Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

Métodos Numéricos: un punto de vista dinámico.[1]

Sergio Plaza S.
Depto. de Matemáticas.
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307 - Correo 2. Santiago. Chile
e-mail: splaza@fermat.usach.cl
Homepage: http://fermat.usach.cl/~splaza

1 Introducción

En este artículo estudiamos, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, algunos métodos numéricos para encontrar raíces de ecuaciones. Restringiremos nuestro estudio a ecuaciones polinomiales en el plano complejo, esto con el objetivo de usar algunos resultados clásicos de iteración de funciones racionales de la dinámica compleja (ver [5], [6], [15]), que es una área bastante desarrollada de los sistemas dinámicos.

En la sección 2 haremos una revisión breve de resultados de iteración de funciones racionales que usaremos en este trabajo. En la sección 3 enumeramos algunas propiedades básicas de los conjuntos de Julia y de Fatou. En la sección 4 estudiamos la función de iteración de Newton esta es, y quizás, la más conocida de las funciones de iteración usada para encontrar raíces de ecuaciones. Siguiendo en el orden de simplicidad, en la sección 5 estudiamos la función de iteración de Halley. Finalmente, en la sección 7 estudiamos las familias de funciones de iteración de König y de Schröder.

[1]Part of this work was supported by FONDECYT Grant #1990093, and DICYT Grant #9733.

2 Algunos Conceptos Básicos de Dinámica Compleja

En lo que sigue denotamos por $\overline{\mathbb{C}}$ el plano complejo extendido, es decir, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una función racional sobre $\overline{\mathbb{C}}$ es una aplicación $R : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios complejos sin factores comunes. Se define el *grado* de R como $\text{grado}(R) = \max\{\, \text{grado}(P), \text{grado}(Q)\,\}$. Dada una función racional $R(z)$, denotamos por $R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n-veces}$.

Notación. Denotamos por $\text{Rac}(\overline{\mathbb{C}})$ el conjunto de todas las funciones racionales de $\overline{\mathbb{C}}$ en si mismo, y por $\text{Rac}_d(\overline{\mathbb{C}})$ el conjunto de todas las funciones racionales de grado d. Para $d = 1$ se tiene que $\text{Rac}_1(\overline{\mathbb{C}})$ es el conjunto de las transformaciones de Möbius, es decir, transformaciones de la forma $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, las cuales son difeomorfismos si $ad - cb \neq 0$.

En nuestro estudio nos restringiremos a funciones racionales de grado mayor o igual a 2.

Definición 1 *Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función racional. Decimos que $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de R si $R(z_0) = z_0$, y decimos que z_0 es un punto periódico de período $\ell > 1$ de R, si $R^\ell(z_0) = z_0$ y $R^k(z_0) \neq z_0$ para $k = 1, \ldots, \ell - 1$.*

Definición 2 *Sea $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ un punto periódico de período ℓ de R. Sea $\lambda(z_0) = (R^\ell)'(z_0)$. Decimos que z_0 es atractor, indiferente o repulsor, si $|\lambda(z_0)| < 1$, $|\lambda(z_0)| = 1$, $|\lambda(z_0)| > 1$, respectivamente, si $\lambda(z_0) = 0$ decimos que z_0 es superatractor.*

Definición 3 *Sea R una función racional de grado $d \geq 2$. Decimos que R es normal en un punto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ si existe una vecindad U de z tal que la sucesión de iterados $\{\, R^n|U \; : \; n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de funciones equicontinuas de U en $\overline{\mathbb{C}}$ (esto es, dados $u, w \in U$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(u,w) < \delta$ implica $d(R^n(u), R^n(w)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$).*

Se define los conjuntos de Fatou y de Julia de una función racional R, respectivamente, como

$$\mathcal{F}(R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \; R \;\; es \; normal \; en \; z\} \quad \text{y} \quad \mathcal{J}(R) = \overline{\mathbb{C}} - \mathcal{F}(R)\,.$$

Definición 4 *Decimos que dos funciones racionales $R_1, R_2 \in \text{Rac}(\overline{C})$ son conjugadas si existe un homeomorfismo $h : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $R_1 \circ h = h \circ R_2$.*

Note que las propiedades básicas de la dinámica de una transformación racional son preservados por conjugación.

3 Algunas propiedades básicas de los conjuntos de Fatou y de Julia

Daremos ahora un resumen de las propiedades básicas de los conjuntos de Julia y de Fatou. Sea $R \in \mathrm{Rac}(\overline{\mathbb{C}})$ una función racional de grado mayor o igual que dos. Se tiene

1. El conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$ es no vacío. El conjunto de Fatou puede ser vacío, como muestra el siguiente ejemplo, debido a Lattès, dado por la función racional
$$R(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(4z(z^2-1))},$$
para la cual se tiene que $\mathcal{J}(R) = \overline{\mathbb{C}}$, por lo tanto $\mathcal{F}(R) = \emptyset$.

2. Si z_r es un punto periódico repulsor entonces $\mathcal{J}(R) = \mathrm{cl}\{z \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) = z_r,\ \textit{para algún}\ n \in \mathbb{N}\} = \overline{\cup_{n \geq 0} R^{-n}(z_r)}$.

3. El conjunto de los puntos periódicos repulsores es denso en $\mathcal{J}(R)$, es decir, cada punto $z \in \mathcal{J}(R)$ es límite de una suceción de puntos periódicos repulsores.

4. Si $w \in \mathcal{J}(R)$ entonces $\mathcal{J}(R) = \mathrm{cl}\{z \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) = w,\ \textit{para algún}\ n \in \mathbb{N}\} = \overline{\cup_{n \geq 0} R^{-n}(w)}$.

