

## Oscilaciones no Lineales \*

Jorge Billeke G.

### Resumen.

Este trabajo describe las evoluciones que ha experimentado el estudio geométrico de la teoría de oscilaciones dada por ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Está dividido en tres etapas (Métodos Cuantitativos lineales, Métodos Cualitativos no lineales y Métodos de la teoría de Sistemas Dinámicos). Se presentan los resultados más relevantes de cada etapa, se exhiben los problemas actuales y las contribuciones nacionales al tema.

Dedico este trabajo a mis amigos de la Kissmy, para quienes el caos de la vida es más que teoremas, ... y tienen razón.

\*Este trabajo ha sido financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Santiago de Chile. Proyecto 04-90-33BG

# 1 Métodos Cuantitativos

## 1.1

Para ilustrar la problemática que abordaremos, veamos dos ejemplos físicos interesantes.

*Ejemplo 1.* Consideremos una masa  $m$  unida por resortes a dos paredes fijas, como lo indica la figura 1.

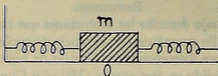


Figura 1.

La ley del movimiento de Newton, "El producto de la masa de un punto material por su aceleración es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre él", se traducen en términos matemáticos como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -bx - a \frac{dx}{dt} + H$$

donde  $-bx$  es la fuerza de restauración,  $-a \frac{dx}{dt}$  es la resistencia del medio (roce en general) y  $H$  es la resultante de las fuerzas exteriores. La solución  $x = x(t)$ , de esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, mide el desplazamiento en el tiempo de la masa  $m$  de su punto de equilibrio 0.

*Ejemplo 2.* Consideremos en la figura 2 un circuito eléctrico clásico.

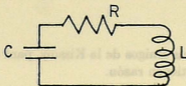


Figura 2.

Donde  $R$  es la resistencia,  $C$  un condensador de capacitancia  $C$  y  $L$  una bobina de inductancia  $L$ .

En un instante determinado el condensador tendrá un cierto voltaje entre sus terminales. En ausencia de inductancia, en el circuito se establece una corriente hasta que los dos terminales del condensador estén al mismo potencial. La presencia de una inductancia altera la situación pues se generan oscilaciones eléctricas, cuya

expresión está dada por la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = H(t)$$

donde  $H(t)$  corresponde a fuerzas exteriores electromagnéticas. La solución  $v = v(t)$ , de esta ecuación, mide un voltaje generado por la diferencia de potencial eléctrico en el condensador.

## 1.2

En general una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene expresión (standard)

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = h(t) \quad \cdot = \frac{d}{dt} \quad \cdot \cdot = \frac{d^2}{dt^2} \quad (1)$$

y sin perder generalidad supongamos  $f, g, h$  de clase  $C^1$  (para estar holgadamente bajo hipótesis de existencia y unicidad). Las soluciones serán funciones diferenciables que de alguna forma queremos describir. Los primeros pasos en el estudio de estas ecuaciones están ligadas al estudio del cálculo diferencial con Newton, Leibnitz, Euler, etc.

## 1.3

Consideremos la ecuación (1) en su forma lineal

$$\ddot{x} + a \dot{x} + bx = h(t) \quad a, b \in \mathbf{R}, h(t) \in C^0 \quad (2)$$

sabemos de la teoría clásica que (2) es equivalente al sistema matricial:

$$\dot{X} = PX + H(t) \quad \text{donde} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad y = \dot{x} \quad (3)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Las soluciones de (3) están dada analíticamente por  $X(t) = Y^{-1}[t_0 + \int_{t_0}^t YH(s)ds]$  donde  $Y(t)$  es solución de  $\dot{Y} = -YP$ , es decir,  $Y(t) = \exp(-Pt)$ .

Además, si  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$  entonces,  $P = P(t)$  y  $Y(t)$  es solución de  $\dot{Y} = YP(t)$ . Luego para este tipo de ecuaciones las soluciones se obtienen en forma explícita.

