Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

¿Por qué los matemáticos estudiamos el Caos?[1]

Roberto Markarian
Universidad de la República
Facultad de Ingeniería IMERL
Julio Herrera y Reissig 565, CC Nro. 30
Montevideo, Uruguay

En el principio creó Dios los cielos y la tierra.
Y la tierra estaba desordenada y vacía,
y las tinieblas estaban sobre la faz del abismo,
y el Espíritu de Dios se movía sobre la faz
de las aguas. Y dijo Dios: Sea la luz; y fue la luz.
Génesis: La Creación

Mi tarea principal de investigación es la llamada dinámica caótica. Ésta es la primera vez que escribo sobre el objeto de mi profesión para un público no especializado.

Cierto es que, puesto de moda el caos, he hablado en variadas tertulias, sobre estos temas, con viejos y nuevos amigos, intentando explicar cómo me gano la vida. Pero una cosa es hablar –muchas veces con reminiscencias etílicas– de una característica de nuestros tiempos y otra es escribir –con la seriedad debida– sobre cómo intentamos los matemáticos (o los físico-matemáticos) definir y caracterizar fenómenos desordenados. Y no sólo escribir, sino escribir para ser entendido por los eventuales lectores. Doy por supuesto que ustedes sólo disponen de los recuerdos matemáticos del ciclo obligatorio de nuestra enseñanza.

[1]Fragmento extraido del trabajo "Incertidumbres, Caos: una visión Físico-Matemática" contenido en [1], pg. 50-112. Se han incluido aquí 6 de las 18 secciones de que consta el trabajo. Cubo agradece la gentileza del profesor Roberto Markarian por haber autorizado y revisado la reproducción de este interesante fragmento.

Debo reconocer que diversas partes fueron reescritas varias veces, entregadas a amigos para que –abusando de la amistad– me dijeran si habían entendido algo, qué y cómo. Me preocupaba, también, evitar las mistificaciones en que muchas veces caen las presentaciones no técnicas de la ciencia: se presentan como maravillas o misterios casi inextricables, cuestiones que a nivel técnico son fácilmente entendibles. Tuve esa sensación de mistificación cuando leí trabajos de divulgación sobre el "origen del universo", sobre el "principio de incertidumbre" en física cuántica[2], sobre algunas leyes de la genética. Me quedé con el sabor amargo de que demasiadas veces se confundía aspectos de teorías cientifícas con argumentos teológicos o mágicos.

En parte por ello y en parte por mis limitaciones, los compadres de las ciencias propias y cercanas sabrán disculpar algunas generalizaciones excesivas y algunas imprecisiones o dogmatismos. A veces es bueno caer en ellos, para que las cosas resulten más claras. [...]

1.- *¿Por qué interesa tanto el caos?*

Creo que no es exagerado decir que entre las palabras de uso científico no vinculadas a la medicina, *caos* es hoy una de las que más atrae el interés de diversos tipos de gente. Sea porque se lo vincula a aquel dios primigenio de la mitología griega (citado por Hesíodo[3]), luego asumido por la elaboración judeo-cristiana como la confusión inicial de los elementos del universo; sea porque parece extraño que científicos serios estudiemos el desorden cuando nuestra notoria obligación es descubrir y enseñar leyes (lo ordenado); sea porque para muchos el mundo anda cada vez más caótico. Por cualquiera de esas motivaciones, y muchas más, el tema interesa y se nos pregunta qué es lo que estudiamos y decimos saber.

Soy de la opinión que ese interés no es artificial, ni inventado, ni únicamente de origen religioso. Creo que existen algunas tendencias del desarrollo científico que incentivan el acercamiento a ideas de este tipo. Y que algunos fenómenos de la sociedad actual empujan en el mismo sentido. En esta sección me extenderé sobre estas cuestiones, aparentemente muy desligadas, pero convergentes.

Todos los estudiosos de la historia científica y cultural coinciden en que en los últimos decenios vivimos procesos acelerados de *fragmentación del conocimiento* y de *desmistificación del progreso* como valor en sí mismo.

Este último proceso se manifiesta ante todo en la puesta en duda del concepto de

[2]Para quienes oyeron hablar de la física cuántica o la conocen, creo del caso anotar, ya en estos párrafos introductorios, que casi no me referiré a ella. En la física cuántica , todas las leyes se enuncian en términos probabilísticos, no hay certidumbre, hay mayores o menores posibilidades. Pero no es de la incertidumbre de Heisenberg que escribiré, sino de la incertidumbre de fenómenos determinísticos.

[3]Hesíodo. Poeta griego del siglo VIII a.c. Autor de la *Teogonía* (en que describe la mitología griega tal como se la concebía poco después de los tiempos de Homero, y antes de la época clásica) y del poema didáctico y moral *Los trabajos y los días*.

progreso como tal. Hoy es frecuente escuchar a los viajeros preguntarse cuánto han ganado los millones de pobladores de las riberas del Nilo o de las alturas andinas a lo largo de los milenios de avance "progresista" de la humanidad. ¡Nada! podría ser una respuesta excesivamente esquemática e inmediata. Pero este esquematismo e inmediatismo no puede hacer perder de vista constataciones y argumentos más objetivos e irrebatibles:

- existe un deterioro palpable (muchas veces ocultado) del medio ambiente, que se mide no en las escalas de los tiempos geológicos, sino en las de una generación humana;
- hay una pronunciada deshumanización, robotización y aislamierto de la vida social, que está haciendo perder hábitos y culturas generados a lo largo de la actividad mancomunada y solidaria de la humanidad;
- se percibe un incremento de las desigualdades sociales y la diferenciación entre el Norte y el Sur (olvidémonos por ahora del Este) que lleva a muchos a preguntarnos si no estaremos en camino de una nueva diferenciación de especies, como aquella que hizo convivir a los llamados hombres de Cro-Magnon y de Neandertal.