5. El conjunto de Julia $\mathcal{J}(R)$ es totalmente invariante, es decir, $R(\mathcal{J}(R)) = \mathcal{J}(R) = R^{-1}(\mathcal{J}(R))$. Lo mismo vale para el conjunto de Fatou.

6. Para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{J}(R) = \mathcal{J}(R^m)$.

7. Si z_a es un punto periódico atractor de R entonces $\mathcal{J}(R) = \partial \mathcal{A}(z_a)$, donde ∂A denota la frontera del conjunto A y $\mathcal{A}(z_a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) \longrightarrow z_a,\ n \to \infty\}$ es la cuenca de atracción de z_a.

8. Si $z \in \mathcal{J}(R)$ y U es una vecindad de z entonces $\{R^m(U)\}_{m \in \mathbb{N}}$ cubre todo $\overline{\mathbb{C}}$, excepto a lo más dos puntos (Teorema de Montel).

9. Si $\mathcal{J}(R)$ tiene un punto interior entonces $\mathcal{J}(R) = \overline{\mathbb{C}}$.

Los dos teoremas siguientes son de gran importancia en el estudio de iteraciones de funciones racionales que trataremos en las próximas secciones, nos referimos a funciones de iteración para encontrar raíces de ecuaciones polinomiales.

Recordemos que un punto crítico de una función racional $R \in \mathrm{Rac}(\overline{\mathbb{C}})$ es un punto w tal que $R'(w) = 0$.

Teorema 1 (Julia–Fatou) *Sea $R \in \mathrm{Rac}(\overline{\mathbb{C}})$ una función racional de grado $d \geq 2$. Cada órbita periódica atractora de R contiene al menos un punto crítico en su cuenca de atracción.*

Por lo tanto, necesitamos conocer los puntos críticos de una función racional y la cantidad de ellos para tener una estimativa del número de órbitas periódicas atractoras que puede tener una función racional, esto es dado por el siguiente teorema.

Teorema 2 (Fatou–Julia) *Sea $R \in \mathrm{Rac}(\overline{\mathbb{C}})$ una función racional de grado $d \geq 2$. Entonces R tiene a lo más $2d-2$ puntos críticos, y por lo tanto a lo más $2d-2$ órbitas periódicas atractoras.*

En lo que sigue denotaremos por $\mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ el conjunto de los polinomios de $\mathbb{C}$, y por $\mathrm{Pol}_d(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ el conjunto de los polinomios de grado d.

Definición 5 *Decimos que un polinomio $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ es genérico si tiene todas sus raíces distintas.*

En lo que sigue trabajaremos con polinomios genéricos.

4 Función de iteración de Newton

La función de iteración de Newton, es quizás, la más conocida y estudiada en métodos numéricos para determinar raíces de ecuaciones. Las iteraciones de esta función dan origen al método de Newton.

Sea $p \in \mathrm{Pol}_d(\mathbb{C})$. La función de iteración de Newton, N_p asociada a $p(z)$, es definida por

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Es claro que $N_p(z)$ es una función racional de grado d.
Detallamos a seguir algunas propiedades básica de la dinámica de N_p.

1. Si $p(z_0) = 0$ si, y sólo si, $N_p(z_0) = z_0$, es decir, las raíces de p son puntos fijos de N_p.

2. El punto $z_\infty = \infty$ es un punto fijo repulsor de N_p. En efecto, es inmediato ver que $N_p(z_\infty) = z_\infty$ y que $N_p'(z_\infty) = \frac{d}{d-1} > 1$. Por lo tanto, si la sucesión de iterados $\{N_p^n(z)\}_{n\geq 0}$ de un punto $z \in \mathbb{C}$ produce un punto en una vecindad de ∞ sus sucesivas iteraciones se aproximan a una parte compacta de $\mathbb{C}$.

3. La derivada de N_p es dada por

$$N_p'(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p'(z))^2}\,.$$

Luego si z_0 es una raíz de $p(z)$ entonces $N_p'(z_0) = 0$, esto es, z_0 es un punto fijo superatractor de N_p; y N_p es conjugada en una vecindad de z_0 a la aplicación $z \longrightarrow z^k$ en una vecindad de $z = 0$, donde $k > 1$ es el primer entero tal que $N_p^{(k)}(z_0) \neq 0$, genéricamente $k = 2$.

Observación. Las raíces múltiples de $p(z)$ son puntos fijos atractores pero no superatractores de N_p, pues si z_0 es una raíz de multiplicidad $m > 1$ de $p(z)$ se tiene que $N_p'(z_0) = \frac{m-1}{m} < 1$.

4. Desde la propiedad 3, tenemos que los puntos críticos de N_p son las raíces y los puntos de inflexión de $p(z)$. Los puntos críticos de N_p que no son raíces de $p(z)$, esto es, las soluciones de $p''(z) = 0$ que no son solución de $p(z) = 0$, los llamaremos puntos *críticos libres*.

5. Los puntos críticos de $p(z)$, es decir los puntos z_0 tales que $p'(z_0) = 0$, son polos de N_p, y por lo tanto son aplicados en $z_\infty = \infty$ por N_p.

Sobre la localización de los puntos críticos de un polinomio tenemos el siguiente.

Teorema 3 (Lucas, 1874) *Los puntos críticos de $p(z)$ están contenidos en la envoltura convexa de las raíces de $p(z)$.*

Respecto a la conjugación de las transformadas de Newton, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4 (Escalamiento) *Sean $p, q \in \mathrm{Pol}_d(\mathbb{C})$. Entonces N_p y N_q son conjugadas si, y sólo si, $q(z) = k(p \circ T)(z)$, donde $k \in \mathbb{C}$ es una constante y $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$. Además, T es una conjugación entre N_p y N_q.*

Demostración. Vamos aprobar que $T \circ N_q \circ T^{-1} = N_p$. La parte restante es un argumento simple.

$$\begin{aligned} T \circ N_q \circ T^{-1}(z) &= T(N_q(T^{-1}(z))) \\ &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))}\right) \\ &= \alpha\left(T^{-1}(z) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))} + \beta\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha T^{-1}(z) - \frac{\alpha q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z))} + \beta \\
&= \alpha\left(\frac{z}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z)) \cdot \frac{1}{\alpha}} + \beta \\
&= z - \beta - \frac{q(T^{-1}(z))}{q'(T^{-1}(z)) \cdot \frac{1}{\alpha}} + \beta \\
&= z - \frac{p(z)}{p'(z)} = N_p(z)\,.
\end{aligned}
$$

Esto completa la prueba del teorema.