## 1.4

Consideremos ahora la ecuación (1) en forma conservativa y no forzante, es decir,  $f(x) = 0$  (no hay roce, no hay disipación de energía para un sistema mecánico) y  $h(t) = 0$  (no hay término forzante, no hay fuerzas exteriores). En este caso (1) tiene la forma:

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (4)$$

o en forma equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (4')$$

La energía potencial del sistema esta dada por  $G(x) = \int_0^x g(u) du$ , y la energía total es  $U(x, y) = \text{Energía Cinética} + \text{Energía Potencial} = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$ , la cual se mantiene constante a lo largo de las órbitas del campo, es decir,  $\frac{dU}{dt} = 0$ .

Los estados de equilibrio genéricos de este sistema sólo son puntos de tipo silla o de tipo centro (no hay atractores ni repulsores). En el caso centro, la órbita periódica de energía  $u_0$ , como lo indica la figura 3, tiene período  $T = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(u_0 - G(x))}}$ , es decir, el período depende de la energía. Esto no ocurre por ejemplo en el caso  $g(x) = x$  (oscilador armónico lineal) cuyas soluciones periódicas tienen todas período  $2\pi$ .

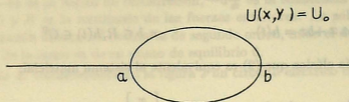


Figura 3.

Un ejemplo de estos sistemas son los llamados centros elípticos, cuyas ecuaciones son  $\ddot{x} - x^{2n-1} = 0$ . Aquí las órbitas periódicas están contenidas en las curvas de nivel de la función energía  $x^{2n} + ny^2 = r^{2n}$  y tienen período

$$T = 4\sqrt{n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2n})}{\Gamma(\frac{n+1}{2n})}$$

Más detalles sobre estos centros elípticos desarrollados por Liapunov en [Li] se pueden ver en [La] y en  $[B-S-S]_1$ ,  $[B-S-S]_2$ .

Combinando centros lineales y elípticos tenemos la ecuación de Duffing (1918),  $\ddot{x} - x + x^3 = 0$  cuyo retrato de fase está dado en la figura 4.

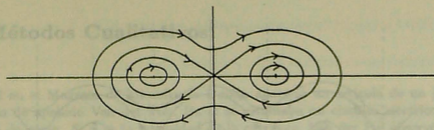


Figura 4.

Aquí las órbitas del sistema están contenidas en las curvas de nivel de la función energía  $U(x, y) = \frac{v^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ .

## 1.5

Una ecuación interesante estudiada a principios de siglo y que introduce métodos cualitativos es la ecuación del péndulo simple (figura 5)

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen} \phi = 0. \quad (5)$$

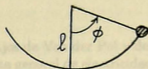


Figura 5.

Las soluciones de esta ecuación diferencial no pueden expresarse mediante una combinación finita de funciones elementales.

Si  $x = \phi$ ,  $y = \frac{d\phi}{dt}$  el retrato de fase es como en la figura 6.

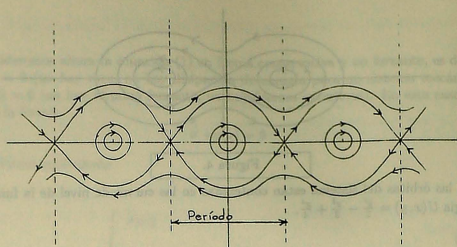


Figura 6.

Una deducción de este retrato de fase por métodos geométricos está en el artículo de A. Chenciner [Ch].

## 2 Métodos Cualitativos

### 2.1

En 1922 en el Magasin de Filosofía de Dublin apareció un artículo de un joven ingeniero de apellido Van der Pol. En él se estudiaba un circuito eléctrico con un tubo de vacío. Si  $x$  es la intensidad de la corriente, Van der Pol observó que la resistencia era negativa para  $x$  pequeño (el sistema emite energía) y que la resistencia era positiva para  $x$  grande (el sistema absorbe energía). Razonando como en el ejemplo 2, se obtiene la ecuación

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0 \quad (6)$$

ó equivalente el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (6')$$

Para este sistema el origen es un punto de equilibrio estable repulsor del sistema. Por diferentes métodos (algunos muy recientes) se ha demostrado la existencia, unicidad e hiperbolicidad de un ciclo límite. La ubicación de éste es como en la figura 7.

