

Atractores globales para sistemas diferenciales no autónomos

Tomás Caraballo¹, Peter E. Kloeden², José A. Langa¹

¹Depto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla,
Apdo. de Correos 1160, 41080-Sevilla, Spain.

E-mails: caraball@cica.es ; langa@numer.us.es

²Fachbereich Mathematik, Johann Wolfgang Goethe Universität,

D-60054 Frankfurt am Main, Germany

E-mail: kloeden@math.uni-frankfurt.de

ABSTRACT

El concepto de atractor global se ha convertido en una herramienta muy útil para el estudio del comportamiento asintótico de las ecuaciones diferenciales autónomas durante las últimas tres décadas. Sin embargo, la correspondiente generalización al marco no autónomo ha sido realizada muy recientemente. En este trabajo vamos a describir las ideas básicas que han motivado la aparición de este concepto, prestando especial atención a la comparación con los resultados clásicos de la teoría de atractores para sistemas dinámicos autónomos. En particular, explicaremos cómo puede justificarse que el atractor *pullback* (o no autónomo) es una buena generalización del concepto análogo del caso autónomo, y resaltaremos algunas de sus propiedades. Algunos ejemplos y gráficas ilustrarán nuestro trabajo.

1 Introducción: modelos de sistemas diferenciales

Es bien conocido que las Matemáticas vienen siendo utilizadas como una herramienta muy potente en el estudio de múltiples fenómenos naturales que aparecen en diversas ramas de la Ciencia durante los últimos cientos de años. En los dos últimos siglos, y más concretamente en el último de ellos, hemos asistido a un espectacular desarrollo de uno de los principales campos dentro de las Matemáticas para describir el comportamiento de fenómenos reales: la Teoría de los Sistemas Diferenciales. Hoy día, se cuentan por cientos de miles los trabajos de investigación sobre este tema, en los cuales se ven también involucrados cientos de publicaciones internacionales y miles de investigadores.

Supongamos que tenemos un sistema diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

que representa, algunas veces en una forma simplificada, algún fenómeno real. La primera condición que hemos de asumir es que se verifique unicidad de soluciones para el sistema (1), pues en caso contrario tendríamos que comenzar a pensar si nuestro modelo es sensato o no. Uno de los principales objetivos para construir un modelo es el poder predecir el comportamiento del fenómeno, es decir, confiamos en que con nuestro sistema de ecuaciones seremos capaces de conocer la estructura básica del fenómeno, de manera que podremos conocer sobre su dinámica simplemente resolviendo el sistema. Más aún, en muchas situaciones no estaremos interesados en el futuro inmediato, sino en todo el futuro del sistema. En este último caso estudiaremos el comportamiento asintótico del sistema cuando el tiempo t crece hacia $+\infty$. Notemos la potencia e interés de esta idea: si el modelo es *correcto* y si tenemos herramientas apropiadas para el análisis asintótico del sistema, podríamos ir desde las Matemáticas hasta el futuro real del fenómeno.

A título de ejemplo, consideremos el sistema clásico de tipo Lotka-Volterra para las especies (u, v)

$$\begin{cases} \dot{u} = u(\lambda - au - bv) \\ \dot{v} = v(\mu - cv - du) \end{cases} \quad (2)$$

donde $a, b, c, d > 0$. El par $(u(t), v(t))$ representa la densidad de dos especies biológicas en un cierto hábitat. Los términos $\lambda u, \mu v$ hacen referencia al crecimiento positivo (exponencial) de las especies, que es roto por el proceso de competición intrínseco entre las mismas especies (términos $-au^2$ para la primera de ellas y $-cv^2$ para la segunda) y por la competición entre ambas (términos $-buv, -duv$ respectivamente). Por lo tanto, la resolución de este problema va a proporcionarnos información sobre la dinámica de las dos especies. Por supuesto, este ejemplo podría extenderse para cubrir el caso de N especies. El estudio del comportamiento asintótico de este sistema dependiente de los parámetros introducidos se lleva a cabo para predecir las futuras situaciones de las especies en competición y, en estos momentos, se puede entender casi totalmente (cf., por ejemplo, Murray [22]).

Observemos que nos interesamos por la evolución en el tiempo de las soluciones de nuestro problema. En concreto, nos interesa el comportamiento límite de éstas. El concepto de *atractor global* se ha convertido en una de las herramientas básicas para esta clase de análisis durante las últimas tres

décadas. *Grosso modo*, un atractor es un conjunto compacto hacia el que todas las soluciones del sistema se aproximan cuando el tiempo se hace grande.

No obstante, importantes cambios se producen en la dinámica cuando aparecen en las ecuaciones del modelo algunos términos con dependencia explícita del tiempo. En efecto, si consideramos por ejemplo

$$\begin{cases} \dot{u} = u(\lambda - a(t)u - bv) \\ \dot{v} = v(\mu - cv - du), \end{cases} \quad (3)$$

con $a(t) \in C^0(\mathbb{R})$, notemos que cuando movemos el tiempo en las soluciones, estamos cambiando también la influencia del coeficiente de competición intrínseco $a(t)$ sobre la especie representada por u , la cual se encuentra también acoplada con la otra especie v . Si deseamos utilizar los resultados conocidos sobre (2) en el estudio de (3), habríamos de considerar una familia de problemas como (2) con distintos coeficientes a para cada instante de tiempo, haciendo el estudio considerablemente más complejo en algunos casos (cf. Chepyzhov & Vishik [7] o Kloeden & Schmalfuss [15]).

En este trabajo describiremos el concepto de atractor *no autónomo* o *pullback* y algunas de sus propiedades. Trataremos de explicar las razones que justifican el que este concepto se haya convertido en una de las herramientas básicas para el estudio del comportamiento asintótico de los sistemas diferenciales no autónomos. Nuestra intención es, al mismo tiempo, motivar y explicar las ideas que hacen de este concepto algo sensato comparándolo con la teoría clásica de atractores globales que esquematizaremos en la Sección 2. Matemáticamente, no profundizaremos demasiado, sino que hemos preferido escoger algunos ejemplos simples y algunas ilustraciones para explicar las principales ideas. En la Sección 3 introduciremos el concepto de sistema dinámico para ecuaciones diferenciales no autónomas. El concepto de atractor no autónomo y sus propiedades los describiremos en la Sección 4. Finalmente, algunos comentarios y conclusiones se incluyen en la última Sección.