Este teorema es importante, pues mediante una transformación afín podemos modificar la ubicación de las raíces de $p(z)$ sin modificar cualitativamente la dinámica de la función de iteración de Newton.

Por ejemplo, tenemos el siguiente

Teorema 5 *Sea $p(z) = az^2 + bz + c$ un polinomio cuadrático con raíces simples. Entonces N_p es conjugada a la transformación $f(z) = z^2$.*

Demostración. Sean α, β con $\alpha \neq \beta$, las raíces de $p(z)$. Tenemos entonces que $p(z) = (z-\alpha)(z-\beta)$, y sin perdida de generalidad, podemos suponer que $0 \leq |\alpha| \leq |\beta|$. Sea $T(z) = (\beta - \alpha)z + \alpha$, entonces $p \circ T(z) = p(T(z)) = (\beta - \alpha)z\left((\beta-\alpha)z + \alpha - \beta\right) = (\beta-\alpha)^2 z(z-1)$. Sean $\lambda = \beta - \alpha$ y $q_\lambda(z) = \lambda^2 z(z-1)$, es decir, $q_\lambda = p \circ T$. Por el Teorema 4, tenemos que $T \circ N_{q_\lambda} \circ T^{-1} = N_p$. Ahora, tomando $q(z) = z(z-1)$, se ve que $N_q = N_{q_\lambda}$. Luego, N_p es conjugada a N_q. Finalmente, es fácil probar que N_q es conjugada a la aplicación $f(z) = z^2$. Lo que termina la prueba.

Otro argumento para demostrar el Teorema 3 es el siguiente. Sean α y β las raíces de $p(z)$, y sea $h(z) = \frac{z-\beta}{z-\alpha}$. Tenemos $h(\infty) = 1$, $h(\beta) = 0$ y $h(\alpha) = \infty$. Como $h \circ N_p \circ h^{-1}$ es una transformación racional de grado 2 que tiene dos puntos fijos superatractores, uno en $z = 0$ y el otro en $z = \infty$, y fija a $z = 1$, se debe tener $h \circ N_p \circ h^{-1} = z^2$.

Para polinomios de grado 3, tenemos el siguiente.

Teorema 6 *Sea $p(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ es un polinomio cúbico con sus tres raíces a, b y c distintas, las cuales suponemos ordenadas por sus módulos, es decir, $0 \leq |a| \leq |b| \leq |c|$. Sea $T(z) = (c-a)z + a$. Entonces N_q es conjugada a N_p. Además, una conjugación es dada por T.*

Demostración. Tenemos que $q(z) = p \circ T(z) = p((c-a)z + a) = \lambda^3 z(z-1)(z-\rho)$, donde $\lambda = c - a$ y $\rho = \frac{b-a}{c-a}$. Por el Teorema de Reescalamiento tenemos que

$T \circ N_q \circ T^{-1} = N_p$, en consecuencia las dinámicas de N_p y N_q son conjugadas. Lo que termina la prueba.

Para polinomios de grado cuatro tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7 *Sea $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$ un polinomio de grado 4 con todas sus raíces distintas, ordenadas como sigue $0 \leq |a| \leq |b| \leq |c| \leq |d|$. Sea $T(z) = (d-a)z + a$ y sea $q(z) = p \circ T(z)$. Entonces N_q es conjugada a N_p. Además, una conjugación es dada por T.*

Demostración. Tenemos que $q(z) = \lambda^4 z\,(z-\rho)\,(z-\mu)\,(z-1)$, donde $\lambda = (d-a)^4$, $\rho = \frac{b-a}{d-a}$, $\mu = \frac{c-a}{d-a}$, y por el Teorema 4 se sigue que $T \circ N_q \circ T^{-1} = N_p$, es decir, N_q es conjugado a N_p (para la elección adecuada de los parámetros). Lo cual completa la prueba.

En general, dado un polinomio $p(z)$ el conjunto de Julia $\mathcal{J}(N_p)$ de N_p no juega un rol importante desde el punto de vista numérico, esencialmente por dos razones:

i) En todos los ejemplos conocidos $\mathcal{J}(N_p)$ tiene medida de Lebesgue cero, y se conjetura que esto siempre es verdad.

ii) Como $\mathcal{J}(N_p)$ es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores de N_p, puntos próximos a $\mathcal{J}(N_p)$ son repelidos, y en consecuencia pequeños errores computacionales fuerzan a la mayoría de las órbitas regulares a alejarse de $\mathcal{J}(N_p)$.

Por lo tanto, desde el punto de vista numérico hay que centrar la atención en el conjunto de Fatou $\mathcal{F}(N_p)$ de N_p. Evidencias numéricas–computacionales indican que las cuencas de atracción de las raíces son componentes "relativamente grandes" de $\mathcal{F}(N_p)$, pero pueden existir otras cuencas de órbitas periódicas atractoras, las cuales si existen, no corresponden a raíces de $p(z)$, y comenzando con un punto de ellas las iteraciones del método de Newton no convergen a una raíz de $p(z)$. Para detectar la existencia de ese tipo de órbitas periódicas atractoras usamos el Teorema 1.