El primer proceso, que es más duradero, se ha acentuado a lo largo de los siglos, y se justifica en la ampliación del conocimiento y en la creación de condiciones para que la investigación sea eficaz. Ninguna ciencia particular puede ofrecer un modelo unificado para explicar todo el mundo. Se puede decir, yo lo digo, que nunca nadie tuvo tal pretensión. No es menos cierto, sin embargo, que los esfuerzos globalizadores, las visiones macrocósmicas, caracterizaron todas las ciencias, a las naturales especialmente en los siglos XVII y XVIII, a las sociales en el siglo XIX, e impregnaron la formación de muchos de nosotros, en los años centrales de este siglo.

Es frecuente asociar a la revolución copernicana con un cambio sustancial de la concepción que el hombre tenía de sí mismo y de su lugar en el cosmos. Las observaciones y teorías desarrolladas entre 1500 y 1700 por Copérnico, Giordano Bruno, Tycho Brahe, Kepler, Galileo, Newton[4], etcétera, explicaban los movimientos de los planetas en base a leyes sencillas las cuales explicaban, además, la existencia de las mareas, la caída de los cuerpos y otros muchos fenómenos antes completamente desconectados. Estas teorías generaron una inmensa confianza en el saber objetivo y el reconocimiento del universo como materia en movimiento, regido por leyes naturales. La consecuente aceptación de que todo el mundo obedece leyes cognocibles y que los fenómenos físicos son predecibles si se conocen suficientemente sus causas, resultaron como consecuencia inmediata de aquella revolución.

Pero hoy se puede decir que aquellos afanes generalizadores han perdido fuerza, que

[4]Copérnico (Thorn, Polonia, 1473-Frauenberg, 1543), Giordano Bruno (Nápoles, 1548-Roma, 1600), Tycho Brahe (Knudstrup, Dinamarca, 1546-Praga, 1601), Kepler (Wurtenberg, 1571-Ratisbona, 1630), Galileo (Pisa, 1564-Arcetri, 1642), Newton (Woolsthorpe, 1642-Londres, 1728). Demasiado famosos, para poner muchos detalles. Bruno murió en la hoguera por no retractarse de verdades. Brahe acumuló las observaciones astronómicas que tanto rédito dieron a Kepler.

cuesta mucho distinguir cuáles son las líneas principales del progreso, y que cada vez tiene menos adeptos la creencia de que se puede entender el todo y cada una de las partes en función de relaciones de causa-efecto, transparentes y lineales. A tal punto que desde diversos ámbitos de las ciencias naturales y exactas, y también desde áreas de la economía y otras disciplinas sociales, ha ganado fuerza la necesidad de estudiar los aspectos inestables, no completamente predecibles, desordenados, caóticos, de los fenómenos.

Este artículo trata de esos fenómenos caóticos, tal como los físicos y los matemáticos los entendemos.

En otro orden de cosas, diversos sectores interesados en el quehacer social y cultural se preguntan cuál es el grado de desorganización de la sociedad actual, dónde pueden llevar estos procesos llamados de desideologización. La dificultad para percibir cuáles son las regularidades de las transformaciones sociales y económicas, las trabas para aplicar las teorías sobre el desarrollo histórico que tanto impacto causaron en la primera mitad del siglo y los fracasos de los modelos socialistas de organización política, económica y social, generan la búsqueda de estructuras de pensamiento diferentes, que en algún sentido rompan con aquel modelo copernicano (tomado éste como paradigma de otras muchas revoluciones científicas). En particular, crecen los sectores de la opinión pública que detectan que la naturaleza y la sociedad presentan contenidos muy ricos y sustanciales, a pesar del desorden y el caos que se perciben en la superficie. Y que tratan de comprender y sistematizar esa riqueza "cubierta" por el desorden.

Por último, los dos procesos que anotamos al principio de esta sección, han provocado el interés de unos científicos por saber qué hacen los otros, como cosa ajena, como cosa hecha realmente por otro, de la que poco se entiende.

Estas notas no pueden atender completamente estas necesidades de conocimiento, ni arrojar mucha luz sobre aquellas búsquedas. Pero sí pueden colaborar a colocar en un marco un tanto más formal, de ideas simples y precisas, cuáles son las maneras de *detectar* el desorden de fenómenos en evolución, cómo *comparar* mayores o menores desórdenes, qué es lo *entendible* del tal desorden, cómo se puede *controlar*.

