Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N°1, ENERO 2001

La geometrie de Riemann Aperçu historique et resultats recents[1]

Marcel Berger

Institut des hautes études scientifiques (IHES)
35 Route de Chartres.
91440 Bures sur Yvette. FRANCE

ABSTRACT. La géométrie riemannienne devient de jour en jour plus importante. Les deux pionniers en furent Gauss (1777-1855, texte fondateur en 1827) et Riemann (1826-1866, texte fondateur en 1854). La construction des outils de base, pour l'étude locale, fut le fait de Ricci et de Levi-Civita, entre autres, au tournant du siècle. Le théorème de Hopf-Rinow en fut la clef de voûte globale en 1931.

L'événement spectaculaire, tout à fait typique et permanent dans les relations entre les mathématiques développées "pour l'amour de l'art" et leurs applications pratiques totalement inattendues, eut lieu en 1912 quand Einstein eut besoin de façon cruciale, pour développer la Relativité Générale, des outils cités plus haut, créés par l'école italienne qui, elle, avait été mue alors seulement par son désir de bien comprendre conceptuellement l'objet géométrique naturel légué par Riemann.

Dans le présent texte, après avoir exposé les fondements, nous présentons quelques contributions récentes où s'est en particulier illustrée l'école mathématique française.

[1]Special thank to professor Marcel Berger for kind permission to use this article. It has appeared in "Le courrier du CNRS."

1 Grandeurs et insuffisances d'Euclide

Etymologiquement "géométrie" veut dire "mesurer la terre". Celle-ci fut longtemps considérée comme plate et décrite par la géométrie euclidienne classique, celle de $\mathbb{R}^2$ ou, plus généralement, de $\mathbb{R}^n$. Le plan euclidien est, entre autres, un espace *métrique*. Entre deux points, le plus court chemin est unique, c'est un segment porté par la droite qui passe par ces deux points, droite unique s'ils sont distincts. "Plus court chemin" veut dire ceci: la longueur d'une courbe est la borne supérieure des lignes polygonales qui y sont inscrites et seule une courbe portée de façon monotone par le segment ayant deux points pour extrémités a pour longueur leur distance. Noter que si une courbe c est continûment différentiable par morceaux, sa longueur est alors égale à $\int \|c'(t)\|dt$.

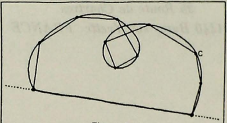

Figure 1

Au tournant entre les $18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ siècles cette géométrie euclidienne faisait doublement grogner. D'abord par son axiomatique: tout le monde acceptait bien les quatre premiers axiomes d'Euclide à l'exception de son cinquième appelé "postulat", car invérifiable pratiquement. A savoir: par un point a extérieur à une droite D, passe une seule droite ne rencontrant pas D.

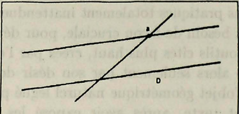

Figure 2

Ensuite parce qu'il existait d'autres géométries, par exemple la sphérique, celle de la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$. Avec une échelle convenable elle représentait assez bien la terre, dont on avait fini par s'apercevoir qu'elle n'était pas plane. La métrique à considérer sur la sphère n'est pas celle induite par $\mathbb{R}^3$ mais celle dite *intrinsèque*, à savoir que la distance entre deux points est la borne inférieure de la longueur des courbes de $\mathbb{R}^3$ qui ont ces points pour extrémités et sont tracées *sur* S^2: défense de creuser des tunnels, c'est trop cher. C'est ainsi que le diamètre de S^2, à savoir la borne supérieure de toutes ses distances, vaudra 2π (et non pas 2).

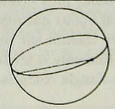

Figure 3

Ce plus court chemin est unique si les deux points ne sont pas antipodes, c'est l'arc de grand cercle qui les joint. Mentionnons enfin la formule d'A. Girard (1625): la surface s d'un triangle de S^2 dont les angles aux sommets ont pour valeur A, B, C est égale à

$$s = A + B + C - \pi\,.$$

En particulier, $A + B + C > \pi$ pour tout triangle. Il y avait là matière à réfléchir car il était connu à l'époque que le postulat d'Euclide était équivalent au fait que la somme des angles d'un triangle vaille exactement π.

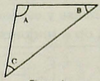

Figure 4

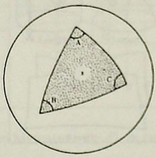

Figure 5

2 Les désirs de Gauss

Gauss semble avoir été doublement motivé. Dès l'âge de quinze ans (en 1784) en effet il étudiait l'axiomatique de la géométrie. Ensuite, de 1812 à 1816, il eut à faire de la géodésie. Il la voulut plus précise que ses prédécesseurs; c'est-à-dire sur l'ellipsoïde de révolution aplati qui représente assez bien notre Terre. D'où des problèmes de plus court chemin sur une telle surface, des problèmes de "trigonométrie": calculer les éléments d'un triangle lorsque l'on en connait trois. Par exemple, deux côtés et l'angle compris. Et que vaut sur un ellipsoïde $A+B+C-\pi$?

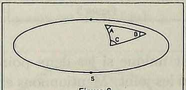

Figure 6

En bref, Gauss voulait comprendre la géométrie *intrinsèque* des surfaces, indépendamment de leur situation dans $\mathbb{R}^3$. La géométrie intrinsèque des *courbes* est toujours banale. puisqu' elles sont toutes localement isométriques à $\mathbb{R}$! Pour une courbe, la courbure *(intrinsèque)* dont nous allons parler suivant Gauss puis Riemann est *toujours nulle.* Il faut d'abord bien réaliser que cette métrique intrinsèque peut être la même pour des surfaces *différentes.* Par exemple un cylindre, un cône et plus généralement les surfaces développables ont une géométrie intrinsèque qui est la même que celle de $\mathbb{R}^2$ (au moins localement, comme on peut s'en rendre compte en ouvrant le cóne ou le cylindre avec une paire de ciseaux et en l'étalant sur le plan $\mathbb{R}^2$). Par contre, essayez donc avec S^2! car la somme des angles d'un triangle simplement connexe y est toujours supérieure à π. Alors que pour un paraboloïde hyperbolique, on a toujours au contraire $A+B+C<\pi$.