Ahora, para un polinomio genérico $p(z)$ de grado d tenemos que

$$N_p(z) = \frac{zp'(z) - p(z)}{p'(z)}$$

es una función racional de grado d, como $p(z)$ tiene d raíces, las cuales son puntos fijos atractores de N_p, nos restan $d-2$ puntos críticos, los cuales pueden ser libres o no.

5 Función de Iteración de Halley

La función de iteración de Newton, N_p, asociada a una función $p(z)$ puede ser obtenida de varias maneras distintas, muchas de ellas clásicas. Ahora veremos como se obtiene la función de iteración de Halley. Para ellos primero recordemos que la función de iteración de Halley asociada a una función analítica $f(z)$ es dada por

$$H_f(z) = z - \frac{2f(z)f'(z)}{2(f'(z))^2 - f(z)f''(z)}.$$

Una manera de obtener esta fórmula es aplicar el método de Newton a la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{f'(z)}},$$

o otra es considerar el desarrollo de Taylor de $f(z)$ para z_n próximo de un cero de $f(z) = 0$. Preferimos esta última posibilidad. Tenemos entonces

$$w = f(z) = f(z_n) + f'(z_n)(z - z_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(z - z_n)^2 + T.O.S.$$

donde $T.O.S.$ denotan los términos de orden superior, despreciando estos, nos queda

$$w = f(z) = f(z_n) + f'(z_n)(z - z_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(z - z_n)^2$$

para obtener z_{n+1} resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= f(z_n) + f'(z_n)(z_{n+1} - z_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(z_{n+1} - z_n)^2 \\ &= f(z_n) + (z_{n+1} - z_n)\left(f'(z_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(z_{n+1} - z_n)\right), \end{aligned}$$

de donde,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n) - \frac{f''(z_n)}{2}(z_{n+1} - z_n)}.$$

Ahora aproximando $z_{n+1} - z_n$ por la corrección de Newton $-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, nos queda

$$z_{n+1} = z_n - \frac{2f(z_n)f'(z_n)}{2(f'(z_n))^2 - f(z_n)f''(z_n)},$$

es decir, tenemos la fórmula de iteración de Halley.

Dos propiedades básicas de la función de iteración de Halley son las siguientes:

1. Si α es un cero simple de f entonces α un punto fijo de H_f. Además, $H_f'(\alpha) = H_f''(\alpha) = 0$ y $H_f'''(\alpha) \neq 0$ (genéricamente), luego H_f es una función de iteración de orden menos 3.

2. $H_f'''(\alpha) = -\left(\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2\right) = -S(f)(\alpha)$.

Observación Al aplicar el método de Newton a $g(z) = f(z)/f'(z)$ se obtiene una función de iteración

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f'(z_n)}{(f'(z_n))^2 - f(z_n)f''(z_n)}$$

que corresponde a la función de iteración de Schröder de tercer orden.

Por ejemplo, para $f(z) = z^d - r$, tenemos

$$H_f(z) = \frac{(d-1)z^{d+1} + r(d+1)}{(d+1)z^d + r(d-1)}.$$

Ahora estudiaremos la función de iteración de Halley para algunos casos especiales. Sea $p(z) = az^2 + bz + c$, con $a \neq 0$, un polinomio cuadrático. Considerando la aplicación $\tau(z) = 2az + b$ tenemos

$$H_p \circ \tau^{-1}(z) = H_p\left(\tau^{-1}(z)\right) = \tau^{-1}(z) - \frac{2p\left(\tau^{-1}(z)\right)p'\left(\tau^{-1}(z)\right)}{2\left(\left(\tau^{-1}(z)\right)\right)^2 - p\left(\tau^{-1}(z)\right)p''\left(\tau^{-1}(z)\right)},$$

luego

$$\begin{aligned}
\tau \circ H_p \circ \tau^{-1}(z) &= 2aH_p\left(\tau^{-1}(z)\right) + b \\
&= 2a\left(\tau^{-1}(z) - \frac{2p\left(\tau^{-1}(z)\right)p'\left(\tau^{-1}(z)\right)}{2\left(p'\left(\tau^{-1}(z)\right)\right)^2 - p\left(\tau^{-1}(z)\right)p''\left(\tau^{-1}(z)\right)}\right) + b \\
&= 2a\left(\frac{z-b}{2a}\right) - 2a\,\frac{2p\left(\tau^{-1}(z)\right)p'\left(\tau^{-1}(z)\right)}{2\left(p'\left(\tau^{-1}(z)\right)\right)^2 - p\left(\tau^{-1}(z)\right)p''\left(\tau^{-1}(z)\right)} + b \\
&= z - 2a\,\frac{2p\left(\tau^{-1}(z)\right)p'\left(\tau^{-1}(z)\right)}{2\left(p'\left(\tau^{-1}(z)\right)\right)^2 - p\left(\tau^{-1}(z)\right)p''\left(\tau^{-1}(z)\right)} \\
&= z - \frac{2a\,2\,\frac{1}{4a}(z^2 + 4ac - b^2)z}{2z^2 - \frac{1}{4a}\left(z^2 + 4ac - b^2\right)2a}
\end{aligned}$$

$$= z - \frac{2z(z^2 - A)}{3z^2 + A}$$

$$= H_q(z),$$

donde $q(z) = z^2 - A$ y $A = b^2 - 4ac$, es decir, $\tau \circ H_p \circ \tau^{-1} = H_q$ y tenemos probado el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sea $p(z) = az^2 + bz + c$, con $a \neq 0$, un polinomio cuadrático genérico, y sea $q(z) = z^2 - A$, donde $A = b^2 - 4ac$. Entonces H_p es conjugada a H_q, una conjugación es dada por la aplicación afín $\tau(z) = 2az + b$.*

En consecuencia para estudiar la función de iteración de Halley asociada a un polinomio cuadrático genérico $p(z) = az^2 + bz + c$ es suficiente estudiar la dinámica de la función de iteración de Halley del polinomio $q(z) = z^2 - A$, donde $A = b^2 - 4ac$.