2.- *Caos determinístico*

Más en particular, este artículo trata del caos determinístico (tengo la impresión que "determinístico" es un neologismo, pero "determinista", que parece ser más castizo, se refiere a una doctrina filosófica, y quiero evitar esas confusiones). Por determinísticos entenderemos siempre aquellos fenómenos en que existe una relación de causa a efecto claramente identificable y descriptible: se golpea con un martillo y el clavo entra en la madera, se suelta un vaso y éste se cae y, en general, se rompe. ¡Cuidado! El que se rompa no es tan determinístico, en esa descripción elemental, porque depende de la calidad del vidrio, del cómo y dónde golpea, etcétera.

Normalmente, los hombres (y mujeres) en nuestra actividad instintiva y racional, tratamos con fenómenos determinísticos. Los instintos, en particular, en mi visión primaria, son las respuestas determinísticas más evidentes. Vientos fuertes: la araña sale a fortificar su tela. Época de celo: animales de distinto sexo se buscan. Llegan los fríos: el oso se va a su guarida.

En su versión cotidiana, y en sus aspectos más generales, el mundo es comprensible y se puede actuar sobre la naturaleza en virtud de esas relaciones de causa a efecto. Por tanto, por qué mezclar el caos con el determinismo?

El propio intento de estudiar el caos determinístico parece disparatado: ya desde los inicios el ordenamiento del caos fue tarea sobrehumana; de eso habla el epígrafe de este capítulo. Y en los diccionarios –incluso en los más laicos–, se dice que la palabra refiere al "elemento confuso primordial, antes de su ordenación". Grandes enciclopedias de los años treinta (Montaner y Simón, por ejemplo) señalaban que la voz "caótico" era de uso reciente, significando "perteneciente o relativo al caos".

Decididamente no escribo sobre ese desorden total. En esto, soy uno de los *otros* de Calderón de la Barca[5], para quienes el caos es *nada*:

> Antes que forma y perfección reciba
> Era una perfección apellidada
> Caos de los unos, de los otros nada.

Quizás debiera comenzar reconociendo que una palabra de tan malas reminiscencias no es adecuada para mentar un campo de la actividad científica. Pero el eventual daño ya está hecho y sin duda no fue muy grande, si nos atenemos a la facilidad con que su uso se ha extendido a otras ramas de la actividad humana. Seguramente, expresiones del tipo "azaroso", "con incertidumbre", "desordenado", "inestable", sean adjetivos más precisos para describir las características de los objetos que estudia la teoría del caos.

Más allá de esas disquisiciones semánticas, "caos determinístico" tiene un significado preciso para los matemáticos y los físicos, pero es un concepto de por sí contradictorio para el público no especializado. La explicación de ese significado será larga y estará dada en la parte II de estas notas. Para entender sus elementos esenciales es conveniente conocer: *a)* las líneas fundamentales de elaboración de un modelo matemático, y *b)* los significados del término "determinístico". Las siguientes secciones con que termina esta primera parte están dedicadas a esos dos aspectos y a algunas cuestiones generales del lenguaje matemático.

---

[5]Calderón de la Barca (Madrid, 1600-1680), poeta dramático. Autor de obras religiosas, comedias de capa y espada y dramas de honor. Célebre especialmente por sus obras *La vida es sueño, El alcalde de Zalamea y El mayor monstruo, los celos.*

3.- *Modelos matemáticos*

De una manera muy simplista, pero clara y lineal, la elaboración de modelos matemáticos sigue las etapas que se describen a continuación. Para comenzar, nos guiaremos por algunas páginas del capítulo 1: "La elección de los hechos", de la obra *Ciencia y método* de Henri Poincaré[6]:

> [...]a la mayor parte de los hombres no les gusta pensar y esto quizás es un bien, puesto que el instinto los guía a menudo mejor que lo que la razón guiaría a una pura inteligencia, al menos en todos los casos en que persigan un fin inmediato y siempre el mismo; pero el instinto es la rutina y si el pensamiento no lo fecundase, no progresaría más en el hombre que en la abeja o la hormiga. [...] es preciso que cada uno de nuestros pensamientos sea lo más útil posible y es por esto que una ley será tanto más preciosa cuanto más general sea.
>
> Esto nos enseña cómo debe hacerse nuestra elección; los hechos más interesantes son los que pueden servir varias veces, son los que tienen posibilidad de renovarse. Hemos tenido la suerte de nacer en un mundo donde los hay. [...]
>
> Por lo tanto es por los hechos 'regulares' que conviene comenzar; pero desde que la regla está bien establecida, desde que está fuera de duda los hechos que están plenamente confirmados pierden su interés, puesto que no nos enseñan nada nuevo. Es entonces cuando la excepción adquiere importancia. Se cesará de buscar los parecidos, para aproximarse, antes que nada, a las diferencias, y entre las diferencias se elegirá primero las más acentuadas, no sólo porque serán las más sorprendentes, sino porque serán las más instructivas. [...]
>
> No puedo insistir más, pero estas pocas palabras bastan para mostrar que el científico no elige al azar los hechos que debe observar.

La búsqueda del buen interrelacionamiento de las partes, "el sentido de la armonía del mundo" —en el lenguaje quizás demasiado ampuloso del Poincaré de principios de siglo—, decide la elección de los hechos a ser estudiados por el científico. El desarrollo de la antropología y del electromagnetismo en los dos últimos siglos, son buenos ejemplos de la detección (y estudio) de las excepcionalidades como mecanismo de avance del conocimiento científico.

