Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

DESCARTES Y LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

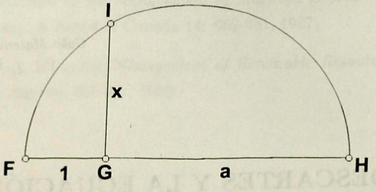
Roberto Torres Hernández
Universidad Autónoma de Querétaro
México
e-mail: robert@sunserver.uaq.mx

Abstract

En la primeras páginas del Primer Libro de su Geometría, Rene Descartes describe (entre otros) un método geométrico para resolver un tipo particular de ecuaciones cuadráticas. Este trabajo retoma ese método y eslabona diversos aspectos matemáticos relacionados con él, mostrando la relación tan estrecha entre álgebra y geometría vía la geometría analítica. También completa y cubre algunos vacíos que, como el propio Descartes dice, intencionalmente ha dejado para dar al autor de estas lineas, el placer del descubrimiento.

1 El Método de Descartes

Al inicio de su célebre *Geometría*, Descartes resuelve algunos problemas algebraicos por métodos geométricos. Uno de los primeros, es el conocido esquema para extraer la raiz cuadrada de un número positivo a, visto como longitud de un segmento:



Considerando una semicircunferencia con diámetro FH de longitud $a+1$ ($FG = 1$ y $GH = a$), se toma el segmento IG perpendicular a FH y con el punto I sobre la semicircunferencia. La longitud x de IG es precisamente $\sqrt{a}$. Aunque Descartes no explica la razón de su afirmación, no es dificil convencerse de que esta resulta de considerar las razones que da la semejanza de los triángulos FIG y IHG.

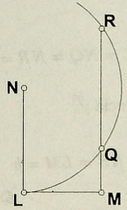
Observemos que, despues de todo, este es un procedimiento que describe cómo construir un segmento (IG) cuya longitud resuelve el problema algebraico dado, que también pudiera interpretarse como un procedimiento para resolver la ecuación cuadrática $x^2 - a = 0$ para $a > 0$.

Así pues, resolver geométricamente una ecuación, significará encontrar (mediante procedimientos geométricos) un segmento cuya longitud satisfaga la ecuación propuesta.

Con estas ideas, Descartes aborda un poco después, el problema de resolver (geométricamente) ecuaciones de la forma $z^2 - az + b^2 = 0$ donde $a > 0$ y $b > 0$.

Aunque la forma b^2 del coeficiente independiente puede parecer un poco extraña, se explica porque considerar la raíz cuadrada de él (b), no representa dificultad alguna, en vista a lo expuesto al principio de esta sección y es util porque se puede utilizar b con libertad para mayor comodidad y conveniencia en el transcurso de lo que sigue.

Para resolver $z^2 - az + b^2 = 0$, se toma el segmento NL de longitud $\frac{a}{2}$.



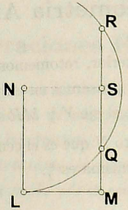
Luego, se toma LM de longitud b (que tendrá que ser perpendicular a NL, aunque el texto no lo menciona explícitamente) y a continuación se traza la recta paralela a NL y que pasa por M. Después, se traza una circunferencia con centro en N y radio $\frac{a}{2}$ y que corte a la recta en R y Q. Entonces, las longitudes de MQ y MR son las soluciones de la ecuación. De este hecho, no se dá mayor explicación.

Descartes termina este tema dando las formas (que tampoco justifica) con las que se expresa z, que es la longitud de los segmentos encontrados:

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

No es dificil llegar a estas igualdades si consideramos al punto auxiliar S, tal que NS sea perpendicular a MR y formando por consiguiente el rectángulo $NLMS$.



Sabemos que

$$NL = NQ = NR = \frac{a}{2}$$

porque son radios de la circunferencia y

$$NS = LM = b$$

por construcción.

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos NSR y NSQ obtenemos que

$$SR = QS = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

Como $MS = \frac{a}{2}$, finalmente obtenemos

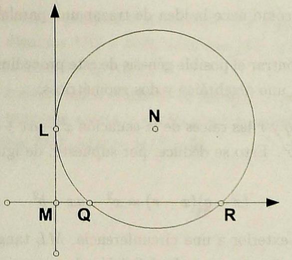
$$MR = MS + SR = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$MQ = MS - QS = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

2 El Método con Geometria Analítica

Tratando de justificar el método anterior, retomemos la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$ (en términos de x, por comodidad) y pensemos en un plano cartesiano donde M sea el origen, el segmento LM esté sobre el eje Y y MR sobre el eje X.