Más general, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9 *Sea $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ y sea $T(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha \neq 0$, una transformación afín. Sea $q(z) = (p \circ T)(z)$ entonces $T \circ H_q \circ T^{-1} = H_p$.*

Demostración. Tenemos que

$$H_q\left(T^{-1}(z)\right) = T^{-1}(z) - \frac{2q\left(T^{-1}(z)\right) q'\left(T^{-1}(z)\right)}{2\left(q\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2 - q\left(T^{-1}(z)\right) q''\left(T^{-1}(z)\right)}.$$

Ahora como $q \circ T^{-1}(z) = p(z)$ tenemos que $(q \circ T^{-1})'(z) = q'\left(T^{-1}(z)\right)(T^{-1})'(z) = q'\left(T^{-1}(z)\right)\frac{1}{\alpha}$, de donde $q'\left(T^{-1}(z)\right) = \alpha\,(q \circ T^{-1})'(z) = \alpha p'(z)$, es decir, $q' \circ T^{-1}(z) = \alpha p'(z)$. Luego $\alpha\, p''(z) = (q' \circ T^{-1})'(z) = q''\left(T^{-1}(z)\right)(T^{-1})'(z)$, de donde $\alpha\, p''(z) = q''\left(T^{-1}(z)\right)\frac{1}{\alpha}$, y de esto $q''\left(T^{-1}(z)\right) = \alpha^2 p''(z)$. Reemplazando esto en la expresión de $H_q\left(T^{-1}(z)\right)$, obtenemos

$$H_q \circ T^{-1}(z) = \frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{2p(z)p'(z)}{\alpha\left(2\left(p'(z)\right)^2 - p(z)p''(z)\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T \circ H_q \circ T^{-1}(z) &= T\left(\frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{2p(z)p'(z)}{\alpha\left(2\left(p'(z)\right)^2 - p(z)p''(z)\right)}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{2p(z)p'(z)}{\alpha\left(2\left(p'(z)\right)^2 - p(z)p''(z)\right)}\right) + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= z - \frac{2p(z)p'(z)}{2\,(p'(z))^2 - p(z)p''(z)} \\ &= H_p(z)\,, \end{aligned}$$

esto es, $T \circ H_q \circ T^{-1} = H_p$, lo que completa la prueba.

Teorema 10 *Sea* $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ *y* $b \in \mathbb{C}$ *una constante distinta de cero. Si* $\tilde{q}(z) = b\,p(z)$ *entonces* $H_{\tilde{q}} = H_p$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} H_{\tilde{q}}(z) &= z - \frac{2\tilde{q}(z)\tilde{q}'(z)}{2\,(\tilde{q}'(z))^2 - \tilde{q}(z)\tilde{q}''(z)} \\ &= z - \frac{2bp(z)bp'(z)}{2\,(bp'(z))^2 - bp(z)bp''(z)} \\ &= z - \frac{2b^2p(z)p'(z)}{b^2\left(2\,(p'(z))^2 - p(z)p''(z)\right)} \\ &= z - \frac{2p(z)p'(z)}{2\,(p'(z))^2 - p(z)p''(z)} \\ &= H_p(z)\,, \end{aligned}$$

lo que completa la prueba.

Para el caso especial de polinomios cúbicos tenemos el siguiente

Teorema 11 *Sea* $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ *un polinomio cúbico genérico, con* a, b *y* c *sus raíces, ordenadas del siguiente modo* $0 \le |a| \le |b| \le |c|$. *Sea* $T(z) = (c-a)z + a$ *y* $q(z) = p \circ T(z)$. *Entonces* H_q *es conjugada a* H_p , *y* T *es una conjugación. Además, si* $\tilde{q}(z) = z(z-1)(z-\rho)$, *donde* $\rho = (b-a)/(c-a)$ *entonces* H_q *es conjugada a* $H_{\tilde{q}}$.

Demostración. Tenemos que $q(z) = \lambda^3 z(z-1)(z-\rho)$, donde $\lambda = c - a$ y $\rho = (b-a)/(c-a)$. La prueba se sigue directamente de los Teoremas 7 y 8.

6 Puntos críticos de la función de iteración de Halley

Sea $p(z) \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ un polinomio complejo, y sea $H_p(z) = z - \dfrac{2p(z)p'(z)}{2\,(p'(z))^2 - p(z)p''(z)}$ su función de iteración de Halley asociada. Tenemos

$$H_p'(z) = \frac{(p(z))^2\left(3\,(p''(z))^2 - 2p'(z)p'''(z)\right)}{\left(2\,(p'(z))^2 - p(z)p''(z)\right)^2},$$

luego, $H_p'(z) = 0$ si y sólo si, o bien $p(z) = 0$ (raíces de p) o bien $S(p)(z) = 0$, donde

$$S(p)(z) = \frac{p'''(z)}{p'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{p''(z)}{p'(z)}\right)^2$$

es la derivada Schwarziana de $p(z)$.

Ahora, si $p(\alpha) = 0$ entonces $H_p'(\alpha) = 0$ y por lo tanto las raíces de $p(z)$ son puntos fijos superatractores de H_p. Por otra parte, la ecuación de punto fijo, $H_p(z) = z$ tiene como soluciones las raíces de $p(z)$ o las soluciones de la ecuación $p'(z) = 0$, es decir, los puntos críticos de $p(z)$. Ahora, si β es un punto fijo de H_p que no es raíz de p entonces

$$H_p'(\beta) = \frac{(p(\beta))^2\,3\,(p''(\beta))^2}{(p(\beta))^2(p''(\beta))^2} = 3,$$

por lo tanto los nuevos puntos fijos que aparecen para H_p son repulsores, y como tales pueden alterar la cuenca de atracción de las raíces.

