Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

BIOECONOMÍA MATEMÁTICA, EXPLOTACIÓN Y PRESERVACIÓN

F. Córdova

Depto. Matemáticas, Fac. de Cs. Naturales,
Matemática y Medio Ambiente,
Universidad Tecnológica, Santiago-Chile

M. Pinto

Depto. Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Chile, Santiago-Chile

Abstract

En este trabajo se presentan algunos modelos básicos de dinámica de poblaciones y otros de manejo de recursos renovables. Además del modelo logístico con cosecha se expone un modelo de captura impulsivo,es decir, captura discreta y crecimiento poblacional continuo. Para este modelo se optimiza la captura estable por unidad de tiempo.

1 Introducción

El uso de los conceptos y relaciones matemáticas para por medio de la deducción lógica describir, comprender y predecir algún fenómeno de la realidad, es lo que se conoce por modelación matemática. Un proceso que a partir del mundo real y mediante la abstracción toma algunas de las variables involucradas que se sospechan más determinantes, construye un modelo teórico que las relaciona (por ejemplo, vía ecuaciones diferenciales que regulan la evolución de las variables) y por medio de la argumentación lógica (como, explicitar soluciones de la ecuación o estudiar sus propiedades) obtiene propiedades que se interpretan como conclusiones de la realidad.

El objetivo de este trabajo es introducir conceptos del área de la Bioeconomía Matemática y exponer con detalle algunos resultados. Secundariamente se persigue dar cuenta del potencial modelador de algunos tipos de ecuaciones diferenciales en un campo novedoso. ¿Qué es la Bioeconomía Matemática ?, digamos que es la ciencia que estudia la economía del uso de los recursos renovables usando modelación matemática y simulación de sus procesos. Destacados autores han dado cuerpo a esta área, como Clark, Goh, Conrad, Hannesson y Walters, entre otros. Ver (2,3,4 y 7).

Un recurso autoregenerativo se entenderá como una población de animales o plantas con capacidad de reproducirse y desarrollarse. Biológicamente interesa conocer los elementos y dinámica que caracterizan el ciclo de vida del recurso en estudio. Las secciones dos y tres exponen un par de modelos clásicos de crecimiento poblacional. El problema económico radica en optimizar los ingresos de las empresas que explotan el recurso sin descuidar la preservación del mismo, es decir, asegurar la sustentabilidad del negocio. En la cuarta y última sección se estudia este problema para ciertos casos de interés. Las matemáticas aparecen como herramienta de especificación y análisis de las relaciones existentes entre las variables involucradas.

2 Modelo de Malthus

Malthus, uno de los destacados economistas de principio del siglo XIX, dijo: "Cuando la población crece libremente en razón geométrica. La subsistencia crece solo en una razón aritmética. Un ligero tratamiento numérico mostrará la inmensidad del primer poder en comparación con el segundo". Esta afirmación un tanto apocalíptica se basa en el supuesto que la humanidad presenta una razón de crecimiento constante mayor que uno. Hagamos algunos cálculos, sea $x(t)$ la función que dice el tamaño de una población a partir de un tiempo t_0. Nos podemos preguntar por cómo está determinada la variación de esta población en el tiempo. Parámetros importantes son: N y M, los números de nacimientos y muertes per cápita por unidad de tiempo respectivamente. Notemos que N se llaman la tasa de natalidad y M la de mortalidad y son tal que $N \geq 0$ y $1 \geq M \geq 0$. Veamos cómo varía la población en un período de tiempo $[t, t + \Delta t]$, tenemos que el incremento de población en tal intervalo, $x(t + \Delta t) - x(t)$, es igual al número de nacimientos menos las muertes ocurridas en dicho tiempo más el balance migratorio. Suponiendo una población cerrada, es decir, migración igual cero, y observando que $Nx(t)\Delta t$ y $Mx(t)\Delta t$ son los nacimientos y muertes en el período, obtenemos la ecuación

$$x(t + \Delta t) - x(t) = (N - M)x(t)\Delta t$$

o equivalentemente

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = (N - M)x(t),$$

que al hacer $\Delta t \to 0$, se expresa por

$$\dot{x}(t) = (N - M)x(t), \tag{2.1}$$

es decir, la velocidad de cambio en la bíomasa es proporcional a la población presente. Solución de esta ecuación es

$$x(t) = x(t_0)\exp{(N - M)(t - t_0)}.$$

La ecuación (2.1) se conoce como Modelo de Malthus de crecimiento poblacional, la razón geométrica por unidad de tiempo a la que él se refiere es e^{N-M}. La diferencia $N - M$ se llama tasa de crecimiento de la población. Cuando hacemos tender el tiempo a infinito, si $N > M$, entonces $x(t) \to \infty$ y si $N < M$, $x(t) \to 0$. Si $N = M$, $x(t) = x(t_0)$, para todo $t \geq t_0$.