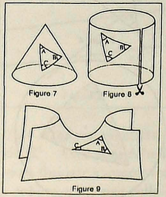
Figure 7 Figure 8 Figure 9

Mieux, on peut construire les étapes d'une déformation continue de surfaces qui ont même géométrie intrinsèque (on dit qu'elles sont *isométriques* alors qu'elles ne sont évidemment pas *congrues*, c'est-à-dire déduites par un déplacement). Mieux encore, toutes ces surfaces ont, aux points se correspondant par isométrie, leurs deux rayons de courbure principaux égaux, car il s'agit de surfaces minima. Avant Gauss, on ne connaissait des surfaces que cette notion de rayons de courbure principaux (Euler, Rodríguez, Meusnier) et le fait que les plus courts chemins sont portés par des courbes appelées *géodésiques*, caractérisées par la condition que leur vecteur accélération est normal à la surface considérée (Bernouilli, Euler).

3 Ce que Gauss trouva (publié en 1827)

En bon géodésien, il paramétra ses surfaces par des cartes et s'occupa des changements de cartes. Il exprima alors la métrique intrinsèque, dans une carte donnée (u, v), sous la forme

$$E(u,v)du^2 + 2F(u,v)du\,dv + G(u,v)dv^2$$

La donnée d'un tel ds^2 est équivalente à celle de la métrique instrinsèque. La longueur d'une courbe $c : t \to (u(t), v(t))$ tracée sur la surface y vaut

$$\int ||c'(t)||dt = \int \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 dt}.$$

Sur la figure ci-dessous, on a représenté une carte de Mercator ordinaire et dessiné les cercles des vecteurs de même norme: on voit bien que les distances dans la carte ne sont pas celles d'Euclide.

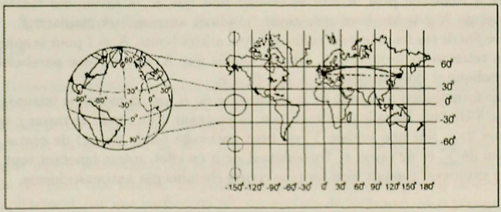

Figure 10. Projection de Mercator : $(\varphi, \theta) \Rightarrow (u = \varphi, v = log(tg(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})))$

Puis Gauss introduisit un invariant, la *courbure* K (dite courbure de Gauss ou courbure totale), qui est une fonction numérique sur la surface. Un des résultats fondamentaux de Gauss donne trois propriétés de K:

(i) $K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$, le produit des inverses des rayons de courbures principaux;

(ii) pour un triangle T de la surface, on a toujours $A+B+C-\pi = \int_T K(m)dm$ où la mesure dm est l'aire de la surface à savoir $\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ dans une carte (u,v);

(iii) dans une carte (u,v) on a

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)^2K &= E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) \\ &+G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) \\ &+F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u) \\ &-2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}) \end{aligned}$$

(où $E_u = \frac{\delta E}{\delta u}$, $E_{uv} = \frac{\delta^2 E}{\delta v^2}$, etc).

L'équivalence entre (i) et (iii) est le *"theorema agregium"*: elle montre que $K = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}$ ne dépend en fait pas du plongement de la surface, mais seulement de sa métrique intrinsèque. La formule de (ii) montre, elle, que K est calculable, sur la métrique intrinsèque de façon geométrique. En outre, on y retrouve que, dans un plan euclidien ou une métrique isométrique, comme on a $K \equiv 0$, on a $A+B+C=\pi$ por tout triangle. Et réciproquement, si $K \equiv 0$, on est isométrique à la géometrie euclidienne. On peut donc bien dire que K est l'invariant qui mesure le *défaut d'euclidienneté* de la surface. Malheureusement, K n'est pas caractéristique de la métrique, sauf si elle est constante. Pour caractériser une surface à isométrie près, if faut se donner plus que K, à savoir des fonctions déduites de K par les deux opérations "gradient au carré" et "laplacien". Un nombre *fini* de ces fonctions est suffisant. Aux autres bouts, $K \equiv 1$ pour la sphère, et l'on retrouve la formule d'A. Girard; tandis que $K < 0$ sur une paraboloïde hyperbolique et donc toujours $A+B+C < \pi$.

Une formulation plaisante de la découverte de K par la métrique intrinsèque est due à Diquet. Dans le plan euclidien, la longueur d'un cercle de rayon ε vaut toujours $2\pi\varepsilon$. Sur une surface $\sum$ on peut parler du cercle $c(m,\varepsilon)$ de centre un point m de $\sum$ et de rayon ε. Un habitant de σ en effet, même ignorant tout du monde extérieur, connaît bien les plus courts chemins par antimasochisme.

On a alors

$$\text{long }(\mathrm{c}(\mathrm{m},\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon(1 - \frac{\mathrm{K(m)}}{6}\varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^2))\,.$$

Par exemple, cette longueur est plus grande que $2\pi\varepsilon$ sur le paraboloïde hyperbolique, tandis que'elle est plus petite sur S^2. En fait, on la connaît: c'est $2\pi sin\varepsilon$ et comme $sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + 0(\varepsilon^3)$ on retrouve bien que $K \equiv 1$ pour la sphère.