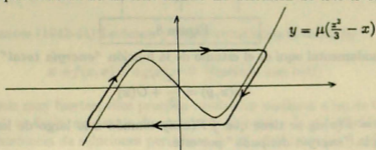


Figura 7.

### 2.2

En 1928 conociendo los trabajos de Van der Pol y de A. Liapunov el físico francés A. Liénard publica en la revista general de electricidad de Francia su estudio "sobre oscilaciones entretenidas". Liénard aborda el análisis de la ecuación:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad f \text{ y } g \text{ diferenciables.} \quad (7)$$

Haciendo  $F(x) = \int_0^x f(u)du$  y  $G(x) = \int_0^x g(u)du$ , entonces el cambio de variable  $y = \dot{x} + F(x)$ , la ecuación (7) se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (7')$$

Liénard introduce las siguientes hipótesis geométricas.

Hipótesis para existencia de ciclos límites;

- i)  $f(x)$  es función par y  $g(x)$  es función impar
- ii)  $xg(x) > 0 \forall x \in R$  y  $f(0) < 0$
- iii)  $F(x) \rightarrow \pm\infty$  si  $x \rightarrow \pm\infty$

Hipótesis de unicidad de ciclo límite;

- iv)  $F(x)$  tiene un cero simple en  $x = a$  y es monótona creciente  $\forall x \geq a$ .

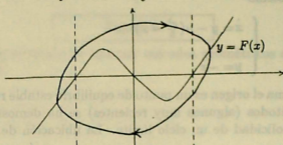


Figura 8.

La idea fundamental aquí es el estudio de la función "energía total"

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$$

Como  $du = F(x)dy$  se tiene que  $\int F(x)dy$  tomada a lo largo de las órbitas del sistema es la "energía disipada" por este.

Sobre ecuaciones de Liénard se han escrito cientos de trabajos desde los años 30 a la fecha. Son famosos los trabajos de: Dulac, Andronov, Bautin, Pontryagin, Levinson, Smith, Sansone, Conti, Massera, etc., etc.. La escuela China ha hecho un aporte significativo en este tema (ver por ejemplo [Ye], [Wu], [Zh], etc). Un trabajo reciente y muy interesante es de Coppel [Co], mejorado por Roussarie, Dumortier [R-D]. Este método de existencia y unicidad de ciclos límites se puede aplicar a ciclos que contienen en su interior más de una singularidad.

## 2.3

Entre los años 1947 y 1952 los matemáticos ingleses M. Cartwright y J. Littlewood estudiaron el sistema de segundo orden forzado

$$\ddot{x} + \mu f(x) \dot{x} + g(x) = \mu h(t) \quad (8)$$

$\mu > 0$  no necesariamente pequeño.

Bajo hipótesis geométricas, que no implican paridad de  $f$  o  $g$ , se tiene que el sistema



$$\begin{cases} \dot{x} = y - \mu(F(x) - H(t)), & H(t) = \int_0^t h(s) ds \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (8')$$

tiene un atractor global. Es decir si  $\varphi_t(t_0, (x_0, y_0))$  denota el flujo del sistema (8'), ellos demostraron que existe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  compacto tal que para toda condición inicial  $(t_0, (x_0, y_0))$  existe un tiempo  $T = T(t_0, (x_0, y_0))$  con,

$$\varphi_t(t_0, (x_0, y_0)) \in \Omega, \quad \forall t \geq T$$

En rigor ellos prueban que  $\Omega$  puede tomarse como  $\{|x| < R, |y| < R(1 + \mu)\}$  donde  $R$  es una constante positiva que no depende de  $\mu$ .

Como corolario se puede obtener que bajo las hipótesis del Teorema la ecuación de Liénard asociada tiene al menos un ciclo límite.

Ellos prueban también que si  $H(t)$  es periódica de período  $\tau$ , entonces existe una solución de (8') de período  $\tau$  y contenida en  $\Omega$ .

Detalles sobre las hipótesis y otras contribuciones se encuentran en sus trabajos [C-L], [Ca] o en el libro de Lefschetz [Le].