3 Modelo Logístico

El modelo anterior considera que la tasa de crecimiento, $R = N - M$, de una población cerrada es constante, es decir, no se considera que en general las poblaciones alteran sus hábitos reproductivos en presencia de sobrepoblación. Verhults, 1834, propone una tasa R que varía linealmente con el tamaño de la población, esto es, $R(x) = R_0(1 - x/K)$. R_0 se llama tasa de crecimiento intrínseca y K la capacidad de sustentación del ambiente. En este caso $R(x)$ decrece proporcional al incremento de x y si $x > K$ esta tasa es negativa. Recordemos que $\dot{x} = R(x)x$, por lo tanto,

$$\dot{x}(t) = R_0\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t). \tag{3.1}$$

Esta ecuación de variables separadas, unida a la condición inicial $x(t_0) = x_0$, tiene por solución a

$$x(t) = \frac{x_0 K}{(K - x_0)\exp(-R_0(t - t_0)) + x_0}.$$

Un gráfico de la solución para distintos valores de x_0 es el de la figura 1. Notemos que $x(t)$ tiende a la solución constante K cuando $t \to \infty$ para todo $x_0 > 0$.

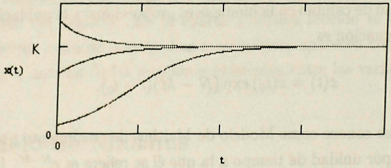

Figura 1

Recordemos algunas definiciones. Para una ecuación autónoma, $x' = f(x)$, un punto $\tilde{x}$ tal que $f(\tilde{x}) = 0$ se llama un punto de equilibrio (soluciones constantes). En el Modelo de Malthus, si $N \neq M$, el único punto de equilibrio es $\tilde{x} = 0$, si $N = M$, todos los puntos son de equilibrio. Para el de Verhults, (3.1), se obtienen los puntos

$\tilde{x}_1 = 0$ y $\tilde{x}_2 = K$. Las soluciones no constantes se "alejan" de $\tilde{x}_1$ y se "aproximan" a $\tilde{x}_2$. Formalicemos estas apreciaciones. Un punto de equilibrio $\tilde{x}$ es: Estable, si dada una distancia ε entorno a $\tilde{x}$, existe una distancia δ y tiempo $\tilde{t} > t_0$, tal que si x_0 está a menos de δ de $\tilde{x}$, entonces la solución $x(t)$, inicialmente en x_0, permanece a una distancia menor que ε de $\tilde{x}$ para todos los tiempos mayores a $\tilde{t}$. Asintóticamente! estable, si es estable y para cada $x(t)$ como el anterior, se tiene $x(t) \to \tilde{x}$ cuando $t \to \infty$. Inestable, si no es estable.

Existe un modo cómodo de reconocer si un punto de equilibrio es estable o no, suponiendo f derivable con derivada continua, entonces $\tilde{x}$ es asintóticamente estable si $f'(\tilde{x}) < 0$ e inestable si $f'(\tilde{x}) > 0$, en caso de derivada nula en $\tilde{x}$ el criterio no otorga información. Observemos que es un ejercicio fácil demostrar que $\tilde{x}_1 = 0$ y $\tilde{x}_2 = K$ son inestable y asintóticamente estable respectivamente.

4 Modelo Logístico con Cosecha

Al suponer que una población representa un recurso natural el cual varía su tamaño según el modelo anterior, pero que está sometida a una extracción de una cantidad h por unidad de tiempo, entonces en lugar de (3.1) se obtiene la ley diferencial de crecimiento

$$\dot{x}(t) = R_0(1 - \frac{x(t)}{K})x(t) - h. \tag{4.1}$$

Si $f(x)$ es el lado derecho de (4.1), entonces los puntos de equilibrio son los $\tilde{x}$ tal que

$$-\frac{R_0}{K}\tilde{x}^2 + R_0\tilde{x} - h = 0.$$

Este polinomio cuadrático en $\tilde{x}$, tiene discriminante, $\Delta = R_0(R_0 - \frac{4h}{K})$, de cuyo signo dependen sus raíces.