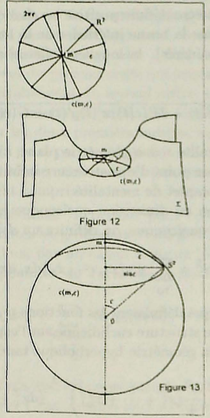

Figure 12

Figure 13

4 Les fondements de la géométrie selon Riemann : 1854

Gauss nous laissait sur notre faim pour au moins deux raisons. D'une part, on ne peut se contenter de géométrie à deux dimensions. De même que la géométrie intrinsèque des surfaces est une généralisation de celle de $\mathbb{R}^2$, il faut certainement généraliser la géométrie de $\mathbb{R}^3$. D'autre part, même en géométrie plane une grogne légère subsistait : on avait découvert la géométrie hyperbolique plane mais elle était mal fondée. Et pour cause, car elle ne peut jamais être réalisée complètement par une surface de $\mathbb{R}^3$. La surface de Beltrami, ne représentait la géométrie hyperbolique que localement, car elle n'était pas simplement connexe, mais aussi improlongeable. En fait Hilbert démontra que le plan hyperbolique ne pouvait jamais être complètement plongé dans $\mathbb{R}^3$. Le but de Riemann, c'était de savoir ce qu'est *une géométrie*.

Pour Riemann, une géométrie plane c'est un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et sur U un $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ où E, F, G sont des fonctions sur U et où la forme quadratique associée doit être définie positive en chanque point (u, v) de U. La métrique est définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes (joignant les deux points considérés), la longueur elle-même des courbes étant par définitions $\int \|c'(t)\|dt$ où

$$\|c'(t)\| = \sqrt{E(c(t))x'^2(t) + 2F(c(t))x'(t)y'(t) + G(c(T))y'^2(t)}$$

si $c(t) = (x(t), y(t))$. Moralité : une géométrie plane, c'est un continuum à deux dimensions muni en chaque point d'une structure infinitésimalement euclidienne. C'est un retournement complet de mentalité.

Maintenant l'extension en dimension quelconque est automatique : sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, n entier quelconque, on définira un ds^2 par

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)dx_i\, dx_j$$

où la forme quadratique que définissent les fonctions g_{ij} doit être partout définie positive. En fait, c'est une structure euclidienne sur l'espace tangent à U au point considéré. Par exemple, la géométrie hyperbolique tant désirée sera simplement:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right)^{-2} (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

où l'ouvert U ici est la boule ouverte $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 4/\alpha^2$ et α un paramètre réel quelconque.

Pour les variétés de Riemann, le problème des plus courts chemins est résolu, au moins localement. Ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques et par deux points

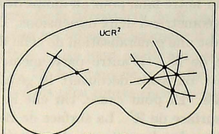

Figure 13bis

qui doivent être suffisamment voisins, il en passe une et une seule qui réalise le plus court chemin, ainsi qu'il en était en géometrie euclidienne.

Il revenait à Riemann de trouver l'invariant qui généralise en dimension quelconque la courbure K découverte par Gauss pour le cas $n = 2$. La réponse n'est pas un être simple; est-ce là ce qui fait peur dans la géométrie riemanienne? Riemann découvrit cet animal par un développement limité habile du ds^2. On peut toujours annuler les termes du premier ordre : la morale est qu'une variété de Riemann n'a pas de dérivées du premier ordre qui soient significatives. Mais que, par contre, elle en a inévitablement du second ordre, qui constituent le *tenseur de courbure*. Cet objet est, en chaque point, une forme quadrilinéaire $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ qui est antisymétrique en les deux premiers indices, antisymétrique en les deux derniers, symétrique en ces deux paires et satisfait aussi l'identité de Jocobi pour les trois premiers indices. Même en dimension 4, ce tenseur de courbure n'est pas actuellement complètement compris.

Riemann avait procédé ainsi. Il prenait pour coordonées des coordonnées orthonormées telles que toutes les géodésiques issues de l'origine soient des droites pour ces coordonnées. Alors, par un calcul utilisant l'equation des géodésiques, il montrait que le développement de Taylor de la métrique était nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_1^2 \quad &+ \quad \cdots + dx_n^2 + \sum_{i,j,k,h} R_{ijkh}(x_i\, dx_j - x_j\, dx_i)(x_k\, dx_h - x_h dx_k) \\ &+ \quad O(x_1^2 + \cdots + x_n^2). \end{aligned}$$

Remarquons ici que R n'a guère de sens quand $n = 1$: il n'y a pas de gémétrie riemannienne en dimension 1 car, comme on l'a remarqué plus haut, toutes ces courbes sont localement isométriques entre elles. Et si $n = 2$, comme $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ est de dimension 1, on voit que la forme quadrilinéaire R s'identifie à un scalaire (la courbure de Gauss).

Géométriquement on peut obtenir R "à la Diquet" comme suit. Soit G^2U la grassmannienne constituée par tous les 2-espaces tangents à U. A $\pi \subset G^2_mU$ on peut associer le cercle $c(m,\varepsilon)$ de rayon ε en portant, sur chaque géodésique issue de m et tangente à π, la longueur ε. Alors

$$\operatorname{long}(c(m,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon(1 - \frac{K(\pi)}{6}\,\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^2))$$

où $K(\pi)$ est par définition la *courbure sectionnelle* de (U, ds^2) pour π. Et K et R sont reliés par $K(\mathbb{R}\cdot x + \mathbb{R}\cdot y) = R(x,y,x,y)$ si $\{x, y\}$ est orthonormée.

Les identités que satisfait R montrent que K détermine R par polarisation.