No quiero pecar de ingenuo al plantear las cosas de este modo. En la elección de los grandes temas, de las grandes orientaciones del trabajo científico, pesan mucho más fuertemente aspectos atinentes a la evolución de las fuerzas productivas, a los agentes financiadores, a las modas, etcétera. Estos aspectos, muchas veces no percibidos conscientemente por el científico, sobrevuelan sobre el micromundo de la creación científica respecto de la cual estamos escribiendo.

No es menos cierto que muchos de los más importantes descubrimientos científicos no se han obtenido estudiando directamente uno u otro fenómeno natural, sino a través

[6]Henri Poincaré (Nancy, 1854-Paris, 1912), físico teórico y matemático. Figura descollante de la ciencia en la transición de los siglos. Sentó también bases de la teoría de la relatividad y fue autor de varias obras de filosofía científica y epistemología.

del estudio de fenómenos en dispositivos elaborados por el hombre. En la sección 17 de este trabajo nos extenderemos sobre estos aspectos, pero desde ya destacamos que en los dispositivos elaborados especialmente, los fenómenos están más ordenados y simplificados que cuando ocurren en la naturaleza; son además repetibles "a voluntad". Algunas otras cuestiones generales sobre las teorías y modelos matemáticos pueden ser encontradas en la sección 18.

Una vez elegido, el fenómeno a estudiar debe ser debidamente aislado de la influencia de otros fenómenos, o sea, se deben tomar en consideración sólo los aspectos que clara y efectivamente influyen en su evolución. Esta tarea no es simple: en principio todo fenómeno viene vinculado con otros, y el "aislamiento" a hacer puede ser arbitrario y no acertado. Por ello es que muchas veces conviene repetir esas experiencias en laboratorios donde el mayor aislamiento está asegurado.

Luego se deben identificar variables que describan el fenómeno de la mejor manera y que, a su vez, puedan ser medidas. El término "variable" puede dar confusión para quienes no están habituados a su uso. En el presente contexto se entenderá por variable cualquier magnitud medible, o sea, transformable en un elemento de uno o varios campos numéricos: la temperatura, la presión, el número de ejemplares de una especie, el color si se representa en la forma de la longitud de onda de la radiación correspondiente, la velocidad de una partícula, su posición medida con respecto a algún objeto fijo, etcétera.

Las variables detectadas, o que se considera que influyen en un fenómeno dado, deben ser analizadas en su comportamiento relativo; o sea, se debe detectar cómo cambian unas en relación con las otras. El estudio del comportamiento de esas variables a lo largo del tiempo permitirá obtener fórmulas que relacionen las modificaciones de dichas variables entre sí. Si todo anduvo bien, se tendrá un modelo matemático del fenómeno. Este modelo podrá ser una **ecuación diferencial**, si se logran estudiar variaciones instantáneas, o una **transformación iterativa**, que avanza paso a paso: uno, dos, tres, etcétera, si las variaciones son más espaciadas.[7]

Estos tipos de modelos matemáticos se presentan en una gama inmensa de fenómenos: los movimientos de los planetas, los latidos del corazón, el desplazamiento de las ondas de radio, la ascensión del aire (y sus nubes) por convección, el crecimiento

[7] Por variación instantánea entendemos aquí el cociente entre la diferencia de los valores de la variable en dos tiempos distintos, dividida por el tiempo transcurrido (que se supone pequeño, de allí lo de instantánea). Por ejemplo, en la caída de un cuerpo la variación instantánea de su posición es la velocidad de caída y la variación instantánea de la velocidad, llamada aceleración, es constante. Las ecuaciones diferenciales son relaciones entre las variables (tiempo y posición, por ejemplo) y entre las variaciones de estas variables (la velocidad o la aceleración, si se estudian posiciones respecto del tiempo). La ecuación diferencial de la caída de un cuerpo establece: aceleración = constante.

En cambio, en las transformaciones iterativas (les recuerdo que iterar es repetir y que en computación se entiende por iteración la ejecución reiterada de una parte de un programa, con datos distintos cada vez), los tiempos no son continuos: se dan relaciones entre variables que cambian espaciadamente; aquí lo instantáneo no existe y los cambios se manifiestan a saltos.

de una población de conejos[8], el movimiento de las moléculas de gases y de la bola en un billar, las variaciones de precios en la Bolsa, bacterias o virus que se propagan en una población humana.

Frecuentemente se dice que dichos modelos o sus ecuaciones regulan la evolución del fenómeno. O, para plantearlo en términos aún más polémicos, todo es visto por los científicos como si el fenómeno no existiese y sólo interesasen sus ecuaciones. Esta confusión es frecuente. Forma parte de la diferenciación entre la realidad y lo que el hombre capta a través de sus experiencias, y las teorías que a partir de ellas hace. Las ecuaciones en realidad no regulan cosa alguna, las ecuaciones son procedimientos abstractos que la humanidad ha descubierto para reflejar objetivamente aquellos fenómenos, entenderlos, hacer previsiones, usarlos en su provecho. Son, simultáneamente, el modo que tenemos de reproducir la realidad; y en esta reproducción sí, las ecuaciones regulan la evolución. Estas cuestiones son el meollo mismo de las grandes discusiones sobre teoría del conocimiento de las que no pretendo participar, pero están demasiado cerca del objeto de este artículo como para soslayarlas completamente.