Los puntos críticos libre son las soluciones de la ecuación $S_p(z) = 0$ y que no son raíces de $p(z)$. Como $H_p(z)$ es una función racional de grado $2d - 1$ y $p(z)$ tiene d raíces, existen $d - 1$ puntos críticos libres.

7 Funciones de iteración de König y de Schröder

Sea $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ un polinomio. Se define la familia de función de iteración de König de orden $\sigma = 2, 3, \ldots$, $K_{\sigma,p}$, asociada a p como

$$K_{\sigma,p}(z) = z + (\sigma - 1)\,\frac{(1/p(z))^{(\sigma-2)}}{(1/p(z))^{(\sigma-1)}}.$$

Por ejemplo, podemos calcular fácilmente las funciones de iteración de König de orden 2, 3 y 4 obteniendo

$$
\begin{aligned}
K_{2,p}(z) &= N_p(z) \qquad \text{(función de iteración de Newton)} \\
K_{3,p}(z) &= z - \frac{2p(z)p'(z)}{2\left(p'(z)\right)^2 - p(z)p''(z)} = H_p(z) \qquad \text{(función de iteración de Halley)} \\
K_{4,p}(z) &= z - \frac{3p(z)\left(p(z)p''(z) - 2\left(p'(z)\right)^2\right)}{6p(z)p'(z)p''(z) - 6\left(p'(z)\right)^3 - \left(p(z)\right)^2 p''(z)} .
\end{aligned}
$$

Como vemos la complejidad de las expresiones para las funciones de iteración de König van creciendo con el orden σ , esta denominación para el orden es justificada por el siguiente teorema

Teorema 12 ([13]). *Sea $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, y sea $K_{\sigma,g}$ su función de iteración de König asociada. Si z_0 es un cero simple de g entonces*

$$K_{\sigma,g}(z_0) = K'_{\sigma,g}(z_0) = K''_{\sigma,g}(z_0) = \cdots = K^{(\sigma-1)}_{\sigma,g}(z_0) = 0 , \quad y \quad K^{(\sigma)}_{\sigma,g}(z_0) \neq 0 .$$

Vemos entonces que, localmente, la función $K_{\sigma,g}$ en una vecindad de z_0 es conjugada a la función $f(z) = z^\sigma$ en una vecindad del origen.

Definimos ahora otra familia de funciones de iteración. Sea $p \in \text{Pol}(\mathbb{C})$ un polinomio. La función de iteración de Schröder de orden $\sigma = 2, 3, \ldots$, $S_{\sigma,p}$, asociada a $p(z)$ es dada por

$$S_{\sigma,p}(z) = z + \sum_{k=1}^{\sigma-1} c_k(z)(-p(z))^k , \qquad \sigma = 2, 3, \ldots ,$$

donde

$$c_k(z) = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{p'(z)}\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \frac{1}{p'(z)}$$

y

$$\left(\frac{1}{p'(z)}\frac{d}{dz}\right)^{k-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{p'(z)}\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{1}{p'(z)}\frac{d}{dz}\right)\cdots\left(\frac{1}{p'(z)}\frac{d}{dz}\right)}_{(k-1)-\ factores}$$

Tenemos el siguiente teorema

Teorema 13 ([13]). *Sea $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, y sea $S_{\sigma,g}$ su función de iteración de Schröder de orden σ asociada. Si z_0 es un cero simple de g entonces*

$$S_{\sigma,g}(z_0) = S'_{\sigma,g}(z_0) = S''_{\sigma,g}(z_0) = \cdots = S^{(\sigma-1)}_{\sigma,g}(z_0) = 0 , \quad y \quad S^{(\sigma)}_{\sigma,g}(z_0) \neq 0 .$$

Por lo tanto, como antes tenemos que, localmente, la función $S_{\sigma,g}$ en una vecindad de z_0 es conjugada a la función $f(z) = z^\sigma$ en una vecindad del origen.

Calculando las primeras tres funciones de iteración de Schröder, tenemos.

$$S_{2,p}(z) = N_p(z) \quad \text{(función de iteración de Newton)}$$

$$S_{3,p}(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{p''(z)\,(p(z))^2}{2\,(p'(z))^3}$$

$$S_{4,p}(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{p''(z)\,(p(z))^2}{2\,(p'(z))^3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\,(p''(z))^2 - \frac{1}{6}p'(z)p'''(z)\right)(p(z))^3}{(p'(z))^5}$$

Respecto a la conjugación de estas funciones de iteración tenemos

Teorema 14 *Sea* $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$ *un polinomio y sea* $k \in \mathbb{C}$ *una constante. Si* $q(z) = k\,p(z)$ *entonces* $K_{\sigma,q} = K_{\sigma,p}$ *y* $S_{\sigma,q} = S_{\sigma,p}$ *para* $\sigma = 2, 3, 4$.