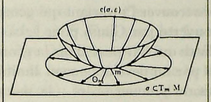

Figure 14

De même qu'en dimension 2, pour tout m la courbure (R ou K) mesure bien le *défaut d'euclidienneté* de (U, ds^2). Car $K \equiv 0$ entraîne que la variété de Riemann considérée est localement isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, les continuums de Riemann où K est une constante k sont nécessairement, localement du moins, les sphères si $k > 0$ et les espaces hyperbolique si $k < 0$.

Globalement, un résultat de base est que, pour tout k réel, il existe (à une simétrie près) une et une seule variété riemannienne simplement connexe et à courbure sectionnelle constante égale à k que l'on peut *dénoter* par $S^n(k)$. C'est la sphère de rayon $1\sqrt{k}$ si $k > 0$, l'espace euclidien si $k = 0$ et l'espace hyperbolique donné par la formule de Riemann citée plus haut où l'on doit prendre $\alpha^2 = k$. Il est capital, comme on le verra plus loin, de disposer ainsi d'une famille, indexée exactement par les réels, comme espaces de comparaison.

5 Ce qu'il fallait faire après Riemann

Riemann ne faisait que du *local*. Pour faire du global, il faut d'abord bien définir un continuum à n dimensions. C'est la notion de variété différentielle (de dimension n) terminée avec Whitney après H. Weyl et Elie Cartan entre autres. Sur une telle variété M rappelons que l'on peut parler de fonctions numériques C^∞, de vecteurs et d'espaces tangents, de différentielle (dérivée première) d'une fonction, de tenseur et en particulier de formes différentielles extérieures. Par contre, il n'existe pas de dérivées seconde, troisième... d'une fonction; en effet, contrairement au cas de la dérivée première, les dérivées ultérieures dépendent de la carte choisie. La raison "profonde" est que la dérivée seconde d'une fonction composée fait intervenir, outre le terme normal $g' o f$, le terme $g''(f, f)$ qui détruit l'invariance recherchée en général. De même, on ne peut pas dériver des champs de vecteurs ni des tenseurs.

La notion de variété abstraite permet de bien distinguer entre une variété et ses quotients. Par exemple, entre la sphère S^n et son quotient par l'antipodie, l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$. Entre $\mathbb{R}^n$ et les cylindres $S^1 \times \cdots \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-k}$ qui aboutissent au tore $T^n = (S^1)^n = \mathbb{R}^n /, \mathbb{Z}^n$.

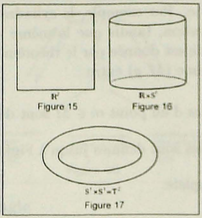

Figure 15
Figure 16
Figure 17

Une variété *riemannienne* sera maintenant la donnée d'une variété différentielle M munie, sur chacun de ses espaces tangents $T_m M$, d'une structure euclidienne g_m (c'est-à-dire une forme quadratique définie positive et bien sûr la correspondance $m \to g_m$ devra être C^∞). On peut *noter* (M, g) une telle variété riemannienne.

La première question globale concerne la métrique, toujours définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes joignant deux points. A savoir: étant donné deux points $m, n \subset M$ *existe-t-il toujours un plus court chemin de m à n?* On sait que ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques, des courbes de M dont il existe une et une seule ayant une origine et un vecteur vitesse initiale donnés. Mais en général, il n'y a aucune raison que ces géodésiques, régies par une équation différentielle du second ordre mais non linéaire, soient définies jusqu'à l'infini.

On va voir que ce fait est lié à ce que la réponse à la question ci-dessus est *non* en général : dans $\mathbb{R}^2|0$ (l'origine ôtée) deux points *comme* x et $-x$ ne sont jamais joints par un plus court chemin. Plus généralement, ceci arrivera dès que l'on troue une "bonne" variété.

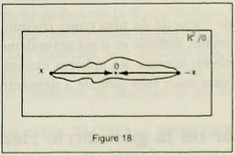

Figure 18

En fait, la question dépend non seulement de la variété mais de la métrique riemannienne qu'elle porte. Par exemple, le cylindre $\mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ donne une réponse positive à la question, tandis que la même variété $\mathbb{R}^2|0$ en donne une négative. La réponse finale est donnée par le théorème de H. Hopf-Rinow (1931) : il y a équivalence pour une (M, g) entre :

(i) les géodésiques issues d'un point $m \in M$ sont définies jusqu'à l'infini;

(ii) toutes les géodésiques sont définies jusqu'à l'infini;

(iii) la métrique est complète.

En outre, l'une quelconque de ces conditions entraîne que : deux points quelconques de M sont joints par un plus court chemin. Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre un disque ouvert de R^2. Par contre, dès que M est une variété compacte, elle sera toujours complète. *Dans toute la suite*, on ne considérera que des variétés riemanniennes *complètes.*

Le fait que (i) entraîne (iii) est la mise en forme de l'idée intuitive que le balayage de M par les géodésiques infinies issues d'un point fixe m empêche l'existence de trous.

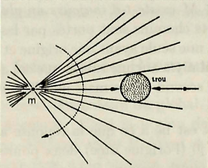

Figure 19

Quant à la question de *l'unicité* du plus court chemin, alias la théorie dite du *cut-locus*, elle est extrêmement difficile et n'est actuellement résolue que dans des cas extrêmement particuliers, comme les sphères canoniques. Sur un ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$. Le résultat est connu mais très difficile à démontrer.

6 Le triangle d'or de la géométrie riemannienne

Il est schématisé ci-dessous. Il est indispensable à bien connaître pour maîtriser les bases de la géométrie riemannienne.