2 Atractores de sistemas dinámicos

2.1 El concepto de atractor global

En muchas situaciones reales suele tener lugar algún tipo de disipación de, por ejemplo, energía, cuando el tiempo pasa. Esto, entre otras cosas, implica que el valor de ciertas variables no puede hacerse tan grande como se quiera, es decir, no pueden explotar en tiempo finito. En otras palabras, y de forma matemática, se puede decir que existe una cota superior para la solución del

sistema, uniformemente en tiempo, para valores grandes de t . El concepto matemático de disipación está íntimamente unido al concepto de *absorción*:

Definición 1 Se dice que un conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$ es absorbente para el problema (1) si, dado cualquier otro conjunto acotado $D \subset \mathbb{R}^n$, existe un tiempo $T(D)$ (que puede depender del conjunto D) tal que

$$x(t; x_0) \in B, \text{ para todo } t \geq T(D), \text{ y todo } x_0 \in D,$$

donde $x(t; x_0)$ denota la solución de (1) que pasa por x_0 en el instante $t = 0$.

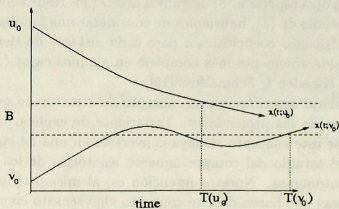


Figura 1: Conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}$ que absorbe soluciones del sistema (1) que comienzan en u_0, v_0

En la Figura 1 representamos la idea de la existencia de un conjunto absorbente. Notemos que si la función $x(\cdot)$ es continua, podemos obtener acotación uniforme para todos los instantes $t \in \mathbb{R}^+$, uniformemente en cada acotado de \mathbb{R}^n . Además, debemos resaltar la importancia de esta propiedad, ya que confina todo el comportamiento relevante del sistema al que tiene lugar dentro de un conjunto acotado fijo B , puesto que el tiempo de transición hasta $T(D)$ puede considerarse como no muy interesante para el estudio de todo el futuro del sistema. De esta forma, los sistemas disipativos admiten una simplificación crucial en su comportamiento asintótico. Pero, por otra parte, todavía disponemos de poca información sobre la dinámica del fenómeno, pues dentro del conjunto B ésta puede ser todavía bastante irregular e incluso caótica. En

efecto, existen algunos modelos muy simples que muestran una dinámica muy rica y compleja (cf. Glendinning [10]), incluyendo comportamientos caóticos, es decir, una muy sensible dependencia de las condiciones iniciales que hacen la predicción del futuro casi imposible.

Hace ya más de treinta años se introdujo el concepto de atractor global, proporcionando algo más de luz a estos problemas. Un atractor global \mathcal{A} es un conjunto compacto que se encuentra dentro del conjunto absorbente B , en general, mucho más pequeño que B , y que describe el comportamiento asintótico de las soluciones de una manera mucho más precisa.

Definición 2 Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ es el atractor global asociado al sistema (1) si satisface las siguientes condiciones:

i) \mathcal{A} es compacto

ii) $x(t; \mathcal{A}) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $x(t; \mathcal{A}) = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} x(t; a)$.

iii)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t; D), \mathcal{A}) = 0, \text{ para todo acotado } D \subset \mathbb{R}^n,$$

donde 'dist' denota la semidistancia de Hausdorff en \mathbb{R}^n definida para $C, K \subset \mathbb{R}^n$, como

$$\text{dist}(C, D) = \sup_{c \in C} \inf_{k \in K} |c - k|.$$

Nota 3 Observemos que esta semidistancia se puede definir en un espacio métrico (X, d) de forma análoga, i.e. $\text{dist}(C, D) = \sup_{c \in C} \inf_{k \in K} d(c, k)$.

Analicemos brevemente las tres propiedades de la definición de atractor global. El apartado i) significa que el atractor es completo, esto es, podemos extraer subsucesiones convergentes de cada sucesión en \mathcal{A} . Esto es realmente fuerte e interesante cuando \mathcal{A} es un subconjunto de un espacio de dimensión infinita (cf. Temam [27], Hale [12]). La propiedad iii) significa que todo el comportamiento asintótico del sistema tiene lugar cerca de \mathcal{A} , y no sólo dentro de B como en la propiedad de absorción. Finalmente, la propiedad ii) es determinante ya que dice que toda la dinámica sobre el atractor \mathcal{A} es invariante, i.e. \mathcal{A} trabaja como un objeto dinámico independiente.

Todas estas ideas son más comúnmente escritas dentro del marco de los sistemas dinámicos (cf. entre otros, Hale [12], Temam [27], Guckenheimer & Holmes [11], Babin & Vishik [2]):

Definición 4 Se dice que la aplicación $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un sistema dinámico si se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $S(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua para todo $t \in \mathbb{R}^+$.
- ii) $S(0)x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- iii) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, para todos $t, s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Resulta obvio que si definimos $S(t)x_0 = x(t; x_0)$, entonces S es un sistema dinámico asociado a (1). Notemos que los conceptos de invarianza, absorción y atracción se pueden escribir fácilmente en términos del sistema dinámico S . A título de ejemplo, la propiedad iii) de la definición de atractor global se convierte en

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)D, \mathcal{A}) = 0, \text{ para todo acotado } D \subset \mathbb{R}^n \text{ y } S(t)D = \bigcup_{d \in D} S(t)d.$$

2.2 Estructura del atractor y dinámica en él

De la definición de atractor global resulta claro que todo el comportamiento asintótico del sistema se produce cerca de este conjunto. Pero esta dinámica puede llegar a ser extremadamente compleja, incluso totalmente caótica. Así, toda la información sobre la estructura geométrica de los atractores llega a ser crucial junto con las propiedades de estabilidad e inestabilidad de subconjuntos especiales del mismo.