Si $\Delta \geq 0$, es decir, $h \leq R_0K/4$, existen dos puntos de equilibrio que denotamos

$$x^* = \frac{K}{2} + \frac{K\sqrt{\Delta}}{2R} \quad \text{y} \quad x_* = \frac{K}{2} - \frac{K\sqrt{\Delta}}{2R}$$

notemos que $x_* \leq x^*$.

Estudiemos la derivada de f en x_* y x^*. Tenemos que $f'(x) = R_0(1 - 2x/K)$, así $f'(x^*) = -\sqrt{\Delta} < 0$, por lo tanto, x^* es asintóticamente estable. Similarmente se tiene $f'(x_*) = \sqrt{\Delta} > 0$, de donde, x_* es un punto de equilibrio inestable. Ver diagrama de soluciones en la figura 2.

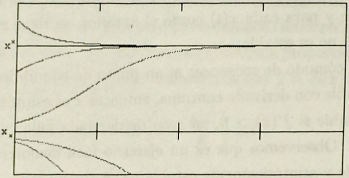

Fig. 2

Si $\Delta < 0$, o equivalentemente, h, la captura por unidad de tiempo es mayor que $RK/4$, no existen puntos de equilibrio y como $x' = f(x) < 0$, para todo $x \geq 0$, es decir, $x(t)$ decreciente, se concluye que $x(t)$ tiende a cero cuando t va a infinito, desde cualquier condición inicial.

Deducimos que una cosecha $h > RK/4$ lleva a la extinción del recurso y para sostener un $h \leq RK/4$ en el tiempo debemos tener una población inicial como mínimo igual a x_*.

5 Modelo Impulsivo de Extracción

El desarrollo tecnológico como también las fuertes demandas, que se traducen en buenos precios, estimulan a la industria obtener en términos relativos, grandes cantidades de recurso en breves espacios de tiempo. Extracciones prolongadas en estas condiciones pueden llevar al tamaño del recurso a niveles críticos de difícil recuperación, poniendo en peligro la continuidad de la población biológica y la actividad económica misma. Frente a estas situaciones los gobiernos intentan ejercer control, por ejemplo, mediante la imposición de cuotas máximas de captura y períodos de veda.

En esta última parte estudiamos el efecto sobre el tamaño de la población (bíomasa), de regulaciones extractivas basadas en el racionamiento y la prohibición de cosecha cuasipermanente. Nos concentramos en sistemas en que la cantidad del recurso disponible varía continuamente, según su biología y su medio, mientras no exista autorización de captura en cuyo caso los montos permitidos son rápidamente lograbIes y constituyen un verdadero salto en la continuidad del crecimiento.

Los procedimientos matemáticos más usados para establecer leyes de evolución de poblaciones han sido las Ecuaciones en Diferencias y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) como ya hemos ejemplificado en las secciones anteriores. Las primeras determinan a causa de la discretización del tiempo funciones de bíomasa tipo escalera, en contraste con las trayectorias continuas surgidas de una E.D.O. Los procesos de crecimiento de los recursos que estudiamos presentan evoluciones paulatinas y continuas, pero abruptamente en ciertos instantes de tiempo tienen drásticos cambios de estado, es decir, son funciones continuas por pedazos. Son así soluciones de Ecuaciones Diferenciales Impulsivas(E.D.I.), ver (1). Intentamos mostrar que las E.D.I. tienen gran potencial como herramienta modeladora de recursos renovables afectos a tiempos puntuales de extración.

Si consideramos por Ω el conjunto de tamaños posibles de un recurso y por $x(t)$ la función que nos dice tal cantidad en un tiempo t, entonces $\{x(t) \in \Omega : t \geq t_0, x(t_0) = x_0\}$ representará una trayectoria de crecimiento posible a partir de un tiempo inicial t_0 y una bíomasa inicial x_0 . Esta trayectoria evolutiva está gobernada por una ley de crecimiento propia a la naturaleza del recurso, de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \ x(t_0) = x_0, \tag{5.1}$$

mientras no alcance alguno de los sucesivos tiempos de extracción $t_k, k = 1, 2, ...$ en los que por efecto de una función de captura I_k esta se reduce instantáneamente al valor

$$x(t_k^+) = I_k(x(t_k)), \tag{5.2}$$

para seguir evolucionando según (5.1) hasta un nuevo tiempo de cosecha t_{k+1}.

