CUBO 8 , 87-89 (1992)
Séptima Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Formas Bilineales Asociativas en una Algebra Bárica *

R. Baeza V. y R. Benavides G.†

1 Introducción.

Sea K un cuerpo de característica diferente de dos y A una álgebra sobre K, conmutativa pero no necesariamente asociativa. Para x en A y $k \geq 1$ un número entero, la potencia plena de x es definida inductivamente por

$$x^{[1]} = x \quad y \quad x^{[k]} = x^{[k-1]}x^{[k-1]}, \quad k \geq 2$$

Sea ahora (A, ω) una K-álgebra bárica (o álgebra ponderada), es decir, una K-álgebra conmutativa A y un homomorfismo no trivial de K-álgebras $\omega : A \longrightarrow K$. Diremos que (A, ω) es una álgebra de Bernstein de orden k, si para todo x de A se verifica

$$x^{[k+2]} = \omega(x)^{2^k} x^{[k+1]} \tag{1}$$

siendo k el menor entero para el cual esta identidad es válida.

La defínción de álgebras de Bernstein de orden k y algunos ejemplos para $k = 2$ fue dada por Abraham 1980.

Cuando $k = 1$, A es llamada álgebra de Bernstein. Estas álgebras han sido estudiadas extensivamente, ver por ejemplo Holgate 1975, Ljubic 1978, 1987 y Hentzel - Peresi 1988.

Se sabe que si (A, ω) es una álgebra de Bernstein de orden k, entonces
- La ponderación ω es única
- Ella admite un elemento idempotente e tal que $\omega(e) = 1$
- Si $\tau : N \longrightarrow N$, con $N = ker\omega$, denota la multiplicación a izquierda por el idempotente e y $U = Im\tau^k, V = Ker\tau^k$, entonces $A = Ke \oplus U \oplus V$ (descomposición de Pierce relativa al idempotente e),

$$U = \{n \in N : en = \frac{1}{2}n\} \quad \text{con} \quad U^2 \subseteq V.$$

Sea W un subespacio complementario de U^2 en V, así que $U^2 \oplus W = V$.

Consideremos $B : A \times A \longrightarrow K$ una forma bilineal sobre A, diremos que B es asociativa si se verifica que

*Financiado por Proyecto FONDECYT 165-91 y DIUFRO 9203
†Expositor

$$B(xy, z) = B(x, yz) \quad \forall x, y, z, \in A.$$

2 Resultados.

Procederemos a realizar algunos cálculos referente a una forma bilineal asociativa B sobre A.

Sea $n \in N, B(e, n) = B(e^2, n) = B(e, en) = B(en, e) \quad = B(n, e^2) = B(n, e)$

$$\therefore B(e, N) = B(N, e) \tag{2}$$

Por otro lado $\forall u \in U$, tenemos

$B(e, u) = B(e^2, u) = B(e, eu) = B(e, \frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}B(e, u) \quad \therefore B(e, u) = 0.$

Para $v \in V$, se obtiene

$B(e, v) = B(e^{k+1}, v) = B(e^k, ev) = B(e^k, \tau v) = B(e^{k-1}, \tau^2 v) = ... = B(e, \tau^k v) = 0$

Así, tenemos que

$$B(e, N) = B(N, e) = 0 \tag{3}$$

Para $u \in U$ y $n \in N$, tenemos

$B(u, n) = 2B(\frac{1}{2}u, n) = 2B(eu, n) = 2B(e, un) = 0$ (N ideal de A).

Análogamente se tiene $B(n, u) = 0$.

Así

$$B(N, U) = B(U, N) = 0 \tag{4}$$

Para cada $u_i u_j$ generador de U^2 y $n \in N$.

$B(u_i u_j, n) = B(u_i, u_j n) = 0$, de la misma forma $B(n, u_i u_j) = 0$ entonces tenemos

$$B(U^2, N) = B(N, U^2) = 0 \tag{5}$$

Así la matriz asociada a B, es :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Ke & U & U^2 & W \end{array} \\ (B) = & \begin{pmatrix} B(e,e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} Ke \\ U \\ U^2 \\ W \end{array} \tag{6}$$

De esta forma matricial, válida para toda dimensión de A, se concluye

Proposición 2.1 *Cualquier forma bilineal asociativa sobre una álgebra de Bernstein de orden k, con $U \neq \{0\}$, es degenerada.*

Demostración. Es inmediata desde (6) ∎

Proposición 2.2 *Cualquier forma bilineal asociativa B de una álgebra de Bernstein A de orden k, está totalmente determinada por su acción en $Ke \oplus W$.*

Demostración. Es obvio, porque si $x = \lambda e + u + v_1 + v_2$, $y = \lambda' e + u' + v_1' + v_2'$ con $\lambda, \lambda' \in K; u, u' \in U; v_1, v_1' \in U^2$ y $v_2, v_2' \in W$; entonces

$$B(x, y) = \lambda\lambda' B(e, e) + B(v_2, v_2')$$

■

Proposición 2.3 *Si existe una forma bilineal asociativa no degenerada B sobre una álgebra de Bernstein A de orden k, entonces A es casi constante y el elemento idempotente e es único.*

Demostración. Si B es no degenerada, $U = \{0\}$. Teorema 5.10 C. Mallol establece que A es una álgebra casi constante y el elemento idempotente es único. ■

Referencias

[1] R. Baeza, A. Catalán, R. Costa, *Bernstein algebras with associative bilinear forms*,Arch. Math.**58**, **234-238** (**1992**)

[2] I. Hentzel, L. Peresi, Ph. Holgate, *On kth-order Bernstein algebras and stability at the k+1 generation in polyploids*,IMA. J. Math. Appl. Biol.**7**,**33-40** (**1990**).

[3] C. Mallol, *A propos des algebres de Bernstein*,These de Doctorado, Montpellier-France.(1990)

Dirección de los autores:
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D. Temuco