Cubo Matemática Educacional
Vol., 4. Nº 2, Junio 2002

UN TRUCO DE NAIPES

En la búsqueda de puntos fijos

Cristián Mallol
Departamento de Matemática
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile.

Tome el mazo de naipes con las figuras hacia abajo. Disponga 21 cartas repartiéndolas con las figuras hacia arriba, de derecha a izquierda y de arriba a abajo en tres columnas, cuidando de colocar cada carta por columna un poco encima de la anterior. Pida que alguien elija una carta y le indique en qué columna se encuentra. Recoja las cartas dejando la columna señalada entre las otras dos. Repita esta manipulación dos veces más (repartir, preguntar, recoger). Entonces, después de la última recogida, deshágase de las diez primeras cartas; la que sigue, la onceava carta, es la escogida por el cándido de turno y usted se creerá un mago tan bueno como el gran Houdini. En lo que sigue analizaremos y generalizaremos este truco.

Dada la manera de disponer y recoger las cartas en este juego, después de una manipulación es claro que las cartas de la columna elegida ocuparán las posiciones señaladas con la letra **E**

X	X	X		X	X	X
X	X	X		X	X	X
X	X	X		X	E	E
X	X	X	$\longrightarrow$	E	E	E
X	X	X		E	E	X
X	X	X		X	X	X
X	X	X		X	X	X

De este modo, si enumeramos las posiciones de la siguiente manera:

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
15	16	17
18	19	20

Por lo que, dependiendo de la columna en donde se encuentre la carta elegida, tenemos las siguientes posibilidades:

X	X	X
X	X	X
X	0	3
6	9	12
15	18	X
X	X	X
X	X	X

X	X	X
X	X	X
X	1	4
7	10	13
16	19	X
X	X	X
X	X	X

X	X	X
X	X	X
X	2	5
8	11	14
17	20	X
X	X	X
X	X	X

Esto nos lleva a modelizar el problema con la función

$$M : \{0, 1, ..., 19, 20\} \longrightarrow \{0, 1, ..., 19, 20\}$$

que opera sobre las posiciones como sigue:

$$\begin{array}{rcl} 0,\ 1,\ 2 & \longrightarrow & 7 \\ 3,\ 4,\ 5 & \longrightarrow & 8 \\ 6,\ 7,\ 8 & \longrightarrow & 9 \\ 9,\ 10,\ 11 & \longrightarrow & 10 \\ 12,\ 13,\ 14 & \longrightarrow & 11 \\ 15,\ 16,\ 17 & \longrightarrow & 12 \\ 18,\ 19,\ 20 & \longrightarrow & 13 \end{array}$$

y que tiene por definición genérica:

$$M\,(3q + r) = 7 + q \quad \text{con} \quad 0 \leqslant q \leqslant 6 \quad y \quad 0 \leqslant r \leqslant 2.$$

Vemos que esta función tiene un y sólo un punto fijo, es decir una posición f tal que $M(f) = f$: se trata de la correspondiente a la posición enumerada con el 10. Más aún, constatamos que para toda posición x se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{si } x < 10 \text{ entonces} & x < M(x) \leqslant 10, \\ \text{si } x > 10 \text{ entonces} & x > M(x) \geqslant 10. \end{array}$$

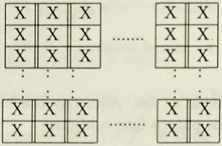
Todo esto quiere decir que por aplicación reiterada de la función M, siempre se llega a la posición 10; en este caso,

$$M^3\,(x) = 10 \quad \text{para todo } x \in \{0, 1, ..., 19, 20\}$$

cuestión que hubiéramos podido también deducir de la definición ya que:

$$Max\,(|f - M\,(x)|) = 3.$$

Ahora bien, este problema se generaliza con un juego en que se dispongan n columnas de p naipes cada una y escogiendo de antemano un lugar fijo, que denotamos por k, para colocar la columna de la carta elegida.



Teniendo en claro que las columnas son enumeradas del 0 al $n-1$ y que las filas lo son del 0 al $p-1$, sabemos que la posición ocupada por el cruce de la línea q con la columna r está dada por $qn + r$. Si la carta elegida ocupa esta posición, al ubicar su columna en el lugar k, esta carta pasa a ocupar la posición $qn + k$, siendo ella la q-ésima carta de la columna.

Todo esto significa que después de efectuar una manipulación (es decir: recoger las cartas según modo indicado, colocar la columna elegida en el lugar k y disponer las cartas según modo indicado) como se habrán repartido primero k columnas de p cartas, la elegida se encontrará en la posición $pk+q$.