Con estas consideraciones, el punto N que es el centro de la circunferencia, tiene coordenandas $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ y el radio de la misma es $\frac{a}{2}$.



La ecuación de la circunferencia es, por tanto

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y - b)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 - ax + y^2 - 2by + b^2 = 0$$

Considerar los puntos Q y R, que son los puntos en los que la circunferencia intersecta al eje X, es considerar los puntos con abscisa, digamos x_0 y con ordenanda 0, es decir, equivale a tomar $x = x_0$ e $y = 0$ en la ultima ecuación, que queda

$$x_o^2 - ax_0 + b^2 = 0$$

que es precisamente la ecuación a resolver.

De esto deducimos que las abscisas de estos puntos satisfacen la ecuación y por lo tanto las longitudes de MQ y MR solucionan el problema.

3 Algunas Consideraciones Heurísticas

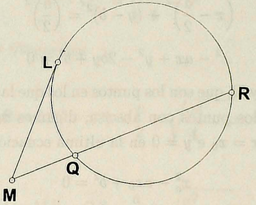
Después de la argumentación de la sección anterior, el método de Descartes parece quedar plenamente justificado. Se ha demostrado con rigor que las longitudes de MQ y MR resuelven la ecuación cuadrática.

Sin embargo, siguen quedando ocultas las razones más profundas con las que se concibió este método, es decir, la razón por la que se considera una circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ y centro N, cómo nace la idea de trazar una paralela a NL a distancia b, etc.

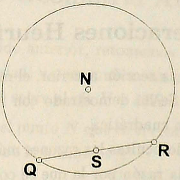
Con el objeto de encontrar el posible génesis de este procedimiento, consideremos tres hechos elementales, uno algebráico y dos geométricos.

1. Si denotamos por q y r las raices de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$, tenemos que $q + r = a$ y $qr = b^2$. Esto se deduce, por supuesto, de igualar los coeficientes en
$$(x-q)(x-r) = x^2 - ax + b^2$$

2. Si M es un punto exterior a una circunferencia, ML tangente y MR secante a la circunferencia, tenemos, por la definición de potencia de M con respecto a la circunferencia, que:
$$ML^2 = MQ \cdot MR$$

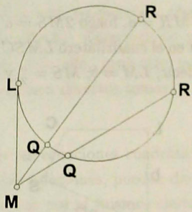


3. Si N es el centro de una circunferencia y QR es una cuerda secante, el segmento perpendicular a QR trazado desde N corta a QR en su punto medio S, es decir, $QS = SR$.



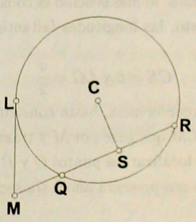
Con estos tres resultados, analicemos el método. Por el primer hecho, se necesita encontrar segmentos, digamos MQ y MR, tales que $MQ + MR = a$ y $MQ \cdot MR = b^2$.La pregunta es cómo ubicar a Q y a R.

Por el hecho 2, si consideramos el punto M externo a una circunferencia de tal manera que ML sea tangente a ésta y de longitud b, sabríamos que en cualquier secante MR, tendríamos $MQ \cdot MR = ML^2 = b^2$.



La única longitud fija es LM, pero el radio de la circunferencia y la posición de la secante MR permanecen indeterminadas.

Con el objeto de precisar estas longitudes, observemos que si del centro de la circunferencia se baja una perpendicular a la secante MR y S es el punto de intersección, por el hecho 3 tendríamos que $QS = SR$.

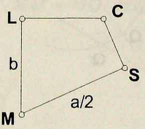


De la figura, observamos que

$$\begin{aligned} MQ+MR &= MQ+MS+SR \\ &= MQ+MQ+QS+SR \\ &= 2MQ+2QS \\ &= 2(MQ+QS) \\ &= 2MS \end{aligned}$$

Pero necesitamos que $MQ + MR = a$, luego $2MS = a$ y $MS = \frac{a}{2}$.

Si nos concentramos ahora en el cuadrilátero $LMSC$, tenemos que dos longitudes y dos ángulos están fijos, es decir, $LM = b$; $MS = \frac{a}{2}$ y $\measuredangle CLM = \measuredangle CSM = 90°$.