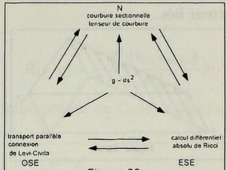

Figure 20

Le côté N-ESE du triangle

En tout premier lieu, sur (M, g) il existe un tenseur de courbure et une courbure sectionnelle, il n'y a rien de plus à faire que Riemann.

En second lieu, on a vu qu'il n'existe pas sur M, variété seulement différentielle, de calcul différentiel comme dans $\mathbb{R}^n$; il faut s'arrêter aux vecteurs tangents et aux différentielles premières de fonctions Par contre, si M est munie d'une structure riemannienne g, alors Ricci a montré qu'il existe un calcul différentiel bien déterminé, disons *absolu*, de tous les ordres et non seulement pour les fonctions, mais même pour tous les tenseurs.

La navette $N \rightleftharpoons ESE$ se pilote ainsi. Précisons-le pour le cas des fonctions par exemple. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction sur M, alors elle admet des dérivées $D^k f$ de tout ordre k. Comme dans l'espace euclidien $D^2 f$ est (en chaque point m) une forme bilinéaire symétrique e sur $T_m M$: $D^2 f(x,y) = D^2 f(y,x)$ pour tout couple de vecteurs tangents en M. Par contre, $D^3 f$ n'est plus symétrique dans les deux derniers vecteurs; mais son défaut de symétrie est justement donné par la courbure:

$$D^3 f(x,y,z) - D^3 f(x,z,y) = R(y,z,x, \text{ grad f})$$

où grad f désigne le vecteur déduit de la forme linéaire Df par la dualité euclidienne que fournit g. Il existe des formules analogues pour tous les k et pour tous les tenseurs. Moralité: une équation aux dérivées partielles du troisième ordre sur une variété riemannienne fera presque sûrement intervenir la courbure. Ce peut même être très utile (résultats de Bochner et ses successeurs).

Le sommet OSO et les côtés N-OSO et OSO-ESE

L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentielle dont l'espace tangent total $T(\mathbb{R}^n)$ est très spécial. En effect, tous les $T_m\mathbb{R}^n$ s'identifient avec $T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ lui-même par l'equipoblence des vecteur liés.

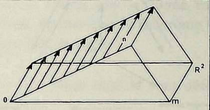

Figure 20 bis

Ainsi on peut comparer deux vecteurs tangents à $\mathbb{R}^n$ en des points différents, parler de leur angle, etc. D'es que l'on est sur une surface $\sum$ de $\mathbb{R}^3$, ceci n'est plus possible au sens de la seule structure intrinsèque de $\sum$.

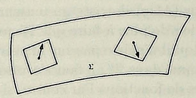

Figure 21

Mais sur une variété riemannienne on sait, depuis G.C. Ricci en 1887, comparer deux vecteurs tangents en des points *infiniment voisins.* Il existe sur (M, g) un parallélisme infinitésimal canonique. La forme *intégrée* est la suivante : étant donné une courbe c de M, d'extrémités m et n, on lui associe un isomorphisme d'espaces euclidiens $\tau_{c,m,n} : T_mM \to T_nN$ appelé le *transport* parallèle le long de c.

Ce parallélisme infinitésimal avait été pressenti calculatoirement par Christoffel, l'homme dont des symboles portent le nom. Pour le transport parallèle, on doit à Levi-Civita une interprétation très gèométrique : pour une surface de $\mathbb{R}^3$ par exemple, il s'obtient en faisant rouler sans glisser la surface sur l'un de ses plans tangents.

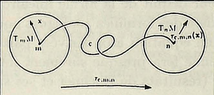

Figure 22

Le pilotage $N = OSO$ est plaisant. On obtient le tenseur de courbure en considérant le transport parallèle le long d'un petit parallélogramme $0(\varepsilon)$ engendré par $x, y \subset T_mM$ et de côtés ε.

Alors

$$R(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{d^2\left(\tau_{c(\varepsilon),m,m}\right)}{d\varepsilon^2}(0)$$

où $R(x,y)$ désigne l'endomorphisme de T_mM déduit par la dualité euclidienne de la forme bilinéaire $R(x,y,\cdot,\cdot)$.

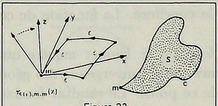

Figure 23

En sens inverse, si c est un lacet en m qui est le bord d'une surface S immergée dans M, on pourra calculer $\tau_{c,m,m}$ comme une intégrale convenable de la forme

$$\tau_{c,m,m} = \int R_s\, ds\,.$$

Le côté OSO - ESE s'obtient ainsi : pour calculer une dérivée telle que $D^k f(..,...,x)$ on identifiera tous les $T_{c(t)}\,M$ à $T_{c(0)}\,M$ à l'aide du transport parallèle le long d'une courbe c quelconque telle que $c'(0) = x$. Alors :

$$D^k f(..,...,x) = \frac{d(D^{k-1} f(..,...,.)}{dt}(0)\,.$$

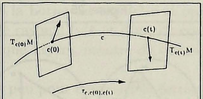

Figure 24

Le transport parallèle peut être présenté de façon plus algébrique et être généralisé énormément. C'est la notion de connexion bien dégagée par Elie Cartan. Whitney et Ehresmann. La notion de connexion a connu depuis une dizaine d'années un rebond absolument spectaculaire, comme étant à la base même de la théorie en plein développement des champs de Yang-Mills, autrement dit des instantons. De ce domaine l'école francaise n'est pas absente, entre autres avec Jean-Pierre Bourguignon (Centre de Mathématiques de I'Ecole Polytechnique).