Demostración. Para $K_{2,q}$ (Newton) y $K_{3,q}$ (Halley) ya lo probamos. Para $\sigma = 4$ tenemos

$$\begin{aligned} K_{4,q}(z) &= z - \frac{3q(z)\left(q(z)q''(z) - 2\,(q'(z))^2\right)}{6q(z)q'(z)q''(z) - 6\,(q'(z))^3 - (q(z))^2\,q'''(z)} \\ &= z - \frac{3ap(z)\left(ap(z)ap''(z) - 2a^2\,(p'(z))^2\right)}{6ap(z)ap'(z)ap''(z) - 6a^3\,(p'(z))^3 - a^2\,(p'(z))^2\,ap'''(z)} \\ &= K_{4,p}(z) \end{aligned}$$

Para las funciones de iteración de Schröder, vimos que $S_{2,q}$ (Newton) y no tenemos nada que probar. Para $\sigma = 3$, tenemos

$$\begin{aligned} S_{3,q} &= z - \frac{q(z)}{q'(z)} - \frac{(q(z))^2\,q''(z)}{2\,(q'(z))^3} \\ &= z - \frac{ap(z)}{ap'(z)} - \frac{a^2\,(p(z))^2\,ap''(z)}{2a^3\,(p'(z))^3} \\ &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{(p(z))^2\,p''(z)}{2\,(p'(z))^3} \end{aligned}$$

$$= S_{3,p}(z)\,.$$

Finalmente, para $\sigma = 4$, tenemos

$$\begin{aligned}
S_{4,q}(z) &= z - \frac{ap(z)}{ap'(z)} - \frac{a^3 p''(z)\,(p(z))^2}{2a^3\,(p'(z))^3} - \frac{\left(\frac{1}{2}a^2\,(p''(z))^2 - \frac{a^2}{6}p'(z)p'''(z)\right)a^3\,(p(z))^3}{a^5\,(p'(z))^5} \\
&= z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{p''(z)\,(p(z))^2}{2\,(p'(z))^3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\,(p''(z))^2 - \frac{1}{6}p'(z)p'''(z)\right)(p(z))^3}{(p'(z))^5} \\
&= S_{4,p}(z)\,.
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba.

Teorema 15 *Sean* $T(z) = \alpha z + \beta$ *con* $\alpha \neq 0$, *y* $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{C})$. *Sea* $q(z) = (p \circ T)(z)$ *entonces* $T \circ K_{\sigma,q} \circ T^{-1} = K_{\sigma,p}$ *y* $T \circ S_{\sigma,q} \circ T^{-1} = S_{\sigma,p}$, *para* $\sigma = 2, 3, 4$.

Demostración. Para K_σ con $\sigma = 2, 3$ ya fue probado. Ahora, como $p(z) = q \circ T^{-1}(z)$ tenemos $p'(z) = q'\left(T^{-1}(z)\right)\left(T^{-1}\right)'(z) = q'\left(T^{-1}(z)\right)/\alpha$, de donde $q'\left(T^{-1}(z)\right) = \alpha p'(z)$, es decir, $q' \circ T^{-1}(z) = \alpha p'(z)$, derivando otra vez tenemos $\alpha p''(z) = q''\left(T^{-1}(z)\right)/\alpha$, luego $q'' \circ T^{-1}(z) = \alpha^2 p''(z)$, finalmente de modo análogo vemos que $\alpha^2 p'''(z) = q'''\left(T^{-1}(z)\right)/\alpha$ y de ahí obtenemos $q''' \circ T^{-1}(z) = \alpha^3 p'''(z)$.

Usando esos cálculos, tenemos

$$\begin{aligned}
K_{4,q} \circ T^{-1}(z) &= T^{-1}(z) \\
&\quad - \frac{3q\left(T^{-1}(z)\right)\left(q\left(T^{-1}(z)\right)q''\left(T^{-1}(z)\right) - 2\left(q'\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2\right)}{6q\left(T^{-1}(z)\right)q'\left(T^{-1}(z)\right)q''\left(T^{-1}(z)\right) - 6\left(q'\left(T^{-1}(z)\right)\right)^3 - \left(q\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2 q'''\left(T^{-1}(z)\right)} \\
&= \frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{3p(z)\left(\alpha^2 p(z)p''(z) - 2\alpha^2\,(p'(z))^2\right)}{6\alpha^3 p(z)p'(z)p''(z) - 6\alpha^3\,(p'(z))^3 - (p(z))^2\,\alpha^3 p'''(z)} \\
&= \frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{3p(z)\left(p(z)p''(z) - 2\,(p'(z))^2\right)}{\alpha\left(6p(z)p'(z)p''(z) - 6\,(p'(z))^3 - (p(z))^2\,p'''(z)\right)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$T \circ K_{4,q} \circ T^{-1}(z) = \alpha\left(\frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{3p(z)\left(p(z)p''(z) - 2\,(p'(z))^2\right)}{\alpha\left(6p(z)p'(z)p''(z) - 6\,(p'(z))^3 - (p(z))^2\,p'''(z)\right)}\right) + \beta$$

$$
\begin{aligned}
&= z - \frac{3p(z)\left(p(z)p''(z) - 2\left(p'(z)\right)^2\right)}{6p(z)p'(z)p''(z) - 6\left(p'(z)\right)^3 - \left(p(z)\right)^2 p'''(z)} \\
&= K_{4,p}(z)
\end{aligned}
$$