Consideremos el problema (2) en ausencia de una de las especies, por ejemplo, $v \equiv 0$. De esta manera, el modelo para la componente u queda descrito por la ecuación *logística*

$$\dot{u} = \lambda u - au^2. \quad (4)$$

Observemos que, si fijamos un dato inicial $u(0) = u_0$, la ecuación puede resolverse de forma explícita y podemos conocer su única solución

$$u(t; u_0) = \frac{e^{\lambda t}}{\frac{1}{u_0} - \frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} e^{\lambda t}},$$

que está siempre bien definida para valores grandes de t . Así, cuando $\lambda < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t; u_0) = 0$, mientras que para $\lambda > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t; u_0) = \lambda/a$. Notemos que las funciones $\{0\}$ y $\{\lambda/a\}$ son soluciones de (4) y determinan el comportamiento límite del sistema; además son también invariantes respecto

del correspondiente semigrupo $S(t)u_0 = u(t; u_0)$, es decir, $S(t)0 = 0$, $S(t)\frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a}$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Por otra parte, observemos el importante cambio que se produce en la dinámica cuando el valor del parámetro λ cruza el valor $\lambda = 0$. Para valores negativos de λ , el atractor global es el conjunto $\{0\}$, y se verifica que es globalmente asintóticamente estable; para valores positivos de λ , $\{0\}$ pierde su propiedad de estabilidad y es ahora la solución λ/a la que pasa a ser un conjunto invariante y globalmente asintóticamente estable, con lo que el atractor es ahora el intervalo $[0, \lambda/a]$. Esto se suele conocer en la literatura como *bifurcación transcritical* (cf. por ejemplo, Glendinning [10]) y se encuentra esquematizada en la Figura 2.

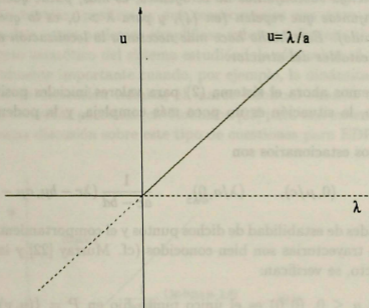


Figura 2: Bifurcación transcritical en $\lambda = 0$. La estabilidad global asintótica de la solución nula es transferida al punto estacionario $\{\lambda/a\}$.

En este ejemplo aparecen algunos de los conceptos básicos para el estudio de la estructura de los atractores.

Definición 5 Se dice que el punto $z_0 \in \mathbb{R}^n$ es estacionario (o fijo) para la ecuación (1) si, para todo $t \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$x(t; z_0) = z_0.$$

Definición 6 Sea $J \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto estrictamente invariante para el semigrupo S asociado al sistema (1). Se dice que J es globalmente atrayente si, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t)x_0, J) = 0.$$

Diremos que es globalmente asintóticamente estable si es globalmente atrayente y estable.

Nota 7 Resaltemos que todo conjunto acotado y estrictamente invariante ha de ser subconjunto del atractor global. Sin embargo, no todo conjunto invariante tiene que ser asintóticamente atrayente. En realidad, es posible que el atractor contenga subconjuntos no atrayentes; es más, puede que incluso contenga subconjuntos que repelen (en (4)), y para $\lambda > 0$, es lo que ocurre con la solución nula). Este hecho hace más necesaria la localización de las partes estables e inestables del atractor.

Consideremos ahora el sistema (2) para valores iniciales positivos u_0, v_0 . En este caso, la situación es un poco más compleja, y la podemos resumir como sigue:

Los puntos estacionarios son

$$(0, 0), \quad (0, \mu/c), \quad (\lambda/a, 0), \quad \frac{1}{ac - bd} (\lambda c - b\mu, a\mu - \lambda d).$$

Las propiedades de estabilidad de dichos puntos y el comportamiento asintótico global de las trayectorias son bien conocidos (cf. Murray [22] y la Figura 3). A este respecto, se verifican:

- i) Para $\lambda, \mu \leq 0$, $(0, 0)$ es el único punto fijo en $P = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } u, v \geq 0\}$, y además es globalmente asintóticamente estable.
- ii) Para $\lambda < 0, \mu > 0$, $(0, 0)$ se convierte en inestable y el otro punto fijo en P , $(0, \mu/c)$ es globalmente asintóticamente estable.
- iii) Para $\lambda > 0, \mu \leq 0$, $(0, 0)$ se convierte en inestable y el otro punto fijo en P , $(\lambda/a, 0)$ es globalmente asintóticamente estable.
- iv) Para $\lambda > 0, \mu > 0$, se tienen diversas posibilidades. Supongamos que $ac - bd > 0$, entonces:
 - Para $\frac{c}{b}\lambda < \mu$, $(0, 0)$ y $(\lambda/a, 0)$ son inestables y $(0, \mu/c)$ es globalmente asintóticamente estable.

- Para $\frac{d}{a}\lambda > \mu$, $(0, 0)$ y $(0, \mu/c)$ son inestables y $(\lambda/a, 0)$ es globalmente asintóticamente estable.

v) Para

$$\frac{d\lambda}{a} < \mu < \frac{c\lambda}{b}, \quad (5)$$

existe un cuarto punto fijo positivo en P , $\frac{1}{ac-bd}(\lambda c - b\mu, a\mu - \lambda d)$, que es globalmente asintóticamente estable cuando los datos iniciales se toman en $\text{int}(P)$.

Por otra parte, de la propiedad de invarianza del atractor, éste posee su propia dinámica, es decir, podemos definir con éxito el sistema dinámico sobre el atractor $S_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. ¿Existirá alguna relación entre S y $S_{\mathcal{A}}$? La respuesta es, como cabe esperar, positiva, y sus consecuencias son muy importantes ya que en muchos casos podemos simplificar substancialmente el análisis del comportamiento asintótico del sistema estudiándolo sólo sobre \mathcal{A} . Este hecho llega a ser realmente importante cuando, por ejemplo, la dinámica evoluciona en un espacio de dimensión infinita, el marco habitual cuando uno estudia ecuaciones en derivadas parciales (cf. Robinson [23] para una extensa, rigurosa y a la vez amena discusión sobre este tipo de cuestiones para EDPs).

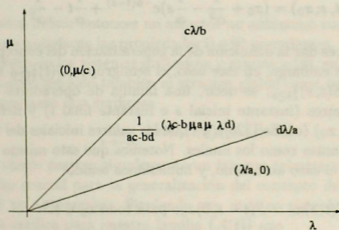


Figura 3: Comportamiento asintótico global del problema (2) dependiente de los parámetros λ y μ . Para $\lambda, \mu > 0$ se obtienen tres regiones diferentes para este comportamiento; hemos escrito los puntos fijos asintóticamente estables en cada una de estas regiones.