7 Quelques problèmes et résultats plus ou moins récents

Un théorème d'accroissements finis: Alexandrov-Toponogov

Si une fonction f sur $\mathbb{R}^n$ vérifie $\|f'\| \leq a$, on peut contrôler sa variation : $|f(m) - f(n)| \leq a \cdot d(m,n)$; les fonctions de comparaison sont les fonctions linéaires. Pour une variété riemannienne, il existe un résultat analogue, où la fonction à étudier est la fonction distance et la dérivée est la plus simple qui puisse exister, à savoir, la courbure. La fonction de comparaison est la distance euclidienne.

Heuristiquement la formule de Diquet montre que la courbure sectionnelle renseigne sur la divergence ou la convergence des géodésiques issues d'un point, au moins au voisinage de ce point. Le résultat fondamental est la globalisation de ce résultat. Formulons le cas le plus simple : si la courbure sectionnelle est partout positive, $K \geq 0$, alors les géodésiques issues d'un point sont au moins autant rapprochées que dans l'espace euclidien. Explicitement, on obtient le théorème de A. Alexandrov-Toponogov : si m, n, p sont trois points quelconques et A l'angle que font en m deux plus courts chemins. l'un de m à n et l'autre de m à p, alors:

$$d^2(n,p) \leq d^2(m,n) + d^2(m,p) - 2d(m,n)d(m,p)cosA\,.$$

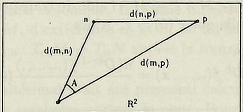

Figure 25

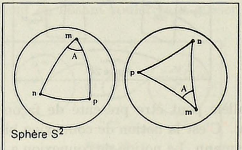

Figure 26 Figure 27

Il existe un résultat analogue pour $K \geq k$, òu l'on compare aux sphères si $k > 0$ et aux espaces hyperboliques si $k < 0$, (c'est-à-dire les espaces notés $S^n(k)$ plus haut). Par contre, pour une borne supérieure de la courbure, si par example $K \leq 0$ on aura encore

$$d^2(n,p) \geq d^2(m,n) + d^2(m,p) - 2d(m,n)d(m,p)\cos A$$

mais *seulement localement* en général. Par exemple, dès que (M, g) recèle une géodésique périodique, une telle formule serait visiblement absurde.

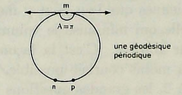

Figure 28

Le théorème d'Alexandrov-Toponogov (1957) s'est révélé un outil de base dans de nombreuses recherches ultérieures. Par exemple, dans le théorème de Gromov cité plus bas sur la majoration des nombres de Betti en fonction de la courbure et du diamètre.

Autre version des accroissements finis : contrôler la forme de la variété par sa courbue

Le premier résultat historique, et le plus proche du théorème des accroissements finis, est celui de Bonnet (1848 par lui, pour les surfaces mais l'extension en dimension quelconque est assez facile). A savoir : si $K \geq k \geq 0$ alors M est bornée, et donc compacte; la borne est explicite et optimale, c'est $\pi/\sqrt{k}$ qui est le diamètre de la sphère de rayon $1/\sqrt{k}$ et donc de courbure constante k.

Ceci, comme l'a remarqué Myers, montre de suite que le groupe fondamental de M est fini.

Le diamètre, c'est bien peu pour contrôler la forme de M. Or on a la résultat fondamental de Gromov (1980) : on peut, à l'aide du seul nombre (diamètre)$^2 \times$ inf K, contrôler la somme des nombres de Betti de M (sur un corps quelconque). Par contre, le type d'homotopie ne peut pas être borné: les petites géodésiques périodiques créent infiniment d'ennuis.

De nombreux problèmes restent ouverts. Le plus spectaculaire est une conjecture de H. Hopf : "sur $S^2 \times S^2$ il n'existe pas de g à $K > 0$".

Le problème inverse: sur une variété de forme donnée que peut-on

faire de mieux comme géométrie riemannienne?

C'est à Mikhaël Gromov (Institut des Hautes Etudes Scientifiques Bures-sur-Yvette) que l'on doit des progrès sur une question, apparemment bien naïve mais en fait très profonde de René Thom. Il s'agit de celle du titre : une variété étant donnée, quelle est la plus belle, la plus naturelle, la plus symétrique parmi toutes les structures riemanniennes que l'on peut y mettre? La réponse théorique est bien simple : c'est celle qui minimise le volume total lorsque la courbure est bornée par 1 en valeur absolue. C'est la façon mathématique de dire que la métrique en question la moins courbée possible, la plus lisse la plus tendue. En dimension supérieure à 2, les grandes questions sont ouvertes. A la suite de Gromov, plusieurs français y travaillent, à Grenoble en particulier Gérard Besson (CNRS), Pierre Courtois (CNRS) et Sylvestre Gallot (Chambéry et Ecole Polytechnique).

En dimension 2, la formule de Gauss-Bonnet (dont nous n'avons malheureusement pas eu le temps de parler) résoud le problème de suite pour toutes surfaces, sauf la plus simple, le plan lui-même. C'est ainsi que pour la sphère S^2, la réponse est celle attendue : c'est la métrique toute ronde du début de cet article qui est la réponse.

Mais pour le plan, la réponse est subtile et a été donnée tout récemment par Christophe Bavard (ENS Lyon) et Pierre Pansu (CNRS, Centre de Recherche Mathématique de l'Ecole Polytechnique). Remarquons d'abord que la structure euclidienne est de volume (aire) infinie (et à courbure nulle!). Or il existe des surfaces d'aire finie à courbure comprise entre 0 et 1 :

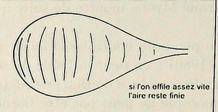

Figure 29

Quelle est celle qui réalise le minimum? La réponse est que c'est celle obtenue en recollant habilement un morceau de sphère (de courbure constante 1) avec un morceau de surface de Beltrami (de coubure constante -1):

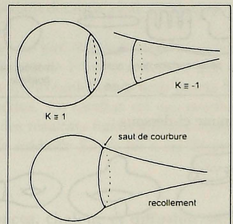

Figure 30

L'aire minima est donc $2\pi(1+\sqrt{2})$: et c'est la seule façon de la réaliser. On notera que cette solution a une courbure dicontinue. La nature ne fournit donc pas toujours des objets parfaitement symétriques ou très lisses.