[8]Un ejemplo célebre es el siguiente modelo de dinámica de poblaciones. Se desea estudiar la variación de la cantidad de ejemplares de cierta especie en un ambiente cerrado, con las siguiente restricciones: se mantiene constante el potencial reproductivo (que incluye la relación entre el número de nacimientos y muertes por generación), y el número máximo de ejemplares está limitado por la cantidad M (que dependerá, por ejemplo, de la alimentación disponible).

Llamémosle $p(n)$ al número de ejemplares de la generación número n, o sea, si $n = 8$, $p(8)$ es el número de ejemplares luego de 8 ciclos reproductivos, o sea, el número de ejemplares de la 8va. generación (n-ésima en el caso de una n cualquiera). Si sólo influyera el potencial reproductivo, el número de ejemplares de la generación $n+1$ será proporcional al de la n-ésima, o sea, $p(n+1) = k\,p(n)$, donde el número constante k está reflejando ese potencial reproductivo. Pero el tamaño de la población también depende de su relación con el número máximo de ejemplares que el ambiente admite: si estamos muy lejos del tope, la población crecerá más rápidamente, y más despacio si estamos legando a él. Incluso, en este modelo, si se llega al máximo M, la población desaparece: el factor por el que se multiplica es $M - p(n)$, y la transformación iterativa es

$$p(n+1) = k\,p(n)[M - p(n)].$$

Para fines ulteriores, conviene dividir esa fórmula por M —le ruego que tome un lápiz y haga los cálculos al margen. Si $x(n)$ es el cociente $p(n)/M$, esto es p de n dividido M, la fórmula quedará

$$x(n+1) = k\,p(n)[1 - x(n)]$$

y si ahora llamamos C al número constante kM, tendremos la expresión final

$$x(n+1) = C\,x(n)[1 - x(n)].$$

Obsérvese que si par algún valor de $n = N$, el valor $x(N)$ fuera 1, en el paso siguiente, $x(N+1) = 0$, y a partir de allí todos los valores serán cero. Brevemente, en matemática, eso se escribe $x(n) = 0$ para n mayor que N.

4.- *Determinismo y caos*

Todos pensarán que establecido el modelo matemático –fórmulas o ecuaciones que regulan el fenómeno estudiado– es posible estudiar la evolución futura (o pasada) y comparar sus previsiones con la realidad. En este sentido el fenómeno es determinístico: sabidas ciertas causas, cierto estado inicial en que lo hemos empezado a medir, podemos prever su estado en otros momentos.

Confiando en forma extrema en ese razonamiento, Pierre Simon de Laplace[9] había escrito en su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (principios del siglo XIX):

> Un intelecto que en un momento dado, conociese todas las fuerzas que animan a la Naturaleza y las posiciones mutuas de los seres que la componen, si ese intelecto fuese tan vasto como para someter esos datos al análisis, sería capaz de abarcar en una única fórmula el movimiento de los mayores cuerpos del universo y el del más liviano de los átomos; nada podría ser incierto para él, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que supo darse con la astronomía, un vago boceto de esa inteligencia.

Muchos siguen concibiendo el determinismo de esa manera mecanicista (no entraré aquí en discusiones sobre otras maneras de plantear el determinismo desde el punto de vista filosófico, en particular sobre el determinismo dialéctico; creo que no corresponden y no hacen a los problemas centrales tratados en este artículo). Pero, en aquella época indicaba claramente el rompimiento final con un pensamiento atado a las leyes divinas, y el triunfo de la razón que apostaba a la posibilidad de conocer científicamente al mundo. Racionalidades exacerbadas de ese tipo son las madres de gran parte de los fundamentos científicos de la revolución industrial.

En pequeña escala, cuando hablamos de dinámica determinística, queremos decir que luego de modelado matemáticamente un fenómeno, si hemos considerado a éste debidamente aislado, ignorando los efectos aleatorios del resto del universo, podemos prever su evolución con total seguridad. Entonces, se podrá preguntar, ¿dónde queda margen para el azar, el desorden, el caos? Pues precisamente en que, si bien se puede conocer la evolución de cada elemento, de cada partícula, el movimiento global puede ser desordenado: dos objetos que están muy próximos en un momento y que son físicamente indistinguibles, se pueden separar muchísimo en un instante posterior. La frase anterior resume sin proponérselo, la definición matemática de caos, que es desarrollada en la sección 10 de este trabajo.

Eso es exactamente lo que sucede cuando se tiran dos botones de corcho cerca de un remolino de agua; y es la regla o principio que sustenta todos los juegos mecánicos de azar, comenzando por la ruleta: las modificaciones imperceptibles en el tirado de la bola, las minúsculas variaciones en la rotación de la rueda, generan la impredictibilidad

[9]Pierre Simón de Laplace (Normandía, 1749-París, 1827), matemático y astrónomo, estudió los movimientos de Júpiter, Saturno, la Luna, e inventó un sistema cronológico que lleva su nombre. De contradictoria actuación durante y después de la Revolución francesa (1789).

del resultado. De igual manera eso es lo que sucede cuando se tienen obstáculos en forma de discos y se echa a correr una bola entre ellos, suponiendo que no hay frotamiento: pequeñas variaciones en el punto de partida o en la dirección de salida, generan poco después grandes variaciones en el recorrido (véase figura 1).