3 Ecuaciones diferenciales no autónomas

3.1 El concepto de sistema dinámico

Antes de comenzar con las definiciones de todos los conceptos propios de las situaciones no autónomas, vamos a describir un ejemplo muy sencillo que nos va a servir para motivar el concepto de atractor no autónomo para ecuaciones diferenciales no autónomas del tipo

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)). \quad (6)$$

Ejemplo: una ecuación diferencial no autónoma

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + t \\ x(s) = x_0, \end{cases} \quad (7)$$

donde $\alpha, x_0 \in \mathbb{R}$.

Es inmediato resolver dicho problema de valores iniciales y comprobar que su única solución viene dada por la expresión

$$x(t, s; x_0) = \left(x_0 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} s\right) e^{-\alpha(t-s)} + \frac{1}{\alpha} t - \frac{1}{\alpha^2}. \quad (8)$$

Podríamos entonces dar la definición de la generalización del concepto de sistema dinámico. Sin embargo, en este caso, el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se convierte en un *proceso* $\{S(t, s)\}_{t \geq s}$, es decir, una familia de operadores dependiente de dos parámetros (instante inicial s e instante final t) y definida como $S(t, s)x_0 = x(t, s; x_0)$ (cf. Sell [26]), ya que los valores iniciales del tiempo son ahora tan importantes como los finales. Notemos que esto mismo podríamos haberlo hecho en el caso autónomo, y hubiésemos tenido

$$S(t, s)x_0 = S(t - s, 0)x_0, \text{ para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

Si ahora hacemos tender t hacia $+\infty$ en (8), la solución, que existe para todo $t \in \mathbb{R}$, se va también hacia $+\infty$; es decir, no existen conjuntos absorbentes acotados para este problema. Así, aunque la presencia del término $-\alpha x(t)$ proporciona cierta disipatividad al sistema, la teoría clásica de atractores no proporciona ninguna información de cómo este hecho influye en el comportamiento asintótico del sistema. No obstante, el efecto disipativo puede ser observado de alguna manera. En efecto, si efectuamos la diferencia entre dos

soluciones $x(t), y(t)$ de la ecuación correspondiente a diferentes datos iniciales x_0, y_0 , se verifica que

$$\frac{d}{dt}(x(t) - y(t)) = -\alpha(x(t) - y(t)),$$

y por tanto

$$x(t) - y(t) = e^{-\alpha(t-s)}(x_0 - y_0).$$

Esto pone de manifiesto que, aunque las soluciones se van a $+\infty$, en realidad *crecen juntas* en cierto sentido, de manera que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

Volviendo de nuevo a (8), podemos observar el efecto disipativo producido por el primer término de la ecuación y la perturbación producida por el término no autónomo de (7). Consideremos ahora la familia de conjuntos dependientes del tiempo

$$\left\{ \mathcal{A}(t) = \frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha^2} \right\}_{t \geq 0}$$

Entonces, se verifica fácilmente que

$$i) \quad x(t, s; \mathcal{A}(s)) = \mathcal{A}(t)$$

ii)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t, s; x_0), \mathcal{A}(t)) = 0 \quad (\text{atracción hacia delante}). \quad (10)$$

Podríamos definir entonces un atractor no autónomo como una familia de conjuntos que satisfacen las propiedades i) y ii) precedentes. Notemos que, con la terminología de los sistemas dinámicos y gracias a (9), en el caso autónomo se podría haber definido también el atractor global como un compacto estrictamente invariante que verificase

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)x_0, \mathcal{A}) = 0.$$

Esto, que puede parecer simplemente un truco a primera vista, se convertirá en un hecho crucial para la generalización del concepto de atractor para las ecuaciones no autónomas. Siguiendo con nuestro ejemplo, observemos que también se verifica para nuestra familia $\{\mathcal{A}(t)\}$ que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, s)x_0, \mathcal{A}(t)) = 0. \quad (11)$$

La atracción en (11) está definida respecto al instante inicial, con la ventaja de que podemos fijar el tiempo final t , de manera que $\mathcal{A}(t)$ es un conjunto atrayente fijado de antemano. El punto i) precedente y (11) nos van a conducir al concepto de atractor global para ecuaciones no autónomas. Merece la pena resaltar que (10) y (11) no son equivalentes en general (cf. Cheban et al. [5]).

3.2 Atractores no autónomos o “pullback”

Ahora vamos a introducir el conjunto de definiciones principales de la teoría de atractores para sistemas no autónomos. Aunque escogeremos un marco general para ello, se puede observar que dichos conceptos se corresponden con los aparecidos en el ejemplo precedente.

Sea (H, d) un espacio métrico completo y sea $\{S(t, s)\}_{t \geq s}$, $t, s \in \mathbb{R}$ una familia de aplicaciones que verifican:

- i) $S(t, s)S(s, \tau)u = S(t, \tau)u$, para todos $\tau \leq s \leq t$, $u \in H$,
- ii) $S(t, \tau)$ es continua en H , para todo $\tau \leq t$.

En general, interpretaremos $S(t, \tau)u$ como el valor de la solución de un sistema no autónomo en el instante t que estaba en u en el instante inicial τ .

Definición 8 Dado el instante $t \in \mathbb{R}$, se dice que $K(t) \subset H$ es atrayente en el tiempo t si para cada conjunto acotado $D \subset H$ se verifica que

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, \tau)D, K(t)) = 0.$$

Una familia $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es atrayente si $K(t)$ lo es en tiempo t , para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nota 9 En el concepto anterior se considera un instante de tiempo final fijado y se hace mover el instante inicial hacia $-\infty$. Notemos que esto no significa que nos estamos moviendo hacia atrás en el tiempo, sino que consideramos el estado del sistema en el instante t que había empezado en instantes iniciales τ cada vez más lejanos, i.e. $\tau \rightarrow -\infty$. Esto se suele llamar en la literatura atracción desde atrás (del inglés “pullback”)(cf. [17], [5] y la Figura 4).