Para las funciones de iteración de Schröder, tenemos

$$
\begin{aligned}
T \circ S_{3,q} \circ T^{-1}(z) &= T\left(T^{-1}(z) - \frac{q\left(T^{-1}\right)}{q'\left(T^{-1}(z)\right)} - \frac{q''\left(T^{-1}(z)\right)\left(q\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2}{2\left(q'\left(T^{-1}(z)\right)\right)^3}\right) \\
&= \alpha\,\frac{(z-\beta)}{\alpha} - \frac{\alpha p(z)}{\alpha p'(z)} - \frac{\alpha\,\alpha^2 p''(z)\left(p(z)\right)^2}{2\alpha^3\left(p'(z)\right)^3} + \beta \\
&= z - \frac{p(z)}{p'(z)} - \frac{p''(z)\left(p(z)\right)^2}{2\left(p'(z)\right)^3} \\
&= S_{3,p}(z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{4,q} \circ T^{-1}(z) &= T^{-1}(z) - \frac{q\left(T^{-1}(z)\right)}{q'\left(T^{-1}(z)\right)} - \frac{\left(q\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2 q''\left(T^{-1}(z)\right)}{2\left(q'\left(T^{-1}(z)\right)\right)^3} \\
&\quad - \frac{\left(q\left(T^{-1}(z)\right)\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(q''\left(T^{-1}(z)\right)\right)^2 - \frac{1}{6}q'\left(T^{-1}(z)\right)q'''\left(T^{-1}(z)\right)\right)}{\left(q'\left(T^{-1}(z)\right)\right)^5} + \beta \\
&= \frac{z-\beta}{\alpha} - \frac{p(z)}{\alpha p'(z)} - \frac{\left(p(z)\right)^2\alpha^2 p''(z)}{2\alpha^3\left(p'(z)\right)^3} - \frac{\alpha^4\left(p(z)\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(p''(z)\right)^2 - \frac{1}{6}p'(z)p'''(z)\right)}{\alpha^5\left(p'(z)\right)^5}
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
T \circ S_{4,q} \circ T^{-1}(z) &= \alpha\frac{z-\beta}{\alpha} - \alpha\frac{p(z)}{\alpha p'(z)} - \frac{\alpha\left(p(z)\right)^2 p''(z)}{2\alpha\left(p'(z)\right)^3} - \\
&\quad \frac{\alpha\left(p(z)\right)^3\left(\frac{1}{2}\left(p''(z)\right)^2 - \frac{1}{6}p'(z)p'''(z)\right)}{\alpha\left(p'(z)\right)^5} + \beta \\
&= S_{4,p}(z),
\end{aligned}
$$

esto es $T \circ S_{4,q} \circ T^{-1} = S_{4,p}$. Lo que completa la prueba.

De lo anterior, tenemos la siguiente

Teorema 16 *Sea* $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ *un polinomio cúbico con tres raíces distintas, ordenadas por* $0 \leq |a| \leq |b| \leq |c|$. *Sean* $T(z) = (c-a)z + a$ *y* $q(z) = p \circ T(z)$. *Entonces* $K_{\sigma,p}$ *es conjugada a* $K_{\sigma,q}$, *y* $S_{\sigma,p}$ *es conjugada a* $S_{\sigma,q}$, *para* $\sigma = 2,3,4$, *y una conjugación es dada por* T. *Además, si* $\tilde{q}(z) = z(z-1)(z-\rho)$, *donde* $\rho = (b-a)/(c-a)$ *entonces* $K_{\sigma,q}$ *es conjugada a* $K_{\sigma,\tilde{q}}$, *y* $S_{\sigma,q}$ *es conjugada a* $S_{\sigma,\tilde{q}}$, *para* $\sigma = 2,3,4$.

Demostración. Tenemos que $q(z) = \lambda^3 z(z-\rho)(z-1)$, donde $\lambda = c-a$ y $\rho = (b-a)/(c-a)$, la prueba se sigue directamente desde el Teorema 10 y 11.

El estudio de los puntos críticos libre de las funciones de iteración de König y de Schröder escapa al objetivo de este trabajo.

References

[1] **Alexander, D. S.** *A history of complex dynamics: from Schröder to Fatou and Julia.* Vieweg, Aspects of Mathematics 1994.

[2] **Arney, D. C., Robinson, B. T.** *Exhibiting chaos and fractals with a microcomputer.* Comput. Math. Applic. Vol. 19 (3) (1990), 1–11.

[3] **Ben-Israel, A.** *Newton's method with modified functions.* Contemporary Mathematics 204 (1997), 39–50.

[4] **Ben-Israel A., Yau, L.** *The Newton and Halley method for complex roots.* The American Mathematical Monthly 105 (1998), 806–818.

[5] **Blanchard, P.** *Complex Analytic Dynamics on the Riemann sphere.* Bull. of AMS (new series) Vol. 11, number 1, July 1984, 85-141.

[6] **Blanchard, P., Chiu, A.** *Complex Dynamics: an informal discussion.* Fractal Geometry and Analysis. Eds. J. Bélair & S. Dubuc. Kluwer Academic Publishers (1991), 45-98.

[7] **Cayley, A.** *The Newton–Fourier Imaginary Problem.* Amer. J. Math. 2 (1879), 97.

[8] **Cayley, A.** *On the Newton–Fourier Imaginary Problem.* Proc. Cambridge Phil. Soc. 3 (1880), 231–232.

[9] **Curry, J. H., Garnett, L., Sullivan, D.** *On the iteration of a rational function: computer experiment with Newton method.* Comm. Math. Phys. 91 (1983), 267-277.

[10] **Drakopoulos, V.** *On the additional fixed points of Schröder iteration function associated with a one-parameter family of cubic polynomials.* Comput. and Graphics, Vol. 22 (5) (1998), 629–634.

[11] **Gilbert, W.** *Newton's method for multiple roots.* Comput. and Graphics, Vol. 18 (2) (1994), 227–229.

[12] **Fatou, P.** *Sur les équations fonctionelles.* Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 161-271, 48 (1920), 208-314.

[13] **Henrici, P.** *Applied and Computational Complex Analysis.* Wiley, 1974.

[14] **Julia, G.** *Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles.* J. de Math. pures et appliquées, ser.8:1, (1918), 47-215.

[15] **Milnor, J.** *Dynamics in One Complex Dimension: Introductory Lectures.* Preprint #1990/5, SUNY StonyBrook, Institute for Mathematical Sciences.

[16] **Peitgen, Heinz - Otto**, (Ed.) *Newton's Method and Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publishers, 1989.

[17] **Vrscay, E. R.** *Julia sets and Mandelbrot-like sets associated with higher order Schröder rational iteration functions: a computer assisted study.* Mathematics of Computation, Vol. 46 (173) (1986), 151–169.

[18] **Vrscay, E. R., Gilbert W. J.** *Extraneous fixed points, basin boundary and chaotic dynamics for Schröder and König rational iteration functions.* Numer. Math. 52 (1988), 1–16.