Es decir, la bíomasa del recurso está determinada por la E.D.I.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \neq t_k \\ x(t^+) &= I_k(x(t)), \quad t = t_k. \end{cases} \tag{5.3}$$

Los tiempos de captura $\{t_k\}_{k\geq 1}$ estar predeterminados o depender de la bíomasa existente, es decir, se cosecha si y sólo si $t = t_k(x(t))$, $k = 1, 2, \ldots$ En cualquiera de los casos la sucesión $\{(t_k, I_k)\}_{k\geq 1}$ representa una política reguladora de la captura en el tiempo.

Conocido es que la mayoría de las especies, no sometidas a extracción, presentan tasas de crecimiento que hacen tender los tamaños de las poblaciones a valores constantes (recuerde el modelo logístico), definidas por la literatura como, capacidades de sustentación del ambiente. Cuando una población es un recurso económico la cosecha evidentemente afecta la tasa de mortalidad, sabido es que varios modelos predicen que si esta no es excesiva, entonces el tamaño se ajusta a un nuevo estado de equilibrio. En caso de cosecha moderada en tiempos puntuales cada ciertos intervalos, es de esperar más bien equilibrio en el sentido de la existencia de ciclos a los que los bíomasa de la población converge. En esta sección establecemos y estudiamos un modelo de crecimiento del tipo logístico con cosecha proporcional al recurso presente en tiempos predefinidos y periódicos.

Supongamos tiempos de extracción $t_k = ks$, $k = 1, 2, \ldots$, i.e., cada intervalo de veda de longitud $s > 0$. Si $x(t)$ representa la bíomasa en el instante $t \in [0, \infty)$, entonces mientras no hay cosecha asumiremos la ley de evolución

$$\dot{x} = R\left(1 - \frac{x}{K}\right)x, \ t \neq t_k, \ k = 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

En (5.4), R es una constante positiva llamada tasa de crecimiento percápita lineal y $K > 0$ es la ya mencionada capacidad de sustentación del ambiente. Si $t = t_k$, algún $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$x(t) - x(t^+) = Qx(t), \ 0 \leq Q \leq 1, \tag{5.5}$$

es decir, la proporción de cosecha respecto a la población presente es Q. Estamos frente al problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dot{x} & = & R(1-\frac{x}{K})x, & t \neq t_k \\ x(t^+) & = & (1-Q)x, & t = t_k \\ x(0+) & = & x_0. & \end{array}\right. \tag{5.6}$$

La primera cuestión a resolver es cuál es la solución a este problema y cómo es el comportamiento de ella en el tiempo. Si no hay remosión del recurso, i.e., $Q = 0$, (5.6) se reduce a (3.1), luego cada solución se aproxima a K, cuando t tiende a infinito, con independencia del tamaño inicial x_0 de este. Notemos que cuando x_0 es pequeño las soluciones presentan un crecimiento exponencial dominado por $\dot{x} = Rx$ por un cierto período de tiempo, hasta que el factor $1 - \frac{x}{K}$ comienza a afectar determinando un comportamiento sigmoideo a las trayectorias, ver figura 1. Si $Q = 1$ se cosecha toda la población en t_1 y obviamente $x(t) = 0$ para todo $t > t_1$. En lo que sigue $0 < Q < 1$ y $x_0 > 0$.

Lema 1 *La solución $x(t)$ a (5.6) es*

$$\frac{Kx_0M^ke^{R(t-t_k)}}{K + x_0(e^{Rs}-1)(M^k-1)/(M-1) + x_0M^k(e^{R(t-t_k)}-1)},$$

si $t_k < t \leq t_{k+1}$ para algún $k = 0, 1, 2, \ldots (t_0 = 0)$, y $M = e^{Rs}(1-Q) \neq 1$. Si $M = 1$, entonces en la solución $(M^k-1)/(M-1)$ se asume igual a k, $k = 0, 1, \ldots$.