## 2.4

Pocos años antes (1942-44) Levinson y Smith estudiaron la ecuación

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{también con } h(t)) \quad (9)$$

y con hipótesis muy fuertes, ellos prueban resultados similares a los de Cartwright y Littlewood, es decir, existencia de atractores globales y la periodicidad de  $H(t)$  implica la existencia de soluciones periódicas de (9). Sus trabajos [Lev], [L-S] son muy interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones.

## 2.5

En 1951 el matemático japonés Shimizu estudió la ecuación

$$\ddot{x} + g(x) = \mu \operatorname{sen}(\omega t) \quad (10)$$

$\mu$  pequeño y  $g(x)$  impar. Si consideramos (10) sin término forzante, los períodos de las oscilaciones están dadas por

$$T(\xi) = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\xi^2 - \operatorname{sen}^2(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - G(\operatorname{sen}(\theta))}} d\theta$$

donde  $x = \xi \operatorname{sen}(\theta)$ . Se tiene  $T(\xi) \rightarrow 0$  si  $\xi \rightarrow +\infty$  y  $T(\xi)$  crece monótonamente a  $T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g'(0)}}$  cuando  $\xi \rightarrow 0$ .

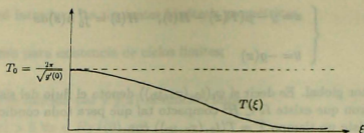


Figura 9.

Entonces:

- Dado  $T_1$ ,  $0 < T_1 < T_0$  existe una única solución periódica de período  $T_1$  de  $\ddot{x} + g(x) = 0$ .
- Dado  $T_1$ ,  $0 < T_1 < T_0$  y  $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$ . Si  $\mu$  es suficientemente pequeño existe solución periódica de (10) la cual tiene período  $T_1$ .

En [Sh] Shimizu obtiene otros resultados del mismo tipo.

## 2.6

En 1956 el matemático soviético R. E. Gomory [Go] estudió el problema de las oscilaciones no lineales y su relación con puntos singulares en el infinito. Gomory considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) + H_1(t) \\ \dot{y} = X_2(x, y) + H_2(t) \end{cases} \quad (11)$$

donde  $X_i$  son polinomios de grado  $n$  y  $H_i(t)$  funciones continuas  $T$ -periódicas.

Sea  $\tilde{X}(x, y)$  el campo de vectores en la esfera de Poincaré,  $S^2$ , que es la extensión analítica al infinito del campo de vectores  $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$ . Sean  $p_j$  las singularidades de  $\tilde{X}$  en el ecuador  $S^1$  de  $S^2$  (es decir,  $p_j$  son las singularidades de  $X$  en el infinito).

Si las singularidades satisfacen

- son simples, es decir,  $\det D\tilde{X}(p_j) \neq 0$ ,
- la suma de sus índices es distinto de uno,
- no existen dos puntos sillas consecutivos.

Entonces el sistema (11) tiene soluciones  $T$ -periódicas.

## 2.7

En este orden de problemas, es decir, sobre existencia de soluciones periódicas, existen una gran variedad de resultados, el siguiente es muy interesante desde el punto de vista de las aplicaciones. Sea

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = h(t) \quad (12)$$

donde  $h(t)$  es  $T$ -periódica de clase  $C^1$  y  $f, g$  son polinomios reales

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \quad m \geq n > 0$$

Si  $n$  es impar y no se tiene simultaneamente  $m$  impar y  $b_n > 0$ . Entonces (12) tiene una solución  $T$ -periódica.

La demostración de este resultado se deduce de los métodos de Gomory.

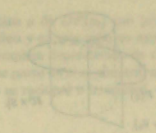


Figura 10

### 3 Métodos de Sistemas Dinámicos

#### 3.1

Para exponer en forma simple las ideas que a continuación presentaremos, sea  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{z} = f(z, t) \quad (13)$$

donde  $f$  es de clase  $C^1$  y  $T$ -periódica en  $t$ .