Géodésiques périodiques et inégalités isosystoliques

On les a rencontrées plus haut. On a vu que les plus petites jouent un rôle important, mais pas complètement élucidé. D'un autre côte, les grandes géodésiques périodiques ne sont pas bien connues; on aimerait pouvoir les compter et en faire des estimations asymptotiques. Leur étude est capitale, à la fois pour la géométrie, et nous allons donner un exemple, mais aussi pour des raisons plus inattendues que nous verrons deux paragraphes plus loin.

C'est en 1983 que Milhaël Gromov a obtenu la solution du problème suivant. Depuis 1965, il domine la géométrie mondiale. Voici le plus visualisable de ses résultats, obtenu en 1983 pour un problème ouvert depuis 1960.

Rappelons d'abord le vieux théorème de *l'inégalité isopérimétrique* du plan (vieux, car connu des Grecs mais la première démonstration vraie date de 1884) : de tous les domaines du plan de *même aire* c'est le cercle dont la longueur du bord (de la fontière, du périmètre) est *la plus petite*.

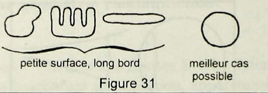

Figure 31

Prenons des surfaces comme ci-dessous :

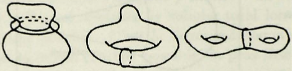

Figure 32

Ensuite, on prend un élastique, extensible autant que l'on veut et aussi rétractable que possible (c'est théorique!), et l'on essaye *d'étrangler* la surface. Pour la surface qui est une sphère déformée, il y a bien une position de l'élastique stable, mais on peut cependant s'en débarrasser "par dessus la tête". Pour la surface à un trou (appelée *tore*) il peut y avoir de faux étranglements mais si, au départ, l'elastique *entoure* vraiment le tore, alors il y aura un étranglement maximum, c'est-à-dire une position de *plus petite longueur*. On appelle *systole* d'une surface à au moins un trou la plus petite de toutes ces longueurs pour tous les entourements vrais (dont on ne peut pas se débarrasser!). Il est intuitif que l'aire de la surface doit être assez grande fonction de la systole:

(1) aire $\geq$ (constante ?) $\times$ (systole)^2.

Et même on peut raisonnablement penser que *plus* il a de trous, *plus* l'aire doit être grande:

(2) aire $\geq$ (constante croissant avec le nombre de trous) $\times$ (systole)^2.

Por un trou, Loewner avait réussi à démontrer en 1949 l'inégalité (1) par des arguments tout à fait non géométriques et qui ne pouvaient pas donner l'inégalité (2). Ce n'est qu'en 1982 que Gromov y réussit, par une méthode géométrique très simple. Cependant, la même question se pose pour les objets de dimension 3,4,...

Là, même pour la variété la plus simple (les tores qui généralisent le tore à un trou en dimension 2), le problème était complètement ouvert et personne n'avait la moindre idée de la façon de l'attaquer. Gromov introduisit une technique très profonde, qui consiste à se ramener à une inégalité isopérimétrique du type de notre introduction, mais dans des espaces de *dimension infinie*, en fait des espaces de "fonctions distances".

Puisque nous en sommes aux élastiques tendus, mentionnons que Jean-Pierre Serre (Professeur au Collège de France) a montré que dans toute variété (lisse, compacte, en dimension quelconque) entre deux points fixés, il y a une infinité de positions d'élastique tendus. Ce résultat est une conséquence de sa thèse sur la topologie, qui contient des résultats fondamentaux obtenus en 1951 et qui ont eu une grande influence; la médaille Fields lui a été décernée en 1954 entre autres pour cela.

Vibrations et fréquences, chaleur et diffusion dans les variétés riemanniennes

C'est tout un royaume dans le continent "Analyser sur les variétés", qui n'a été réellement ouvert que récemment. Son roi est l'opérateur de Laplace-Beltrami (le "laplacien", que l'on peut associer "naturellement" à une métrique riemannienne. Pour ce sujet précis, on pourra consulter aussi l'article de Pierre Bérard dans *Images des Mathématiques*, 1985.

Quand on étudie les cordes, puis les membranes vibrantes, on leur trouve un *spectre*, à savoir la collection $\{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots\}$ des fréquences de leurs vibrations pures. De même, une variété riemannienne bornée possède elle aussi un *spectre*: c'est l'ensemble des fréquences de ses vibrations "pour elle-même". Les deux problèmes que se pose immédiatement un esprit un peu mathématique c'est:

(i) calculer le spectre d'une variété donnée;

(ii) est-ce que le spectre permet de reconstituer la variété métrique?