Demostración: Supongamos $M \neq 1$, si $t \in [0, \infty)$ es tal que $t \neq t_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots$ entonces existe $j \geq 0$ con $t_j < t < t_{j+1}$, luego $\dot{x}(t)$ es igual a

$$\frac{Re^{R(t-t_j)}A(B + x_0M^j(e^{R(t-t_j)}-1)) - e^{R(t-t_j)}ARx_0M^je^{R(t-t_j)}}{(B + x_0M^j(e^{R(t-t_j)}-1))^2}$$

en que $A = Kx_0M^j$ y $B = K + x_0(e^{Rs}-1)(M^j-1)/(M-1)$. Factorizando tenemos

$$\dot{x}(t) = \frac{RAe^{R(t-t_j)}}{B + x_0M^j(e^{R(t-t_j)}-1)} \times \frac{B - x_0M^j}{B + x_0M^j(e^{R(t-t_j)}-1)},$$

en esta expresión el primer factor es $Rx(t)$ y el otro es $1 - \frac{x(t)}{K}$.

Ahora si $t = t_k$ para algún $k = 1, 2, \ldots$, entonces

$$x(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} x(t) = \frac{Kx_0 M^k}{K + x_0(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M - 1)}$$

que es igual a $(1 - Q)x(t_k)$. En efecto,

$$(1-Q)x(t_k) = Me^{-Rs}x(t_k) = \frac{Me^{-Rs}Kx_0M^{k-1}e^{Rs}}{K + x_0(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M - 1) + x_0M^{k-1}(e^{Rs} - 1)}$$

$$= \frac{Kx_0M^k}{K + x_0(e^{Rs} - 1)[(M^{k-1} - 1)/(M - 1) + M^{k-1}]},$$

como $(M^{k-1} - 1)/(M - 1) + M^{k-1} = (M^k - 1)/(M - 1)$ se consigue la igualdad.

La demostración para $M = 1$ es totalmente similar.

Destaquemos que la solución $x(t)$ del lema tiene dominio $(0, \infty)$ y es de valores positivos. Además $M = e^{Rs}(1 - Q) > 0$, si $M < 1$, tenemos $M^k \to 0$ cuando $k \to \infty$, luego $x(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Esto ocurre si al fijar en M dos parámetros de tres, la tasa R o el tiempo entre cosechas s se achican o la extracción por unidad Q se agranda. Si $M = 1$, entonces la solución $x(t)$, $t_k < t \leq t_{k+1}$, algún $k = 0, 1, \ldots$, esta mayorada por

$$\frac{Kx_0e^{Rs}}{K + x_0(e^{Rs} - 1)k}$$

cota convergente a cero cuando $t \to \infty$, pues $k \to \infty$.

Si $M > 1$, tenemos el siguiente resultado

Lema 2 *Sea $M > 1$, si en el Lema 1, $x_0 = K\frac{M-1}{e^{Rs}-1}$ (un valor positivo), entonces $x(t)$, $t \in (0, \infty)$, es una función periódica de período s.*

Demostración: Si $t \in (0, \infty)$, entonces existe $k = 0, 1, \ldots$ tal que $t_k < t \leq t_{k+1}$. Notemos que $x(t)$ es igual a

$$\frac{K^2(\frac{M-1}{e^{Rs}-1})M^ke^{R(t-t_k)}}{K + K(\frac{M-1}{e^{Rs}-1})(e^{Rs} - 1)(M^k - 1)/(M - 1) + K(\frac{M-1}{e^{Rs}-1})M^k(e^{R(t-t_k)} - 1)}.$$

Al simplificar por K y amplificar por $e^{Rs}-1$ se logra

$$\frac{K(M-1)M^k e^{R(t-t_k)}}{(e^{Rs}-1)+(M-1)(e^{Rs}-1)(M^k-1)/(M-1)+(M-1)M^k(e^{R(t-t_k)}-1)}$$

expresión fácilmente reducible a

$$\frac{K(M-1)e^{R(t-t_k)}}{(e^{Rs}-1)+(M-1)(e^{R(t-t_k)}-1)}$$

y finalmente a $\frac{Ke^{R(t-t_k)}}{K/x_0+(e^{R(t-t_k)}-1)}$, desde donde es muy claro que $x(t+s)=x(t)$, pues $(t+s)-t_{k+1}=t-t_k$.