Esta ecuación puede escribirse como un campo de vectores (autónomo)

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

donde  $z \in \mathbb{R}^2$ ,  $\theta \in S_T^1$ ,  $S_T^1$  denota al círculo de largo  $T$ ,  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ . Sea  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  el flujo de (14), este induce un difeomorfismo  $P$  del plano  $\Sigma = \{\theta = \theta_0\}$  en si mismo. Esta transformación se llama de Retorno o transformación de Poincaré, y es  $z \rightarrow P(z) = \phi_T(z)$ .

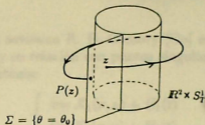


Figura 10.

Si cambiamos  $\theta_0$  por  $\theta_1$  obtenemos una aplicación  $P_1$  conjugada a  $P$ , es decir  $P_1 = h^{-1} \circ P \circ h$ , donde  $h$  es un difeomorfismo del plano  $\theta = \theta_0$  en el plano  $\theta = \theta_1$ .

El conocimiento de la dinámica de  $P(z)$  equivale al conocimiento de la dinámica de (14) (es decir de (13)). Por ejemplo si  $z_0$  es un punto fijo de  $P(z)$ , entonces (14) tiene una órbita periódica de período  $T$ . Si  $P^q(z_0) = z_0$  entonces (14) tiene una órbita periódica de período  $qT$  (subarmónica). Si  $P(z)$  tiene un círculo invariante en  $\Sigma$  entonces (14) tiene un toro invariante, etc. Luego para estudiar el flujo podemos estudiar la dinámica de  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  a tiempo discreto.

En analogía con los campos de vectores, el eje imaginario pasa a ser el círculo unidad y el espectro de la ecuación linealizada en un punto de equilibrio pasa a ser el espectro de la derivada del difeomorfismo en el punto fijo.

Sea  $z_0 \in \Sigma$ , punto fijo de  $P$ . Si el espectro de  $DP(z_0)$  está fuera del círculo unitario, es decir, para todo valor propio  $\mu$  de  $DP(z_0)$ ,  $|\mu| \neq 1$ , decimos que  $z_0$  es punto fijo hiperbólico. En este caso  $P$  es linealizable en una vecindad de  $z_0$  ([P-dM],[Wig]), es decir, existe homeomorfismo local  $h$  que conjuga  $P$  con  $DP(z_0)$ , lo que significa

$$P(z) = h^{-1} \circ DP(z_0) \circ h(z)$$

La dinámica local de  $P(z)$  en una vecindad de  $z_0$  es conocida debido a la existencia de variedades locales estable ( $W^s(z_0)$ ) e inestable ( $W^u(z_0)$ ). La dinámica local es como en la figura 11.

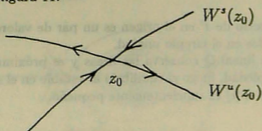


Figura 11.

$$W^s(z_0) = \{z \in \Sigma : P^n(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(z_0) = \{z \in \Sigma : P^n(z) \rightarrow z_0, n \rightarrow -\infty\}$$

Un acabado estudio de esta situación se encuentra en el libro de J. Palis y W. de Melo [P-dM].

Si existen valores propios  $\mu$  de  $DP(z_0)$  con  $|\mu| = 1$ , decimos que el punto fijo  $z_0$  es un punto fijo elíptico y en este caso no existe teorema de linealización. La situación se torna muy compleja dependiendo de cuantos valores propios están en el círculo unidad y en que parte de él se encuentran (por ejemplo si son o no raíces de la unidad, si el ángulo es racional o irracional, etc). Un ejemplo interesante es el siguiente:

### 3.2

En 1947 N. McLachlan [Mc], estudió la siguiente ecuación, llamada ecuación de Mathieu

$$\ddot{x} + \omega(1 + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}))x = 0 \quad (15)$$

Este es un caso particular de la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 x = 0 \quad (\omega \text{ es } T\text{-periódica}) \quad (16)$$

que interviene como ecuación de variación en el estudio de la estabilidad de órbitas periódicas en la teoría de la Luna. Es la ecuación de los "pequeños movimientos" de la ecuación no linealizada

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 \text{sen}(x) = 0 \quad (17)$$

Los campos de vectores correspondientes a estas ecuaciones en  $\mathbb{R}^2 \times S^1_T$  tiene divergencia nula, lo que implica que sus flujos conservan volumen, es decir,  $P$  conserva las áreas ( $\det P = 1$ ). La linealidad de (15) y (16) implican la linealidad de  $P$ .