Figura 1. MODELO DE BOLTZMANN-GIBBS DE LOS GASES

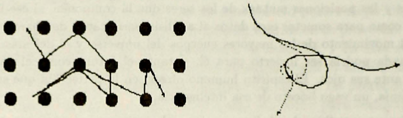


Figura 1.A. Figura 1.B.

A. MODELO SIMPLIFICADO. *El modelo describe la evolución de las moléculas de un gas chocando entre ellas y con las paredes del recipiente, con choques elásticos. El modelo se puede concebir, luego de muchas simplificaciones, como el movimiento de una partícula puntual en una mesa de billar formada por discos regularmente espaciados. La partícula rebota en forma elástica, esto es, con ángulo de entrada igual al de salida. Cada trayectoria es completamente predecible: dada la dirección y el sentido de salida, se puede seguir la trayectoria de la partícula todo el tiempo que se quiera. Pero si se parte con una dirección levemente distinta, rápidamente se tendrá una gran diferenciación entre las trayectorias. Se dice que el movimiento es impredecible: las trayectorias próximas se separan con gran sensibilidad a cambios en los datos iniciales. A vía de ejemplo: con las dimensiones de la figura, para "predecir" 12 colisiones, se necesita conocer los datos iniciales con un error menor que una billonésima.*

B. DIAGRAMA REPRESENTATIVO. *Dos trayectorias próximas se separan rápidamente. Por lo tanto el conocimiento de las trayectorias del sistema depende en forma crucial de sus puntos de partida (dependencia sensitiva de las condiciones iniciales).*

Cada trayectoria es completamente determinística: dada una posición y una dirección de salida uno puede seguir la trayectoria toda la vida; pero si se sale con una condición inicial muy cercana a la primera, la evolución de esta segunda bola será muy diferente; la trayectoria de la primera bola no permite prever dónde estará la segunda al cabo de cierto tiempo: no puede decirse nada sobre el comportamiento futuro de una bola teniendo información de una que ha salido muy cerca (este ejemplo será desarrollado, algo modificado, en la sección siguiente).

Mientras en los movimientos llamados estables, el conocimiento del movimiento de una partícula permite prever que otra que ha comenzado cerca la acompañará por mucho tiempo, en los movimientos caóticos sucede todo lo contrario: el conocimiento de la evolución de una no permite prever qué hará otra que sale cerca.

5.- *Precisando términos*

Ahora le pido que preste particular atención al cuidado que pongo en explicar el uso de algunas palabras. Una de las muchas dificultades que se tienen para aprender matemática y las ciencias relacionadas, es que se usa un lenguaje más preciso que el habitual. Un lenguaje en el que se evitan las múltiples interpretaciones: muchas veces se busca que cada palabra signifique algo muy bien determinado, que no haya ambigüedad. Pero esa misma ambición lleva a que a menudo sea difícil recordar la acepción exacta.

Por ejemplo, en las páginas que anteceden introduje las expresiones "transformación iterativa" y "sistema dinámico". Sobre el significado de la primera, ya hice un comentario en su momento, y no quiero ahora caer en iteraciones. La segunda, se usará reiteradamente en este artículo.

Para nosotros, la expresión **sistema dinámico** tiene un significado muy preciso que explicaré, con menos exactitud que en un manual de matemáticas, pero con bastante parsimonia. Me detendré en ella, porque en estas notas se trata especialmente de explicar cuáles son las características principales de los sistemas dinámicos caóticos.

Todo proceso en que hay movimiento, variación, puede ser considerado como un sistema dinámico. Y como normalmente las variaciones y movimientos se conciben en el tiempo, podemos decir que todo fenómeno que evoluciona en el tiempo es un sistema dinámico. Ahora le pido además, si tiene un diccionario a mano, que mire cómo define la palabra "tiempo".

En general, un sistema dinámico está dado por una **transformación** (proceso) T en un espacio de *sucesos* (eventos). Este espacio, llamado **espacio de fase**, puede ser la recta de los números reales, el plano, el espacio, pedazos de ellos o estructuras matemáticas más complicadas a las que daremos el nombre genérico de *variedades*. Se aplica la transformación T a un punto inicial (evento inicial, condición inicial), y luego al punto resultante se le vuelve a aplicar T, y así sucesivamente. Se tiene una sucesión de puntos ordenados llamados la **órbita o trayectoria**[10] del punto inicial, bajo (la acción de) T. Corresponde aquí aclarar que cuando se trata del movimiento de

[10] Obsérvese que en la sección 3, hicimos un distingo entre transformaciones iterativas y ecuaciones diferenciales como dos formas distintas de describir movimientos. Mientras las primeras describen los fenómenos a tiempos discontinuos, numerables (también se les llama *discretos*), las segundas lo hacen para los fenómenos a tiempos continuos. En este último caso, la evolución de un punto se visualiza como un *flujo*, como una línea. Es en este caso que más habitualmente se usa la palabra trayectoria del punto, reservándose órbita para indicar la evolución de un punto en un sistema definido por una transformación.

una partícula o de un cuerpo sólido, por **condición inicial** siempre vamos a entender no sólo su posición, sino también su velocidad en el momento inicial: indicando sólo la posición inicial no se determina la posición en instantes futuros. Para determinar estas posiciones es necesario especificar además hacia dónde y con qué intensidad se moverá. Si uno quiere saber dónde fue a dar una piedra, no alcanza con dar la información de dónde estaba la mano cuando fue soltada (posición), sino también, hacia dónde y con qué intensidad se movía (velocidad).