Definición 10 Dado $t \in \mathbb{R}$, se dice que el conjunto $B(t) \subset H$ es absorbente en el tiempo t si para cada acotado $D \subset H$ existe un tiempo $T = T(t, D) \in \mathbb{R}$ tal que

$$S(t, \tau)D \subset B(t), \text{ para todo } \tau \leq T.$$

Una familia $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ se llama absorbente si cada $B(t)$ es absorbente en tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Observemos que cada conjunto absorbente en tiempo t es atrayente.

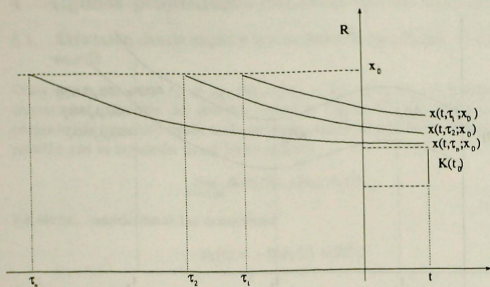


Figura 4: Atracción "pullback" hacia el conjunto $K(t_0)$ de las trayectorias que comienzan en el punto x_0 en una sucesión de instantes iniciales $\{\tau_n\}$ que tiende a $-\infty$.

Definición 11 Sea $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de subconjuntos de H . Se dice que dicha familia es invariante respecto del proceso S si para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$S(t, \tau)B(\tau) = B(t), \text{ para todo } \tau \leq t.$$

Esta propiedad es una generalización de la propiedad de invarianza clásica de semigrupos (cf. Temam [27]). En la Figura 5 podemos comparar la propiedad de invarianza para semigrupos $S(t)$ y procesos $S(t, s)$.

Definición 12 Sea $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ una familia de conjuntos compactos. Se dice que es el atractor no autónomo o pullback asociado al proceso S si además es invariante, atrae a todos los conjuntos acotados $D \subset H$, en todo tiempo $t \in \mathbb{R}$, y es minimal en el sentido de que si existe otra familia de conjuntos cerrados y atrayentes de los acotados de H , $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, entonces $\mathcal{A}(t) \subseteq C(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

El resultado general que garantiza la existencia de atractor pullback es una generalización del que se conoce para los sistemas dinámicos autónomos (cf. Temam [27] y Hale [12]):

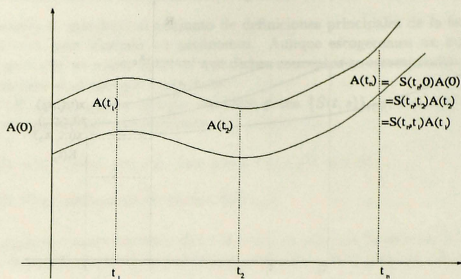


Figura 5: Propiedad de invarianza del atractor pullback $\mathcal{A}(t)$.

Teorema 13 (Schmalfluss [25], Crauel et al. [9]) *Supongamos que existe una familia de conjuntos compactos y absorbentes para el proceso S . Entonces, existe el atractor no autónomo $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ asociado a S .*

Nota 14 *Toda la teoría de atractores no autónomos puede ser reescrita en el marco de los cociclos: una generalización alternativa de la propiedad de semigrupo involucra el uso de aplicaciones cociclos (cf. [13], [14], [17], [5]). Aunque podríamos haber seguido esta notación en el presente trabajo, hemos creído más conveniente no hacerlo en una primera aproximación a esta teoría. En cualquier caso, existen situaciones tales como aquellas en las que aparecen términos no autónomos periódicos, casi periódicos o acotados (cf. Sell [26], Chepyzhov & Vishik [7], Kloeden & Stoniier [17]) o el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas (cf. Arnold [1], Schmalfluss [24], Crauel & Flandoli [8]) en las que el concepto de sistema dinámico cociclo viene a ser el marco apropiado para trabajar.*

4 Algunas propiedades del atractor no autónomo

4.1 Atracción desde atrás y hacia delante (pullback versus forward)

Observemos que para $s_1 \neq s_2$, $S(t, s_1)u_0$ y $S(t, s_2)u_0$ se corresponden con trayectorias diferentes del sistema (véase la Figura 4). De esta manera, la propiedad de atracción desde atrás no posee, al menos a primera vista, ninguna relación con la atracción usual hacia delante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S(t, s)u_0, \mathcal{A}(t)).$$

En efecto, consideremos las ecuaciones

$$\dot{x}_1(t) = -2tx_1(t) + 2t^2$$

y

$$\dot{x}_2(t) = 2tx_2(t) + 2t^2,$$

las cuales se pueden resolver de forma explícita y se pueden calcular sus respectivos atractores

$$\mathcal{A}(t) = t - e^{-t^2} \int_0^t e^{r^2} dr, \quad t > 0,$$

y

$$\mathcal{A}(t) = -t + e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-r^2} dr, \quad t \in \mathbb{R},$$

teniendo el primero la propiedad de atracción hacia delante (forward) pero no desde atrás (pullback) y desde atrás pero no hacia delante el segundo.

Sin embargo, siempre se puede decir algo más sobre esta relación. Supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 13, es decir, que existe una familia de conjuntos compactos y absorbentes $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, de manera que tenemos asegurada la existencia del atractor no autónomo $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que satisface, en particular, que dado $u_0 \in H$,

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, \tau)u_0, \mathcal{A}(t)) = 0. \quad (12)$$

Definición 15 Dado $u_0 \in H$, se llama *órbita desde atrás* (o *pullback*) del punto u_0 en el instante $t \in \mathbb{R}$ al conjunto $\beta_t(u_0) \subset H$ definido como

$$\beta_t(u_0) = \bigcup_{\tau \leq t} S(t, \tau)u_0.$$

Así, $\mathcal{A}(t)$ está relacionado con el comportamiento asintótico de las órbitas de tipo pullback. En [19] se puede encontrar un resultado que muestra cómo la dinámica sobre el atractor no autónomo $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ determina este comportamiento asintótico de tipo pullback.

