} = \sum_{j=1}^{r} P_{B_s} \prod_{i=1}^{s-1} (I - P_{B_i}) g_{B_j} \quad s > 1$$

Demostración Ocupando (3.5) podemos escribir a f_{B_s} :

$$f_{B_1} = P_{B_1} h$$

$$f_{B_s} = P_{B_s} \prod_{i=1}^{s-1} (I - P_{B_i}) h \quad s = 2, 3, ..., r$$

como

$$h = \sum_{j=1}^{r} g_{B_j}$$

Así

$$f_{B_1} = P_{B_1} (\sum_{j=1}^{r} g_{B_j})$$

$$f_{B_s} = P_{B_s} \prod_{i=1}^{s-1} (I - P_{B_i}) (\sum_{j=1}^{r} g_{B_j})$$

Entonces :

$$f_{B_1} = \sum_{j=1}^{r} P_{B_1} g_{B_j}$$

$$f_{B_s} = \sum_{j=1}^{r} P_{B_s} \prod_{i=1}^{s-1} (I - P_{B_i}) g_{B_j}$$

Si el conjunto $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersección, es decir $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{B}$ implica $B \bigcap C \in \mathcal{B}$, obtenemos una expresión para f_B en función de g_D dada por el siguiente teorema :

Teorema 3.6 *Consideremos los conjuntos*

$$S(B) = \{C \in \mathcal{B}/C \subset B\}$$

$$T(B) = \{D \in \mathcal{B}/B \subseteq D\}$$

para algún $B \in \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{B}$ cerrado bajo intersección y M un modelo jerárquico con dos parametrizaciones alternativas

$$h = \sum_{B \in \mathcal{B}} g_B \qquad h = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$$

Si se conoce g_B, $B \in \mathcal{B}$, entonces puede obtenerse f_B de la expresión :

$$f_B = \sum_{D \in T(B)} P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C) g_D$$

Demostración Como $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersección escribimos a f_B como

$$f_B = (P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C))h$$

y

$$h = \sum_{D \in \mathcal{B}} g_D$$

luego

$$\begin{aligned} f_B &= (P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C))(\sum_{D \in \mathcal{B}} g_D) \\ &= \sum_{D \in S(B)} P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C) g_D + \sum_{D \in T(B)} P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C) g_D \\ &= + \sum_{D \in (S(B) \bigcup T(B))^c} P_B \prod_{C \in S(B)} (I - P_C) g_D \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\sum_{D\in S(B)} P_B \prod_{C\in S(B)} (I - P_{B\bigcap C})g_D &= \sum_{D\in S(B)} P_B(g_D - g_D) \prod_{\substack{C \in S(B)\\ C \neq D}} (g_D - P_C g_D)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{D\in (S(B)\bigcup T(B))^c} P_B \prod_{C\in S(B)} (I - P_C)g_D &= \sum_{D\in (S(B)\bigcup T(B))^c} P_B \prod_{C\in S(B)} (g_D - g_D)\\ &= 0\end{aligned}$$

Así

$$f_B = \sum_{D\in T(B)} P_B \prod_{C\in S(B)} (I - P_C)g_D$$

3.2.3 Una Aplicación.

Presentamos una aplicación del Teorema 3.6 a un ejemplo en particular.

Ejemplo 3.1 *Consideremos un modelo con dos parametrizaciones:*

$$\begin{aligned}h(x_1,x_2,x_3) &= f_\Phi(x_1,x_2,x_3) + f_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) + f_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3) + f_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &\quad + f_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\\ h(x_1,x_2,x_3) &= g_\Phi(x_1,x_2,x_3) + g_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) + g_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3) + g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &\quad + g_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}$$

En este caso $B = \{\Phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$ es cerrado bajo intersección. Aplicamos entonces el Teorema 3.6 :

i) $f_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{D\in T(\{1\})} P_{\{1\}} \prod_{C\in S(\{1\})} (I - P_C)g_D$