Designamos por $x_p(t)$, $t>0$, a la solución periódica dada por el lema 2, es decir,

$$x_p(t)=\frac{K}{(K/x_0^*-1)e^{-R(t-t_k)}+1}, \tag{5.7}$$

si $t_k<t\le t_{k+1},\ k=0,1,...,$ donde

$$x_0^*=K\frac{(1-Q)e^{Rs}-1}{e^{Rs}-1}. \tag{5.8}$$

Teorema 1 *Sea $M>1$, si $x(t)$ es la solución de (5.6) para algún $x_0>0$ cualquiera, entonces $|x(t)-x_p(t)|\to 0$ cuando $t\to\infty$.*

Demostración: Notemos que la expresión que llamamos B en la demostración del Lema 1 se puede expresar por $K+x_0(K/x_0^*)(M^k-1)$, luego para $t_k<t\le t_{k+1},\ k=0,1,...,$ $|x(t)-x_p(t)|$ es igual a

$$Ke^{R(t-t_k)}\left|\frac{x_0M^k}{B+x_0M^k(e^{R(t-t_k)}-1)}-\frac{1}{K/x_0^*+(e^{R(t-t_k)}-1)}\right|,$$

que es menor que

$$\frac{Ke^{Rs}}{B(K/x_0^*)}|x_0M^k(K/x_0^*+(e^{R(t-t_k)}-1))-K-x_0(K/x_0^*)(M^k-1)-x_0M^k(e^{R(t-t_k)}-1)|.$$

La expresión en valor absoluto se reduce a $(K/x_0^*)|x_0 - x_0^*|$, y entonces

$$|x(t) - x_p(t)| \leq \frac{e^{Rs}|x_0 - x_0^*|}{1 + (x_0/x_0^*)(M^k - 1)},$$

que tiende a cero cuando $t \to \infty$, pues $M^k \to \infty$.

Veamos un diagrama que muestra la convergencia de las soluciones a la solución periódica, figura 3.

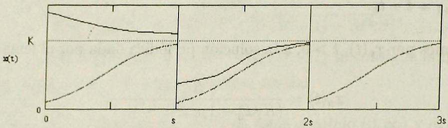

Figura 3

6 Análisis Económico

J.M. Conrad, ver (3), dice "Una función de producción define el máximo nivel de salidas (outputs) obtenibles desde un lote de entradas (inputs). Esta es la manera economicista de caracterizar la tecnología por la cual inputs producen outputs". En la cosecha de un recurso en específico se puede considerar que los outputs son medibles como el volumen de captura o cosecha, $y(t)$. Los inputs que el hombre utiliza en el proceso de cosecha lo asumiremos posibles de cuantificar en una única variable llamada "esfuerzo" y que denotamos $E(t)$. Si la captura por unidad de esfuerzo es proporcional al tamaño del recurso en dicho instante, entonces

$$\frac{y(t)}{E(t)} = qx(t), \tag{6.1}$$

q se llama, coeficiente de capturabilidad.

Para una trayectoria cualquiera $x(t)$ de la bíomasa, es decir, x dada por el Lema 1, la k-ésima captura $y(t_k)$, $k = 1, 2, ...$ está dada por

$$y(t_k) = x(t_k) - x(t_k^+) = Qx(t_k).$$

Bajo el supuesto (6.1), esto es $Q = qE(t)$, vemos que nuestro modelo considera un esfuerzo constante $E(t) = E$. Del Teorema 1 se concluye que $y(t_k)$ tiende a estabilizarse en el valor $Qx_p(t_k)$ igual a

$$\frac{qEK}{(K/x_0^* - 1)e^{-Rs} + 1}.$$

Este cuociente se puede modificar para tener

$$y := y(t_k) = \frac{qE}{1 - qE} x_0^*, \text{ para todo, } k = 1, 2, ...$$

Destaquemos que $x_0^* = x_0^*(E, s)$, pues q, R y K son constantes endógenas al sistema, en cambio E y s es factible considerarlas como parámetros de control que determinan un régimen de captura.

Supongamos, sin pérdida de generalidad para nuestros fines, $q = 1$. Tenemos que en un intervalo de longitud s de tiempo la captura estable es y, el problema que nos planteamos ahora es hallar la combinación de esfuerzo (E unidades) y frecuencia de cosecha (cada s unidades de tiempo) que maximiza una captura estable por unidad de tiempo, esto es optimizar la función

$$H(E, s) := \frac{y(E, s)}{s}, \tag{6.2}$$

en la región, $s > 0$, $0 < E < 1$ y $M = e^{Rs}(1 - E) > 1$, ver figura 4.