Proposición 16 *Supongamos que el proceso $S(t, s)$ verifica que existe $L > 0$ tal que para todos $u_1, u_2 \in H$ y $t, s \in \mathbb{R}$,*

$$d(S(t, s)u_1, S(t, s)u_2) \leq \exp(L(t - s))d(u_1, u_2).$$

Sea $u_0 \in H$, y consideremos sucesiones de términos positivos $\{\varepsilon_n\}$, $\{T_n\}$, con $\varepsilon_n \searrow 0$ y $T_{n+1} - T_n \nearrow +\infty$. Entonces, existe $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $v_n \in \mathcal{A}(T_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente, tal que,

$$\sup_{s \leq T_n; 0 \leq t \leq T_{n+1} - T_n} d(S(T_n + t, s)u_0, S(T_n + t, T_n)v_n) \leq \varepsilon_n.$$

Además, los 'saltos' entre trayectorias consecutivas sobre el atractor verifican

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(S(T_{n+1}, T_n)v_n, v_{n+1}) = 0. \quad (13)$$

Hagamos notar que aunque sea en algún sentido débil, este resultado es posiblemente el mejor que se pueda probar en una situación general sobre la relación existente entre el comportamiento asintótico desde atrás y hacia delante. Por otra parte, pone de manifiesto que la dinámica sobre el atractor no autónomo tiene relación con la misma en todo el espacio de fases. Además, bajo algunas condiciones adicionales, se pueden mostrar algunos resultados sobre la relación existente entre la atracción desde atrás y hacia delante (cf. Cheban et al. [5]). En particular, no es difícil deducir la equivalencia entre los dos conceptos cuando se conoce la existencia de convergencia uniforme con respecto al tiempo inicial, esto es, si se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} \text{dist}(S(t, s)x_0, \mathcal{A}(t)) = 0, \text{ para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

4.2 Semicontinuidad superior de los atractores

Semicontinuidad superior hacia el atractor global

Como ya hemos mencionado anteriormente, el concepto de atractor no autónomo o pullback presenta importantes diferencias con el de atractor global del caso autónomo, tanto en lo que se refiere a la propiedad de invarianza como a la de atracción. De modo que uno de los primeros puntos que parece necesario analizar es qué relación existe entre ambos conceptos.

Supongamos, por tanto, que tenemos un sistema dinámico determinista $S : \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$, y que lo perturbamos con un término no autónomo dependiente de un pequeño parámetro $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, de manera que obtenemos un sistema dinámico no autónomo

$$S_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times H \rightarrow H,$$

y tal que, para todos $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$S_\varepsilon(t, s)x \rightarrow S(t)x \quad \text{cuando } \varepsilon \searrow 0 \quad (\text{h1})$$

uniformemente en conjuntos acotados de H . Entonces, se puede demostrar el siguiente resultado (cf. [3],[4]; véase también [17] para resultados similares).

Teorema 17 *Supongamos que se verifica la hipótesis (h1) y que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ existe un atractor pullback $\mathcal{A}_\varepsilon(t) \subset K_\varepsilon(t)$, donde $K_\varepsilon(t)$ denota un compacto absorbente para S_ε , y que existe un compacto $K \subset H$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{dist}(K_\varepsilon(t), K) = 0. \quad (\text{h2})$$

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Nota 18 *Notemos que las propiedades (h1) y (h2) son sensatas si consideramos que S_ε es una perturbación de S . Por otra parte, este resultado viene a reforzar el concepto de atractor no autónomo en el sentido de que lo hace aparecer como una generalización propia del concepto clásico de atractor global, es decir, en el límite estamos recuperando los conceptos de la teoría clásica.*

Esquemas numéricos

Existe una situación importante en la que el atractor pullback aparece como el objeto natural con el que trabajar. Nos estamos refiriendo al problema de diseñar un método numérico de aproximación del sistema (6) con tiempo de discretización variable. En efecto, en este caso la aproximación numérica es un sistema dinámico discreto pero no autónomo. Supongamos que deseamos aproximar el atractor global de un sistema dinámico continuo usando un esquema de discretización con tiempo de discretización variable del tipo

$$x_{n+1} = x_n + h_n f(h_n, x_n), \quad (14)$$

con proceso discreto asociado $S^\rho(n, h) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $h \in H^\rho = \{l = (l_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ con } \frac{1}{2}\rho \leq l_n \leq \rho \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, necesitaremos

algunos resultados sobre continuidad del atractor no autónomo asociado a (14) y el atractor global de la ecuación diferencial (1). Este análisis ha sido ya realizado en [15] y [16] bajo ciertas condiciones adecuadas.

Teorema 19 *Supongamos que las primeras $p + 1$ derivadas de la función F del sistema (1) son uniformemente acotadas en \mathbb{R}^n y que (1) posee un atractor global A . Entonces, existe $\rho^* > 0$ tal que para todo $0 < \rho < \rho^*$ existe una familia de atractores pullback uniformemente acotados $\{\mathcal{A}^\rho(h), h \in H^\rho\}$ asociados a $S^\rho(n, h)$ y verificando que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \text{dist}(\mathcal{A}^\rho, A) = 0,$$

donde $\mathcal{A}^\rho = \bigcup_{h \in H^\rho} \mathcal{A}^\rho(h)$.

Por otra parte, existen también algunos otros resultados que permiten aproximar el atractor no autónomo asociado a una ecuación diferencial haciendo uso del atractor pullback de ciertos esquemas numéricos (cf. Cheban et al. [6]).

Funciones de Lyapunov.

Es bien conocido que las funciones de Lyapunov juegan un papel muy importante en el estudio de las propiedades de estabilidad de los sistemas dinámicos. Resultados inversos asegurando la existencia de funciones de Lyapunov que caracterizan un tipo particular de estabilidad, como la estabilidad asintótica uniforme del atractor, son de especial interés tanto desde un punto de vista teórico como numérico. En particular, el punto clave en el último Teorema enunciado es la existencia de una función de Lyapunov para (1), que es utilizada para construir un conjunto absorbente para los esquemas numéricos (cf. [14], [15]).

4.3 Algunas cuestiones sobre la estructura de los atractores pullback y los fenómenos de bifurcación

4.3.1 El concepto de bifurcación en los sistemas no autónomos

Como en el caso autónomo, una bifurcación puede ser definida como un cambio en la estabilidad y la estructura de los conjuntos invariantes del sistema. Esto cubre multitud de casos, y la idea ha sido utilizada para generalizar algunos de los bien conocidos y clásicos ejemplos sobre bifurcación (fenómenos de bifurcación en las inmediaciones del origen, bifurcación de tipo tenedor o 'pitchfork', bifurcación basada en la linealización del sistema en las proximidades del cero,

aparición de atractores no triviales desde la solución estacionaria nula, bifurcación de tipo punto de silla o 'saddle-node', etc y que pueden consultarse en [20]).