Ces problèmes ont bien avancé. A Grenoble, Yves Colin de Verdière et Gérard Besson (CNRS) ont étudié la question si j'ose dire initiale, celle de la première fréquence λ_1. En effet, sur la sphère S^2 bien ronde, il y a trois façons indépendantes de réaliser cette fréquence fondamentale (celle qui correspond au son le plus grave), correspondant aux trois axes de coordonnées. Ce sont les trois premières harmoniques sphèriques. En résumé, la multiplicité de la fréquence fondamentale est égale à 3. Besson, lui a montré que pour le tore T^2 la multiplicité maximale (et effective) était 6. Et l'esprit mathématique de se demander aussitôt s'il y a des variétés qui peuvent avoir des fréquences fondamentales de multiplicité plus grande que 3, voire très grandes. Le problème est pratiquement résolu: à part le cas des surfaces, Colin de Verdière a montré que cette multiplicité peut être aussi grande que l'on veut, quelle que soit la variété, dès qu'elle est de dimension supérieure ou égale à 3. La construction mathématique rigoureuse peut être décrite de façon plus physique : il faut disposer sur la variété un très grand nombre d'oscillateurs indépendants mais il faut avoir suffisament d'interférence pour les accorder. Les trois dimensions de l'espace permettent de le faire: "il y a assez de place".

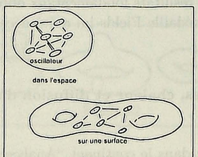

Figure 33

Par contre, sur une surface on voit de suite la difficulté. Colin de Verdière a montré qu'il y a un lien inattendu entre ce problème et celui du coloriage de ladite surface (notion de *nombre chromatique*).

Fréquences et géodésiques périodiques

Une corde vibrante peut l'être, entre autres, de deux façons, soit comme celle d'un piano, soit comme celle d'une guitare (les instruments à corde frottée sont un subtil intermédiaire). Dans le premier cas, on peut visualiser de façon simpliste ce qui se passe en disant que le marteau est un déplacement brusque en un point donné et que ce déplacement se propage ensuite alternativement (dessin de gauche). Dans le cas de la guitare, on peut dire que ce qui se passe est le dessin de droite ci-dessous. Evidemment, les deux choses son liées : or la première semble plus liée à la longueur de la corde et la seconde à sa vibration.

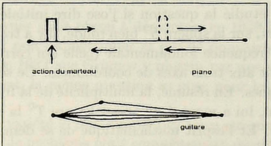

Figure 34

La formulation générale de ce lien serait celle d'un lien, pour une variété, pour une variété riemannienne bornée générale entre le spectre des fréquences introduit plus haut et ce qui s'appelle le *spectre des longueurs*, à savoir la collection des longueurs de toutes ses géodésiques périodiques y compris -c'est capital-celles qui tournent autant de fois que l'on veut.

Y a-t-il des relations entre ces deux spectres; connaissant l'un y a-t-il des relations entre ces deux spectres; connaissant l'un y a-t-il des formules pour calculer l'autre? Heinz Huber répondait oui en 1959 pour certaines surfaces (les hyperboliques). En 1970. Balian et Bloch du CEA conjecturaient un lien général. Ce fut Colin de Verdière qui le premier établit un tel lien en toute généralité. La question est encore en pleine étude. Par exemple, Marie-France Vigneras (Université Paris VII) donna en 1980 des exemples très subtils basés sur la théorie des nombres. C'est en quelque sorte un prolongement de l'extraordinaire puissance de vision de Riemann, qui à la fois fondait cette "géométrie riemannienne" mais était aussi l'un des premiers à faire des "surfaces de Riemann" un socle de l'arithmétique. Les exemples de Marie-France Vigneras sont effectivement des surfaces de Riemann définies par certaines algèbres de quaternions.

Retour sur les fondements de la géométrie

Au début de son travail. Riemann définissait une géométrie comme un continuum à n dimensions, mais où chaque $T_m U$ était muni d'une norme quelconque, pas nécessairement euclidienne. Il s'agissait donc d'un continuum qui était partout infinitésimalement un espace de Banach. On peut y définir donc tout aussi bien la longueur des courbes et la métrique intrinsèque associée.

Puis brusquement et sans vraiment dire pourquoi, mais avec prescience, Riemann se restreignait au cas "riemannien". Les espaces plus généraux ci-dessus portent le nom d'espaces de Finsler.

Bien qu'ils interviennent naturellement en mathématique et en physique, et qu'ils aient été très étudiés, leur étude s'est révélée finalement assez décevante. Est-ce parce qu'un convexe qui n'est pas un ellipsoïde possède des directions privilégiées? A notre avis, le seul résultat global profond sur les espaces de Finsler est celui de Gromov qui relie, pour une variété M non simplement connexe, le volume total à la plus petite longueur des géodésiques périodiques: en effet, le résultat isosystolique mentionné plus haut est démontré par une technique valable pour les espaces de Finsler. Peut-être enfin la géométrie de Finsler est-elle actuellement trop difficile?

8 Conclusion

La géométrie découverte par Riemann est donc finalement un succès. Notons qu'on la trouve dans plusieurs disciplines comme l'arithmétique (par le biais entre autres de la géométrie hyperbolique, en plein développment actuellement dans les travaux de Thurston entre autres, et sur laquelle j'aurais aimé pouvoir insister), dans les groupes de Lie, dans l'analyse, dans la mécanique et enfin, de façon analogue au moins dans les premiers pas, dans la relativité où les objets de base sont les variétés lorentziennes et dans les champs de Yang-Mills cités plus haut. Suggérons qu'une partie de ce succès pourrait être dûe à ce que la structure de variété riemannienne est à la fois assez générale mais aussi suffisament régulière. En fait les variétés riemanniennes ne sont autres que les espaces métriques qui sont, en chaque point infinitésimalement isotropes.

References

[1] **Dombrowski, P.** *150 year after Gauss*, Astérique N° 62, Société Mathématique de France, 1979.

[2] **Spivak, M.** *Differential Geometry* , Volume II, Publish or Perish, 1979.

[3] **Libermann, P.** *Géométrie différentielle*, chapitre IX de l'Algebré d'Historie des Mathématiques, Hermann, 1978.