Es decir, estamos estableciendo que la manipulación se modeliza con la función

$$M : I_{n,p} \longrightarrow I_{n,p} \ \ donde \ \ I_{n,p} = \{0, 1, ..., np-1\},$$

$$M(qn+r) = kp + q \ \ con \ \ 0 \leqslant q \leqslant p-1 \ \ y \ \ 0 \leqslant r \leqslant n-1.$$

Indagar si este juego tiene solución pasa por estudiar si M tiene puntos fijos y adquiere calidad de "truco infalible" si encontramos sólo uno. Las conclusiones salen de estudiar la igualdad

$$M(qn+r) = qn + r$$

en aras de ver si existen q y r que la verifiquen. Esta igualdad se puede reescribir como:

$$kp = q(n-1) + r$$

expresión que nos recuerda la división euclidiana de kp por $n-1$. Sin embargo, hay dos situaciones posibles:

1. Si $n-1$ no divide a kp. Obligadamente r$\neq$ 0, $n-1$ y, en este caso, existe un sólo punto fijo

$$f = q_f n + r_f$$

donde q_f y r_f son el cociente y el resto de la división de kp por $n-1$.

2. Si $n-1$ divide a kp. Aquí hay dos casos con el mismo tipo de soluciones: dos puntos fijos contiguos

   - Ya sea $r=0$; en este caso se tiene que:

   $$kp = q(n-1)$$

   y podemos inferir que existen dos puntos fijos,

   $$f = q_f n \ \ y \ \ f' = f - 1 = (q_f - 1)\, n + (n-1)$$

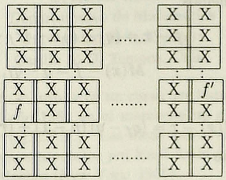
   donde q_f es el cociente de la división exacta de kp por $n-1$.

- Ya sea $r = n - 1$, caso en el que reescribiendo se logra:

$$kp = (q+1)(n-1)$$

obteniendo la misma situación anterior.

Dada la escritura de f y f', estos puntos fijos siempre aparecerán distribuidos de la manera siguiente:



No es mala idea que el lector compruebe que en todos los casos estudiados (1 y 2), los puntos fijos encontrados lo son efectivamente.

En los dos casos el truco funciona sin problemas, salvo que en el segundo el "mago" tiene dos posibles soluciones. Sin embargo, debemos antes establecer que reiterando la manipulación un cierto número de veces, obligadamente llegaremos a un punto fijo. En lo que sigue, trataremos el primer caso; el segundo se deja al lector.

Recordemos que en esta situación se tiene

$$f = q_f n + r_f \quad con \quad r_f \neq 0, n-1.$$

Observemos también que como $M(f) = f$, se tiene

$$f = q_f n + r_f = kp + q_f.$$

Sea $x = qn + r$. Vamos a demostrar que si $x < f$ entonces

$$x < M(x) \leq f \qquad (*)$$

Para la segunda parte de la desigualdad, veamos que si

$$qn + r = x < f = q_f n + r_f \qquad (*)$$

obligadamente $q \leqslant q_f$, de donde

$$M(x) = kp + q \leqslant kp + q_f = f \, .$$

En cuanto a la primera parte de la desigualdad (*):

- si $q = q_f$ el resultado es inmediato ya que en tal caso $M(x) = f$,
- si $q < q_f$ tenemos:

$$f - x = (q_f - q)\, n + (r_f - r)\, ,$$

$$M(x) - f = q - q_f,$$

de donde:

$$M(x) - x = (q_f - q)\,(n-1) + (r_f - r)\, .$$

Ahora bien, como

$$q_f - q \geqslant 1 \quad \text{ya que} \quad q < q_f,$$

$$r_f - r < n - 1 \quad \text{ya que} \quad r_f < n - 1,$$

se deduce de lo anterior que $M(x) - x > 0$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

En definitiva, inductivamente, hemos establecido que:

$$x < M(x) \leqslant M^2(x) \leqslant M^3(x) \leqslant ... \leqslant f \, .$$

De la misma manera se demuestra que si $f < x$ entonces:

$$f \leqslant ... \leqslant M^3(x) \leqslant M^2(x) \leqslant M(x) < x.$$

Esto quiere decir que iterando la función M sobre un elemento x se llega en un cierto número de pasos al punto fijo f. Es inmediato que ese número está acotado por

$$Max\,\{|f - M(x)| \ , \ x \in I_{n,p}\} \, .$$

Invito al lector a estudiar casos concretos.

Más aún, lo invito a modelizar este truco con la variante de repartir las cartas tomando el mazo con las figuras hacia arriba.

Espero que la magia le abra caminos insospechados.....