4.3.2 Una bifurcación transcítica no autónoma

Analizaremos en esta sección una versión no autónoma de (4) que ha sido también analizada con un término cúbico en los trabajos [3] y [20]). Consideremos la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - a(t)x^2 \\ x(s) = x_0, \end{cases} \quad (15)$$

con $0 < a(t) \leq A$, $a(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Haciendo la sustitución $y(t) = x^{-1}(t)$, esta ecuación puede resolverse de forma explícita: si por ejemplo $x_0 > 0$, entonces

$$x(t, s; x_0) = \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s} x_0^{-1} + \int_s^t e^{\lambda r} a(r) dr}. \quad (16)$$

Para $\lambda < 0$ podemos definir el atractor global en el caso autónomo: cuando t tiende a $+\infty$ todas las soluciones son atraídas hacia el punto estacionario $\{0\}$. El atractor pullback es, por tanto, el conjunto $\{0\}$, ya que es el límite de (16) cuando s tiende hacia $-\infty$. Por otra parte, cuando $\lambda > 0$, todas las soluciones son no acotadas cuando $t \rightarrow \infty$ si se verifica que $a(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. No obstante, podemos siempre definir el atractor pullback: en efecto, tomando límites cuando $s \rightarrow -\infty$ en (16) se obtiene

$$\alpha_\lambda(t; a) = \frac{e^{\lambda t}}{\int_{-\infty}^t e^{\lambda \tau} a(\tau) d\tau}, \quad (17)$$

y de aquí es fácil comprobar que $\alpha_\lambda(\cdot; a)$ es una trayectoria completa de (15), es decir, $x(t, s; \alpha_\lambda(s; a)) = \alpha_\lambda(t; a)$, para todo $t \geq s$.

La construcción de $\alpha_\lambda(t; a)$ garantiza que es atrayente. Entonces se tiene

Proposición 20 *Para $\lambda < 0$ el origen es globalmente asintóticamente estable, mientras que cuando $\lambda > 0$ el origen se convierte en asintóticamente inestable y aparece una nueva trayectoria completa $\alpha_\lambda(t; a)$ que es localmente asintóticamente estable y viene dada por la expresión (17).*

Este resultado lo podemos reformular en términos de atractores (de hecho, esta misma ecuación pero con un término cúbico es tratada en este sentido en el trabajo [3]): para $\lambda < 0$, el atractor no autónomo es simplemente el origen,

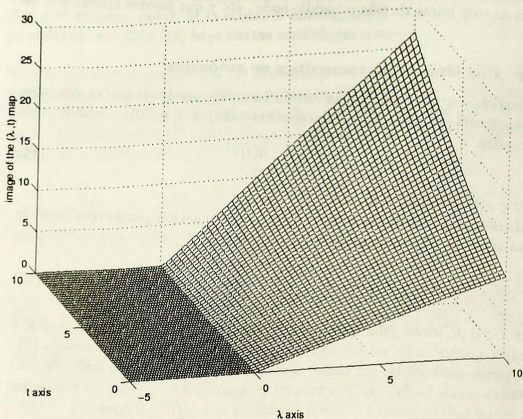


Figura 6: Bifurcación transcítica no autónoma en $\lambda = 0$ del problema (15) para $a(t) = \exp(-0.1t)$ si $t > 0$ y $a(t) = 1$ si $t \leq 0$.

mientras que para $\lambda > 0$ es el intervalo $[0, \alpha_\lambda(t; a)]$ (véase la Figura 6 para un valor concreto de la función $a(\cdot)$).

Es interesante observar que si consideramos en este marco una familia de problemas no autónomos

$$\dot{x} = \lambda x - a_\sigma(t)x^2,$$

donde para cada $\sigma > 0$, la función $a_\sigma(t)$ es tal que se verifican las condiciones del Teorema 17, pero con $a_\sigma(t) \rightarrow a$ (una constante) uniformemente en conjuntos acotados, es fácil ver que $\alpha_\lambda(t; a) \rightarrow \sqrt{\lambda/a}$ para cada t y en el límite recobramos el atractor global del problema autónomo

$$\dot{x} = \lambda x - ax^2.$$

Nota 21 Para un término cúbico de la forma $-a(t)x^3(t)$ en (15), obtendríamos una bifurcación de tipo tenedor no autónoma (cf. [3]) y, de aquí no resulta difícil obtener ejemplos sobre bifurcaciones de tipo Hopf (cf. [20]).

4.3.3 Sistemas de competición no autónomos de tipo Lotka-Volterra

Para finalizar, retornamos de nuevo a nuestro primer modelo para un sistema de competición no autónomo de tipo Lotka-Volterra y, con un poco más de trabajo, se pueden generalizar también los resultados del caso autónomo al no autónomo (cf. [21] y la Figura 7). Efectivamente, consideremos

$$\begin{cases} \dot{u} = u(\lambda - a(t)u - bv) \\ \dot{v} = v(\mu - cv - du) \\ u(s) = u_0 > 0 \\ v(s) = v_0 > 0. \end{cases} \quad (18)$$

con $a(t) \in C^0(\mathbb{R})$. Entonces se verifica el siguiente resultado.

