Cubo Matemática Educacional
Vol., 4. N°2, Junio 2002

UNA CLASE PRACTICA DE AXIOMATIZACION

Cristián Mallol
Departamento de Matemática
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile.

El siguiente apunte se inspira en un curso que impartí en la Universidad de Montpellier el año 1984 en el marco de un equipo dirigido por el Dr. Oliver Leroy (Q.E.P.D.). Las ideas que se desarrollan buscan su sustento en elementos expuestos por Emil Artin en el capítulo III de su libro Geometric Algebra (New York, 1955).

Sean X y Δ dos conjuntos, I una relación de X en Δ y consideremos el siguiente postulado:

$(\boldsymbol{R})$: *Dados* $a, b \in X$, $a \neq b$ *existe un y sólo un* $\gamma \in \Delta$ *tal que* $aI\gamma$ *y* $bI\gamma$.

Las exigencias de existencia y unicidad expresadas por este postulado nos permiten incorporar una notación que puede ser útil: si a y b son dos elementos distintos de X, denotamos por $(\boldsymbol{ab})$ el único elemento de Δ que está en relación simutánea con ellos.

El enunciado del postulado (**R**) podemos dividirlo en dos (existencia y unicidad), a saber:

$(\boldsymbol{RE})$: *Dados* $a, b \in X$, $a \neq b$, *existe un* $\gamma \in \Delta$ *tal que* $aI\gamma$ *y* $bI\gamma$.
$(\boldsymbol{RU})$:*Dados* $a, b \in X$, $a \neq b$, *y* $\gamma, \delta \in \Delta$, *si se tiene* $aI\gamma$, $bI\gamma$, $aI\delta$ *y* $bI\delta$ *entonces* $\gamma = \delta$.

En los ejemplos que vienen a continuación, se entregan dos conjuntos y una relación entre ellos. Estudie en cada uno si se cumplen las condiciones *RE* y *RU:*

1. $X = A$, $\Delta = P(A)$, I : *la relación de pertenencia.*
2. $X = Z$, $\Delta = \{\{x, x+1\},\ x \in Z\}$, I : *la relación de pertenencia.*

3. Si $|A| \geqslant 5, X = A, \Delta = P_2(A)$, I : *la relación de pertenencia.*

4. $X = \Delta = Z, I$: *la relación menor o igual* $(\leqslant)$.

5. *En cada uno de los casos anteriores, intercambie los conjuntos y utilice la relación recíproca.*

Todos estos casos son una realización de la estructura definida por:

"Dos Conjuntos y una Relación entre Ellos"

El estudio realizado muestra que las condiciones RE y RU no son propiedades necesarias de la estructura considerada. Muestra, además, que tales condiciones son independientes entre ellas y compatibles. En efecto, si las cosas han sido bien hechas vemos que:

- Tenemos un caso en donde ninguna de las condiciones se verifica, de lo que se infiere que no son una propiedad necesaria de la estructura.

- Tenemos casos en donde se verifica una pero no la otra, lo que implica que son independiente entre ellas ya que una no es consecuencia lógica de la otra.

- Por último, encontramos situaciones en que se verifican las dos lo que muestra que tales condiciones son compatibles ya que el afirmar la validez de ambas no produce contradicción alguna.

Para lo que queremos desarrollar necesitamos la siguiente relación P sobre el conjunto Δ, definida utilizando la relación I :

Si $\gamma, \delta \in \Delta$ *entonces* $\gamma P \delta$ *si* $\gamma = \delta$ o, *en caso contrario, si* $\nexists\ a \in X$ *tal que* $aI\gamma$ *y* $aI\delta$.

Incorporemos ahora un nuevo postulado E, que enunciamos de la manera siguiente:

(***E***) : *Dados* $a \in X$ *y* $\gamma \in \Delta$ *existe un y sólo un* $\delta \in \Delta$ *tal que* $aI\delta$ *y* $\gamma P \delta$.

- *Demuestre que el postulado E implica que la relación P es de equivalencia.*

Al igual que antes, este enunciado podemos dividirlo en dos (existencia y unicidad), a saber:

(***EE***) : *Dados* $a \in X$ *y* $\gamma \in \Delta$ *existe un* $\delta \in \Delta$ *tal que* $aI\delta$ *y* $\gamma P\delta$.

(***EU***) :*Dados* $\gamma, \delta, \theta \in \Delta$ y $a \in X$ *si se tiene* $aI\delta, aI\theta, \gamma P\delta$ *y* $\gamma P\theta$ *entonces* $\delta = \theta$.