Las longitudes LC, CS y los ángulos $\measuredangle LMS$ y $\measuredangle LCS$ quedan en libertad para elegirlos a voluntad. Es claro que si respetamos los datos ya fijos, por todo lo anterior, nuestro modelo geométrico nos dará la solución del problema, es decir, habremos encontrado las longitudes buscadas.

¿Puede haber algo más natural que elegir$\measuredangle LMS = \measuredangle LCS = 90°$?

Con los datos que disponemos, lo más sencillo es construir al cuadrilátero $LMSC$ como un rectángulo y, por esto, las longitudes faltantes quedan tambien determinadas:

$$CS = b \text{ y } LC = \frac{a}{2}$$

Como LC es el radio de la circunferencia, basta construir LM de longitud b, trazar una recta perpendicular X a LM que pase por M y trazar la circunferencia tangente a LM en L y de radio $\frac{a}{2}$ para localizar los puntos Q y R que solucionan la ecuación.

El método de Descartes se nos presenta ahora sin secretos en cuanto a su posible motivación y origen.

4 Algunas Consideraciones Didácticas

Después de todo lo expuesto, resulta imposible sustraerse a la tentación de terminar con algunos comentarios de tipo pedagógico.

1. Es muy frecuente observar en los planes de estudio de las escuelas pre-universitarias, que los diversos temas de matemáticas elementales se encuentran separados en bloques bien definidos, es decir, existen semestres dedicados al álgebra, otros semestres a la geometría y trigonometría y otros mas a la geometría analítica y al cálculo. Pareciera ser que poca o ninguna relación guardan unos con otros. Por ello, presentar material como el de este trabajo, puede ayudar a eslabonar diversos temas importantes sobre un problema común.

2. Esta manera de abordar las ecuaciones cuadráticas, aparte de dar una interpretación geométrica a sus soluciones, pueden dar a los estudiantes excelentes oportunidades para explorar por sí mismos ciertos aspectos del pensamiento matemático, tratando de responder a preguntas muy concretas. Por ejemplo, en relación a la sección 2, ¿es necesario seguir pidiendo la restricción $a > 0$ y $b > 0$ para resolver $x^2 - ax + b^2 = 0$?, ¿qué interpretación algebráica tiene el hecho de que la circunferencia sea tangente al eje X?, ¿y si no lo intersecta?, ¿cúal es el lugar geométrico de los puntos (a, b) tales que $x^2 - ax + b^2 = 0$ tiene soluciones reales?.

3. Para concluir, proponemos al lector explorar en este sentido, la ecuación de grado tres:

   - Verificar que la ecuación $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ se reduce a una de la forma $x^3 + px + q = 0$ utilizando la sustitución $z = x - \frac{a}{3}$. Así, multiplicando por x a la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tenemos que la solución de cualquier ecuación cúbica se reduce a la solución de una ecuación de grado cuatro sin término en x^3.
   - Dada la ecuación $x^4 + px^2 + qx = 0$ considerar la parábola $y = x^2$ y la circunferencia con centro en $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ y radio R donde $R^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{(1-p)^2}{4}$.

Demostrar que las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con esta circunferencia (si los hubiera) son las raices reales de la ecuación dada.

- Para entender la razón de elegir las coordenandas del centro y el radio de la circunferencia como se vió en el punto anterior, trabajar a la inversa, es decir, determinar los puntos de intersección de la parábola $y = x^2$ con una circunferencia (indeterminada) con ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$. Observar que las abscisas de los puntos de intersección determinan una ecuación de grado cuatro sin término en x^3.

Es seguro que la Historia de las Matemáticas puede ayudar a que la enseñanza de muchos temas elementales sea un poco más completa, más atráctiva y más viva.

Bibliografía

1. **DESCARTES, R.** *La geometría.* Editorial Limusa. México 1996.
2. **MECONI, L.J.**, *A geometric technique for factoring polynomials.* Mathematics teacher, Noviembre de 1972 Pags. 621-625.
3. **OLSON, A.T.**, *Circles, chords, secants, tangents, and quadratic equations.* Mathematics teacher, Diciembre de 1976. Pags. 641-645.
4. **PATTERSON, W.M.**, *A special circle for quadratic equations.* Mathematics teacher, Febrero de 1991. Pags. 125-127.