con

$$S(\{1\}) = \{\Phi\}$$

$$T(\{1\}) = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$$

Así

$$\begin{aligned}f_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) &= P_{\{1\}}(I - P_\Phi)g_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) + P_{\{1\}}(I - P_\Phi)g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &\quad + P_{\{1\}}(I - P_\Phi)g_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &= (P_{\{1\}} - P_\Phi)g_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) + (P_{\{1\}} - P_\Phi)g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &\quad + (P_{\{1\}} - P_\Phi)g_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)\\ &= (g_{\{1\}}(x_1,x_2,x_3) - g_{\{1\}}(\bullet,x_2,x_3)) + (g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,\bullet)\\ &\quad - g_{\{1,3\}}(\bullet,x_2,\bullet)) + (g_{\{1,2\}}(x_1,\bullet,x_3) - g_{\{1,2\}}(\bullet,\bullet,x_3))\end{aligned}$$

ii) $f_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{D\in T(\{3\})} P_{\{3\}} \prod_{C\in S(\{3\})} (I-P_C)g_D$

con

$$S(\{3\})=\{\Phi\}$$

$$T(\{3\})=\{\{3\},\{1,3\}\}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} f_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3) &= (P_{\{3\}}-P_\Phi)g_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3)+(P_{\{3\}}-P_\Phi)g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3) \\ &= (g_{\{3\}}(x_1,x_2,x_3)-g_{\{3\}}(x_1,x_2,\ast)) \\ &+(g_{\{1,3\}}(\ast,x_2,x_3)-g_{\{1,3\}}(\ast,x_2,\ast)) \end{aligned}$$

iii) $f_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{D\in T(\{1,3\})} P_{\{1,3\}} \prod_{C\in S(\{1,3\})} (I-P_C)g_D$

con

$$S(\{1,3\})=\{\Phi,\{1\},\{3\}\}$$

$$T(\{1,3\})=\{\{1,3\}\}$$

$$\begin{aligned} f_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3) &= P_{\{1,3\}}(I-P_\Phi)(I-P_{\{1\}})(I-P_{\{3\}})g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3) \\ &= (P_{\{1,3\}}-P_{\{1\}}-P_{\{3\}}+P_\Phi)g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3) \\ &= g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,x_3)-g_{\{1,3\}}(x_1,x_2,\ast)-g_{\{1,3\}}(\ast,x_2,x_3) \\ &+g_{\{1,3\}}(\ast,x_2,\ast) \end{aligned}$$

iv) $f_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)=\sum_{D\in T(\{1,2\})} P_{\{1,2\}} \prod_{C\in S(\{1,2\})} (I-P_C)g_D$

con

$$S(\{1,2\})=\{\Phi,\{1\}\}$$

$$T(\{1,2\})=\{\{1,2\}\}$$

$$\begin{aligned} f_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3) &= P_{\{1,2\}}(I-P_\Phi)(I-P_{\{1\}})g_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3) \\ &= g_{\{1,2\}}(x_1,x_2,x_3)-g_{\{1,2\}}(x_1,\ast,x_3) \end{aligned}$$

Referencias

[1] Baker R.J., Nelder J.A. *The GLIM System. Release 3. Generalized Linear Interactive Modelling*, Oxford: Numerical Analysis Group, (1978).

[2] Bishop Y.M.M., Fienberg S.E., Holland P.W. *Discrete Multivariate Analysis*, Cambridge, Massachusetts : MIT Press. (1975).

[3] del Pino G. *A new formulation for the Analysis of balanced complete factorial designs*, Universidad Católica de Chile, Departamento de Probabilidad y Estadística, Facultad de Matemáticas, Informe Técnico FM-8617, (1986).

[4] del Pino G., Quintana F., Rodríguez W. *Parametrization in Factorial Generalized Linear Models*, Brazilian Journal of Statistics, 5 103-134 (1991).

[5] del Pino G.,Quintana F. *Response Function Models: Parametrization and Factorial Structure*, (Libro en preparación), (1993).

[6] Nelder J., Wedderburn R.W.M. *Generalized Linear Models*, J.R. Statist. Soc. A. (1972).

[7] Payne C.D. *The GLIM System. Release 3.77*, Oxford: Numerical Analysis Group, (1985).

[8] Rodríguez W. *Parametrización en Modelos Lineales con Estructura Factorial*, Tesis de Licenciatura en Matemática y Estadístico, Universidad Católica de Chile, (1989).

[9] SAS Institute Inc. *User's Guide: Statistics, Version 5*, Edition Cary, NC: SAS Institute Inc., (1985).

Dirección de los autores:

Antonio Sanhueza C.
Departamento de Matemáticas
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D. Temuco

Guido del Pino M.
Instituto de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306. Santiago