En los casos expuestos más arriba, estudie la relación P aquí definida. De igual manera, analice la validez de las condiciones EE y EU. Infiera la independencia y compatibilidad entre las condiciones RE, RU, EE y EU.

A estas alturas, ya hemos comprobado la dificultad que tiene manipular estas formalizaciones, así sean estos enunciados de una mínima complejidad. En aras de acostumbrarnos un poco más, proponemos realizar el mismo tipo de verificaciones (validez, independencia y compatibilidad) con los nuevos ejemplos que agregamos:

1. *Si* $|A| = 2n$, $n \geqslant 3$, $X = A$, $\Delta = P_n(A)$, I : *la relación de pertenencia.*

2. $L = \{x, y\}$, $\Delta = \{e\}$, $I = \{(x, e), (y, e)\}$.

3. $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
   $\Delta = \{\{a, b, e\}, \{a, c, f\}, \{a, d, g\}, \{b, c, d\}, \{b, f, g\}, \{c, e, g\}, \{e, d, f\}\}$, I : *la relación de pertenencia.*

4. *Si* $|A| = 4$, $X = A$, $\Delta = P_2(A)$, I : *la relación de pertenencia.*

5. *En cada uno de los casos anteriores, intercambie los conjuntos y utilice la relación recíproca.*

La dificultad que hemos tenido para realizar todas estas verificaciones viene -entre otras cosas- de la carencia de un referente cultural que guíe nuestra intuición, de manera de tener un soporte psicológico que contribuya a hacernos sentir que obramos en un marco "natural", relativamente conocido y sin duda aceptado, que nos permite caminar con un cierto optimismo en una determinada dirección, más allá de que ésta sea en definitiva parcial o totalmente desconocida.

Para aliviar (por el momento) este malestar, usted estará de acuerdo en que los postulados estudiados tienen una realización perfectamente natural en el lenguaje y en los axiomas de la geometría plana. En efecto, el diccionario que necesitamos es el siguiente:

- *Los elementos de X corresponderían a los* ***puntos****; los de Δ corresponderían a las* ***rectas****.*

- *La relación de incidencia I expresaría que "****tal punto está sobre tal recta****" o, si se quiere , que "****tal recta pasa por tal punto****".*

- *El postulado R encontraría su realización en: "****Por dos puntos pasa una y sólo una recta****".*

- *La relación P se expresaría como la relación de* ***paralelismo*** *entre rectas.*

- *Y el postulado E, por el axioma de Euclides: "****Existe una única recta que pasa por un punto dado y que es paralela a una recta dada****".*

Es así como en un dos por tres hemos llegado al mundo de los griegos y, de un parpadeo, nos hemos recibido la herencia de tres mil años de cultura. Podemos decir que empezamos a sentirnos mejor......¿Podemos?.... De cierta manera la respuesta es sí, pues hemos incorporado a nuestros raciocinios el apoyo visual, tan necesario desde el punto de vista de la seguridad sicológica. Sin embargo, y sin afán de aguar la fiesta, desgraciadamente debo recordarles que los dibujos si bien guían nuestra intuición, no prueban nada por sí mismos.

El haber establecido este diccionario significa que el estudio clásico de ciertas cuestiones ligadas a la geometría pueden ser realizados con el apoyo del lenguaje conjuntista y de los elementos axiomáticos que se han descrito aquí. Tal cual están las cosas, ellos traducen efectivamente algunas situaciones conocidas y algunas propiedades pueden efectivamente deducirse de los postulados que hemos definido. Así, por ejemplo, traduzca el lenguaje aquí utilizado y luego demuestre que son consecuencia lógica de los postulados R y E, las siguientes afirmaciones:

- *Dos rectas no paralelas se cortan en un solo punto.*

- *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre ellas.*

Como ustedes habrán podido apreciar, lo que para la intuición visual puede parecer inmediato requiere de mucho rigor cuando se trabaja con un lenguaje preciso y en el marco rígido que delimitan los postulados axiomáticos. Los ejemplos estudiados anteriormente son estructuras que tienen cierta similitud con aquellas que emergen en el estudio de la geometría; la similitud se acrecienta en la medida que los diferentes aspectos de los postulados se verifiquen. Sin embargo, no debemos confundirnos: ésta es sólo, en mayor o menor grado, una similitud estructural: no estamos trabajando en el plano.