Teorema 22 Supongamos que la función $a(t)$ es decreciente con $\lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) = A > 0$, $Ad > bc$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$.

i) Si $0 < \frac{c}{b}\lambda < \mu$, entonces para todo $(u_0, v_0) \in \text{int}(P)$ se verifica que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (u(t, s; u_0, v_0), v(t, s; u_0, v_0)) = (0, \frac{\mu}{c}).$$

ii) Cuando

$$0 < \frac{d}{A}\lambda < \mu < \frac{c}{b}\lambda, \quad (19)$$

existe una trayectoria completa $(U(t), V(t))$, acotada superior e inferiormente por constantes positivas (dependientes del tiempo) para cada $t \in \mathbb{R}$, y tales que para todos $u_0, v_0 > 0$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} |u(t, s; u_0, v_0) - U(t)| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} |v(t, s; u_0, v_0) - V(t)| = 0.$$

iii) Finalmente si $0 < \mu < \frac{d}{A}\lambda$, entonces para todo $(u_0, v_0) \in \text{int}(P)$ se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} (u(t, s; u_0, v_0), v(t, s; u_0, v_0)) = (\alpha(t; a), 0).$$

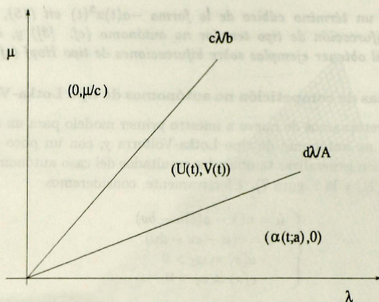


Figura 7: Comportamiento asintótico global del problema (18) dependiente de los parámetros λ y μ . Para $\lambda, \mu > 0$ obtenemos tres regiones diferentes para este comportamiento; hemos escrito las trayectorias completas globalmente asintóticamente atrayentes en cada una de estas regiones.

5 Conclusiones

Hemos descrito el concepto de atractor no autónomo y algunas de sus propiedades principales. Desde nuestro punto de vista, podemos afirmar que este concepto se convertirá en una de las herramientas básicas para el estudio cualitativo de las propiedades de los sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomas. Notemos que hemos intentado evitar las mayores dificultades al escribir sobre estos nuevos conceptos, de modo que las ideas puedan llegar a ser accesibles al mayor número de matemáticos posible. Así, merece la pena observar que esta teoría se encuentra actualmente en pleno desarrollo, y son cada vez más y más los investigadores que se están interesando por dicha teoría, en algunas ocasiones, en el marco de Proyectos de Investigación a nivel internacional. Por tanto, caben esperar muchos resultados en esta línea en el futuro inmediato. En concreto, toda la teoría relacionada con los fenómenos de bifurcación para sistemas no autónomos aparecen como problemas desafiantes y apenas abordados hasta el momento.

Agradecimiento. Este trabajo fue comenzado durante la visita que T.

Caraballo realizó al Fach. Mathematik de la Universidad J.W.G. de Frankfurt durante el mes de abril de 2001. Con ese motivo T.C. desea agradecer la hospitalidad recibida de todos los miembros del Departamento, en especial del Prof. P.E. Kloeden, así como la financiación recibida del Proyecto DANSE.

Referencias

- [1] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York, 1998.
- [2] A.V. Babin & M.I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [3] T. Caraballo & J.A. Langa, On the upper semicontinuity of cocycle attractors for non-autonomous and random dynamical systems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, en prensa.
- [4] T. Caraballo, J.A. Langa, and J.C. Robinson, Upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems, *Comm. in Partial Differential Equations* 23 (1998), 1557-1581.
- [5] D.N. Cheban, P.E. Kloeden & B. Schmalfuss, The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems, *Nonlinear Dynamics & Systems Theory*, en prensa.
- [6] D.N. Cheban, P.E. Kloeden & B. Schmalfuss, Pullback attractors in dissipative nonautonomous differential equations under discretization, Manuscrito (2000).
- [7] V.V. Chepyzhov & M.I. Vishik, Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension, *J. Math. Pures Appl.* 73 (1994) pp. 279-333.
- [8] H. Crauel & F. Flandoli, Attractors for random dynamical systems, *Prob. Th. Rel. Fields* 100 (1994) pp. 365-393.
- [9] H. Crauel, A. Debusche & F. Flandoli, Random attractors, *J. Dynamics Differential Equations* 9 (1997) pp. 397-341.
- [10] P.A. Glendinning, *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, CUP 1994.

- [11] J. Guckenheimer & P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences 42, Springer-Verlag, New York 1983.
- [12] J.K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Providence: Math. Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. 1988.
- [13] P.E. Kloeden, Pullback attractors in nonautonomous difference equations, *J. Diff. Eqns and Appl.* vol 6 (2000), pp 33-52.
- [14] P.E. Kloeden, A Lyapunov function for pullback attractors of nonautonomous differential equations. *E. J. Dif. Eqns*, Conf. 05 (2000), pp. 91-102.
- [15] P.E. Kloeden & B. Schmalfuss, Lyapunov functions and attractors under variable time-step discretization, *Discrete and Cont. Dyn. Systems*, vol. 2, No. 2 (1996), pp. 163-172.
- [16] P.E. Kloeden & B. Schmalfuss, Cocycle attractors of variable time step discretizations of Lorenzian systems, *J. Difference Eqns. Applns.* 3 (1997) pp. 125-145.
- [17] P.E. Kloeden & D. Stonier, Cocycle attractors of nonautonomously perturbed differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems* 4 (1998) pp. 221-226.
- [18] O.A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [19] J.A. Langa, Asymptotically pullback determining modes for non-autonomous PDEs, *Ark. Math.*, en prensa.
- [20] J.A. Langa, J.C. Robinson & A. Suárez, Stability, instability, and bifurcation phenomena in non-autonomous differential equations, Manuscrito (2001).
- [21] J.A. Langa, J.C. Robinson & A. Suárez, A non-autonomous competitive Lotka-Volterra system: pullback coexistence, extinction, and bifurcation phenomena, Manuscrito (2001).
- [22] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, second, corrected edition (1993).

- [23] J.C. Robinson, *Infinite-dimensional dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- [24] B. Schmalfuss, Backward cocycles and attractors of stochastic differential equations, in V. Reitmann, T. Riedrich & N. Kokscha (eds.), *International Seminar on Applied Mathematics - Nonlinear Dynamics: Attractor Approximation and Global Behaviour*, Technische Universität, Dresden (1992) pp. 185-192.
- [25] B. Schmalfuss, Attractors for the nonautonomous dynamical systems, in B. Fiedler, K. Gröger & J. Sprekels (eds.), *Proceedings of Equadiff 99 Berlin*, World Scientific, Singapore (2000) pp. 684-689.
- [26] G.R. Sell, Nonautonomous differential equations and dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* **127** (1967), pp. 241-283.
- [27] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York 1988 (1st edition) and 1996 (2nd edition).