El principal objetivo de los "estudios de dinámica" (así se suele decir en lugar de "estudios de sistemas dinámicos") es describir el comportamiento de todas las trayectorias luego de transcurrido mucho tiempo, cuando el tiempo avanza o retrocede hacia el infinito. El modo como las trayectorias evolucionan en tiempos prolongados, recibe el nombre de **comportamiento asintótico** de las trayectorias (u órbitas)[11] Y de lo que se trata es de poder dar propiedades de la mayoría de esas trayectorias. Conocidas esas propiedades de casi todas las trayectorias estaremos en condiciones de decir algo sobre el comportamiento asintótico de todo el sistema, o sea de su evolución global para tiempos prolongados. Nos interesa su evolución, considerada como un todo; no sólo estudiar algunas trayectorias, conocer la evolución de alguna de sus partes, sino poder opinar sobre su comportamiento global. Por ejemplo, saber si hay o no hay variaciones sustanciales, según cuáles sean las condiciones de partida (las que antes hemos llamado condiciones iniciales).

La distinción entre el sistema dinámico y sus trayectorias (órbitas) merece aún más comentarios. Trataré de explicar todo con un ejemplo que conozco bien.

Considere una mesa rectangular con bordes, como una mesa de billar, y coloque en su centro un círculo también con borde. Supongamos que una bolita muy pequeña (un punto, en realidad) se puede mover sobre ella sin rozamiento, rebotando sobre las bandas (rectas en el borde exterior y circular en el interior) con ángulo de salida igual al de entrada (se dice que el choque es elástico). Así, casi todo movimiento será eterno porque al no haber rozamiento nada frenará a la bolita, y al llegar a los bordes sabemos exactamente cómo seguirá el movimiento. Las únicas trayectorias que no continúan son las que se clavan en los ángulos; pero éstas son pocas, en relación al total. Así planteado, el sistema es completamente determinístico. Dada una posición y velocidad de salida (éstas son las condiciones iniciales), sabemos con total exactitud dónde estará la bolita al cabo de cualquier tiempo (o número de rebotes, si se quisiera indicar por ellos la evolución del sistema). Supondremos además que la intensidad de la velocidad de largada de la bolita es siempre la misma (digamos 10 cm por segundo), por lo que la velocidad inicial estará determinada una vez dada la dirección

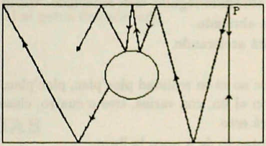
[11] Les recuerdo que una recta es **asíntota** de una curva, si es tangente a ella en el infinito; esto significa entre otras cosas que, muy lejos, la curva y la recta se pueden identificar: la curva se comporta asintóticamente como su recta tangente. Generalizando esta interpretación es que se estudia el comportamiento asintótico de trayectorias: se quiere saber cómo es, qué propiedades tiene, para tiempos prolongados.

del movimiento.

Pero a poco de preocuparse algo detalladamente del sistema del billar, se verá que hay trayectorias muy diferentes, de muy diverso tipo. Por ejemplo, si se sale perpendicularmente desde el punto P (véase figura 2), la trayectoria será un movimiento periódico entre las bandas superior e inferior. Como ya fue observado, existen trayectorias que se clavan en los vértices y no continúan; y están las que "salen" de los vértices y no tienen "pasado". Y existen trayectorias, las más complicadas y por ello las más interesantes, que rebotan en el círculo central. Las trayectorias de los primeros tipos, las periódicas y las que pasan por los vértices, son pocas. Apenas uno se equivoca de ángulo de salida y a la larga choca con el círculo. Para ejemplificar aún más, si desde P la bolita no sale perpendicularmente, luego de algunos rebotes en las bandas rectas, estará chocando con el círculo (cuántos rebotes necesita para llegar al círculo depende del error del ángulo).

El sistema antes descrito (mesa de billar, movimiento sin rozamiento, choque elástico en las bandas) recibe el nombre de **sistema dinámico del billar de Sinai** (por haber sido un matemático ruso de ese nombre[12] el primero en estudiarlo). El sistema tiene muchos tipos de trayectorias. Casi todas ellas chocan contra el disco central. Sobre estas trayectorias es que hay que opinar si se quiere decir algo del comportamiento global del sistema. Estas trayectorias son muy desordenadas porque dos trayectorias que llegan muy cercanas al choque con el disco, se separan fuertemente luego de ese choque.

Figura 2. **BILLAR DE SINAI**



Es una mesa de billar cerrada, en que hay un obstáculo circular en su centro. En la figura se han dibujado tres trayectorias que son representativas de las diversas situaciones que se pueden presentar.