Ahora bien, en aras de acercarnos a la realidad de la geometría plana, debemos incorporar un nuevo postulado que da cuenta de un hecho tan evidente que en general lo pasamos por alto: **existen por lo menos tres puntos no alineados.** Este postulado, que llamaremos de Suficiencia se enuncia de la manera siguiente:

(***Suf***) : *Existen* $a, b, c \in X$, *distintos entre ellos y* $\gamma \in \Delta$ *tales que* $aI\gamma, bI\gamma$ *pero no* $cI\gamma$.

Otra manera de enunciar este postulado es:

- *Existen* $a, b, c \in X$, *distintos entre ellos tales que no se tiene* $cI\,(ab)$.

El Plano Rudimentario

Definimos como ***Plano Rudimentario*** *una estructura de* ***Dos Conjuntos*** *y una* ***Relación entre Ellos*** *de manera que los postulados* ***R, E*** *y* ***Suf*** *se cumplan.* El nombre que le hemos dado a esta estructura se justifica por la gran similitud con el comportamiento geométrico. Es por ello que buscando aligerar el lenguaje, pero sin confundir el objeto de estudio, adoptamos definitivamente la jerga geométrica en el sentido de llamar puntos a los elementos de X y rectas a los elementos de Δ. Diremos, además, que los postulados en cuestión son los **axiomas** de la estructura; es claro que los distintos teoremas y resultados que obtengamos de esta estructura serán necesariamente las inferencias lógicas que logremos producir a partir de dichos axiomas. Así por ejemplo, le proponemos demostrar las siguientes propiedades de un plano rudimentario π :

1. *Si* x *e* y *son dos puntos distintos de la recta* (ab) *demuestre que* $(xy) = (ab)$.

2. *π tiene al menos dos rectas paralelas.*

3. *π tiene al menos cuatro puntos.*

4. *Dadas dos rectas δ y δ', existe una biyección entre el conjunto de los puntos que están sobre δ y el conjunto de los puntos que están sobre δ'.*

5. *Dados dos puntos a y b, existe una biyección entre el conjunto de rectas que pasa por a y el conjunto de rectas que pasa por b.*

6. *En este contexto, defina la noción de paralelógramo y de diagonales de un paralelógramo. Luego demuestre que la afirmación* ***"las diagonales de un paralelógramo se interceptan"*** *no puede ser ni demostrada ni negada a partir de los axiomas del plano rudimentario.*

Este último ejercicio nos señala que distamos de estar en el contexto de la geometría plana. A decir verdad, los axiomas R, E y Suf son incapaces de dar cuenta no solo de este aspecto, sino que de todo lo que tenga que ver con proporcionalidad; si usted quiere convencerse de ello, trate de producir bajo estas condiciones (y sólo éstas) el Teorema de Thales: le deseamos mucho ánimo...

Este tipo de carencias motiva el calificativo de "rudimentario" que hemos adoptado aquí. Más aún, que el tema de las "diagonales" no pueda ser ni probado ni negado, significa que esa incerteza no produce contradicción con las propiedades de un plano rudimentario, de manera que, si lo quisiéramos podríamos agregar como axioma el que **las diagonales de un paralelógramo no se encuentren** excluyendo así, definitivamente, la idea de asimilar el plano rudimentario a las características de una superficie plana.

Para graficar más lo que estamos diciendo, recurramos al ejercicio 4 de la página 3: no es difícil constatar que tenemos allí una estructura de plano rudimentario (haga las comprobaciones del caso). En ese contexto, si $X = \{a, b, c, d\}$, entonces los puntos a, b, c y d definen un paralelógramo con rectas paralelas $\{a, b\} \, || \, \{c, d\}$ y $\{a, c\} \, || \, \{b, d\}$; las diagonales de tal paralelógramo son las rectas $\{a, d\}$ y $\{b, c\}$ que, como podemos ver, no se cortan entre ellas!!

Terminamos esta nota con los ejercicios siguientes:

1. Sea π un plano rudimentario. Si existe una recta que tiene exactamente tres puntos, demuestre que:

   (a) Toda recta tiene exactamente tres puntos.

   (b) Por todo punto pasan exactamente cuatro rectas.

   (c) El plano π contiene exactamente nueve puntos y doce rectas.

   (d) Según usted, ¿existe un plano rudimentario que cumpla estas condiciones? Y de ser así, ¿qué pasa con el tema de las diagonales?

2. Enuncie el ejercicio anterior bajo la premisa: existe una recta que tiene exactamente n puntos. Haga las demostraciones y construcciones pertinentes.