Notemos que

$$H(E, s) = \frac{EK}{s}\left(1 - \frac{E}{1 - E}\frac{1}{e^{Rs} - 1}\right)$$

para (s, E) en la región indicada.

Fijemos $s > 0$, ¿cuál es el esfuerzo que maximiza H para esta frecuencia $s > 0$?

La derivada parcial de H con respecto a E,

$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{K}{s}\left(1 - \frac{(2-E)E}{(1-E)^2(e^{Rs}-1)}\right),$$

se anula cuando $(2-E)E = (1-E)^2(e^{Rs}-1)$, lo que nos lleva a la ecuación cuadrática

$$E^2 e^{Rs} - E(2e^{Rs}) + (e^{Rs}-1) = 0,$$

que se soluciona en el intervalo $(0, 1-e^{-Rs})$ para

$$\tilde{E} = 1 - e^{-Rs/2}. \tag{6.3}$$

Al variar s en $(0,\infty)$, en la región indicada se genera una curva que para cada $s > 0$ indica el esfuerzo necesario para lograr una captura por unidad de tiempo estable óptima. Ver figura 4.

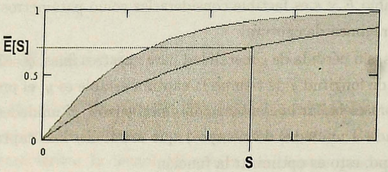

Figura 4

En efecto, dado $s > 0$, si $0 < E < \tilde{E}$, entonces $\frac{\partial H}{\partial E} > 0$; si $\tilde{E} < E < 1 - e^{-Rs}$, entonces $\frac{\partial H}{\partial E} < 0$. En otras palabras H tiene un máximo en $\tilde{E}$. El valor de dicho óptimo es

$$H(\tilde{E}) = \frac{KR}{2}\frac{1}{z}\frac{e^z - 1}{e^z + 1},$$

con $z = -\frac{Rs}{2}$.

Nos preguntamos por la existencia global de un óptimo, para ello estudiamos la derivada de $H(\tilde{E})$ como función de $s > 0$. Tenemos que

$$\dot{H}(z) = \frac{KR}{2}\frac{1+2ze^z - e^{2z}}{(e^z+1)^2} \text{ y } \dot{z}(s) = -\frac{R}{2}.$$

El signo de $\dot{H}(s) = \dot{H}(z)\dot{z}(s)$ para $s > 0$, depende del signo de $p(z) = 1 + 2ze^z - e^{2z}$ cuando $z < 0$. Notemos que $\dot{p}(z) = 2e^z q(z)$ con $q(z) = (1+z) - e^z$, pero $e^z > 1 + z$ para $z < 0$ con igualdad si $z = 0$, por lo tanto, $q(z) < 0$ para $z < 0$, así p es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$, como $p(0) = 0$, se tiene $p(z) > 0$ en $(-\infty, 0)$. Concluimos que $H(s)$ es estrictamente decreciente en $(0, \infty)$.

Rendimientos estables por unidad de tiempo más óptimos se logran aumentando la frecuencia $1/s$ de las capturas, pero ajustando (disminuyendo) el esfuerzo al valor $\tilde{E} = 1 - e^{-Rs/2}$ en cada una de ellas.

Referencias

1. **Bainov, D.D.**, *Systems with Impulse Effect, Stability, Theory and Aplications*, Ellis Horwood, 1989.

2. **Clark, C.W.**, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, New York: John Wiley and Sons. 386 pp., 1990.

3. **Conrad, J.M.**, *Bioeconomics and the Management of Renewable Resources*, Biomathematics, Vol. 17, Mathematical Ecology. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.

4. **Hannesson, R.**, *Bioeconomic Analysis of Fisheries*, Fishing New Boods, 138 pp., 1993.

5. **González, E. and Mena, J.**, *Análisis Cualitativo de un Modelo de Pesquerías de Acceso Abierto*, Investigaciones Marinas 22, pp. 3-11, 1994.

6. **Schaefer, M.B.**, *Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries*, Journal of the Fisheries Research Board of Canada 14: 669-681, 1957.

7. **Walters, C.J.**, *Adaptive Management of Renewable Resources*, Macmillan Publishing Company, 366 pp., 1986.