Hay trayectorias que se clavan en los vértices, hay trayectorias periódicas (por ejemplo la que sale perpendicular desde P tiene periodo dos: al segundo rebote vuelve a su estado inicial), y hay trayectorias que rebotan tanto en la "banda" recta como en el círculo, sin volver a la posición inicial. Estas son las trayectorias "genéricas": casi todas las trayectorias son de este tipo.

[12]Ya. G. Sinai (nacido en Moscú, 1935), matemático y físico teórico. Con Ruelle, uno de los pilares actuales de la vinculación entre ambas ciencias. Uno de los creadores de la moderna teoría ergódica.

Los físicos y matemáticos decimos que el comportamiento asintótico de las trayectorias del billar de Sinai .es inestable, unas se comportan independientemente de las otras: el movimiento es desordenado, *el sistema dinámico es caótico.*

En virtud del título que he dado a esta sección querría terminar con una aclaración estrictamente terminológica. Siempre usaremos la palabra *caótico* como contrapuesta a *regular*, la palabra *inestable* como contrapuesta a *estable.* Las palabras *ordenado, desordenado, equilibrio,* etcétera., tendrán sus acepciones habituales, según el contexto en que se usen.

6. *Abra la canilla.*[13]

Ahora, por favor, abra la canilla. Despacio.

Sí, la canilla. Preferentemente la de la pileta[14] de la cocina. Estas piletas suelen ser más planas y de metal.

Sé que leer un libro en la cocina no es cosa cómoda. Al menos si no es de culinaria —en estas notas les comentaré algo sobre el arte de hojaldrar, o sea de hacer un rico pastelito o los célebres *pajlavas* de mi abuela Mariam—. Y ya que estoy en cuestiones domésticas, yo sé de gente que va a leer al baño; en ese caso también puede abrir la canilla, siempre que debajo coloque un "tamborcito", algo que haga ruido al gotear; una chapa de metal fino, por ejemplo.

Usted verá, oirá y verá, siguiendo estas breves instrucciones, dos de los tipos de fenómenos que ayudaron a generar gran parte de la temática de estas notas.

¿Comenzó a gotear? Controle la salida de modo que gotee lentamente, con gotas bien diferenciadas, con un ruido regular bien espaciado. Usted puede hacerlo.

¿Ya está? Ahora siga abriendo.

El ploc'ploc'ploc se irá acelerando.

Deténgase.

Observe si el ploc'ploc no es en realidad ploc'plac, ploc'plac, u otra sucesión no tan monótona, pero sucesión al fin, con varias, tres o cuatro, clases de ruiditos. Si usted es cuidadoso, distinguirá esto.

Continúe. Siempre rotando de a poco la llave.

La variación de ruidos irá aumentando.

Y en cierto momento usted no distinguirá ninguna regularidad, la sucesión de gotas se hizo irregular, no hay monotonía en el goteo. Hay desorden.

Abro un paréntesis. Usted observó cómo, en este texto, yo paso del ruido de las gotas al análisis de las gotas mismas, que es lo que nos interesa. Es que el generador de ruido —el fregadero o el tamborcito— es en realidad un aparato de medida: el fenómeno es el pasaje de agua, no el ruido que genera; pero en este caso, hasta aquí, el oido es mejor receptor que el ojo. Cuestión singular, porque muchos pensamos que

[13]Llave del agua, grifo.

[14]Fregadero.

la visión es nuestro gran comunicador con la naturaleza; pero esto es harina de otro costal. Cierro el paréntesis.

Después de ese ruido desordenado, si sigue abriendo la canilla, siempre despacio, aparecerá un hilito fino, un chorrito de agua regular. Del orden del goteo inicial se habrá pasado a este hilo de agua que sólo cae, no rota, no se corta. Estamos ante lo que se llama un **flujo laminar**: una lámina de agua que cae.

Siga abriendo.

El hilo regular se irá transformando en chorro regular y, en cierto momento, el borde del agua, lo que la separa del aire, que era como un cilindro liso, de vidrio, comenzará a tener estrías, como si el agua rotara en su caída. Como si hubiera un remolino invisible en el interior del chorro.

Y si su llave es suficientemente grande, siga abriendo. Cuando el agua fluya abundantemente y usted se empiece a preocupar por este derroche del vital elemento al que lo estoy induciendo, empezará a salir a borbotones, espumante, estará ante un claro **flujo turbulento**. O sea otra vez el desorden, ahora en un chorro continuo; no como antes, discontinuo, de a gotas.

Lo que usted acaba de ver, oir y ver, son dos pasajes del orden al desorden en sistemas dinámicos de agua saliendo de la canilla. Primero tuvo un sistema de los que nosotros llamamos **discretos** (no porque se comporten con moderación y sensatez, sino porque se pueden contar, son numerables: las gotas vienen de una en una). En ellos, en los sistemas discretos, el pasaje del tiempo se cuenta de unidad en unidad. Usted puede separar cada pasaje de agua por intervalos en que no pasa nada, de allí el tamborcito. En el sistema dinámico discreto del agua goteando usted vio el pasaje de la regularidad inicial al goteo desordenado.

REFERENCIAS

[1] **MARKARIAN Roberto & GAMBINI Rodolfo.** (Editores). *Certidumbres, Incertidumbres, Caos* . Ed. Trilce. Montevideo, Uruguay (1997). Hay edición mexicana ampliada, Ed. La Vasija (1999).