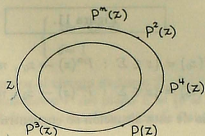
Si  $\epsilon = 0$  en (15), la aplicación  $P$  definida sobre el plano  $\theta_0 = 0$ , es

$$P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \exp T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(T\omega) & \frac{1}{\omega} \sin(T\omega) \\ -\omega \sin(T\omega) & \cos(T\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde  $y = \dot{x}$ .

Si  $\omega \neq \frac{n\pi}{T}$  el espectro de  $P$  en el origen es un par de valores propios distintos, imaginarios conjugados en el círculo unidad.

Si una aplicación lineal  $Q$  conserva las áreas y es próxima de  $P$ , su espectro tendrá la misma propiedad, luego el equilibrio es estable en el sentido de Liapunov para la ecuación (15) si  $|\epsilon|$  es suficientemente pequeño.



$\{P^n(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  está dentro de la misma elipse.

Figura 12.

Si  $\omega = \frac{2k\pi}{T}$ ,  $P$  es la identidad y si  $\omega = \frac{2(k+1)\pi}{T}$ ,  $P$  es menos la identidad. Para  $\epsilon \neq 0$  en (15)  $P$  es hiperbólica y tiene valores propios reales  $\mu, \mu^{-1}$ . Por método de variación de constantes podemos encontrar  $\omega$  en función de  $\epsilon$ , de modo que (15) posea una solución periódica no trivial de período  $T$  (que corresponde al valor propio 1) o  $2T$  (que corresponde al valor propio  $-1$ ). Esto nos permite calcular las regiones donde  $P$  es hiperbólica o elíptica. Ver figura 13.

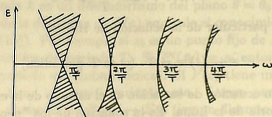


Figura 13.

En las zonas achuradas  $P$  es hiperbólica y en el complemento es elíptica.

consideremos ahora la ecuación no lineal

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 \operatorname{sen}(x) = 0 \quad (18)$$

para simplificar en vista de aplicaciones, tomemos  $\omega(t) = \omega(1 + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}))$  como en

la ecuación de Mathieu ( $\epsilon$  pequeño). Aquí la transformación de Poincaré  $P_\epsilon$  posee dos puntos fijos, uno hiperbólico y otro elíptico (que se repiten periódicamente) desenrollando el cilindro, vemos,

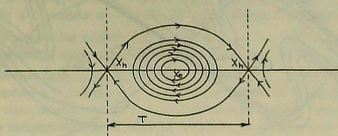


Figura 14.

En este caso las variedades estables e inestables de los puntos fijos hiperbólicos se confunden.

Agregemos ahora a la ecuación (17) un término forzante

$$\ddot{x} + \omega(t)^2 \text{sen}(x) = h(t), \quad h(t) = \epsilon \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (19)$$

La transformación de Poincaré para esta ecuación,  $P_\epsilon$ , tiene nuevamente dos puntos fijos, uno elíptico y otro hiperbólico y son vecinos de los puntos fijos de la transformación de Poincaré de (17) (teorema de funciones implícitas). En este caso las variedades estables e inestables de dos puntos fijos hiperbólicos consecutivos se intersectan en forma transversal (genéricamente). Estos puntos de intersección se llaman **puntos homoclínicos**.

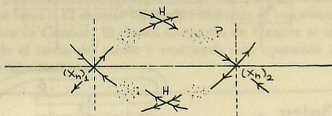


Figura 15.

Si  $H$  es un punto homoclínico entonces  $P_\epsilon^n(H)$  también lo es, luego si existe un punto homoclínico existen infinitos. Esto obliga a las variedades  $W^s(X_h)$  y  $W^u(X_h)$  a replerse indefinidamente. Hacer un dibujo global de esta situación es difícil (Poincaré en sus estudios sobre puntos homoclínicos no los dibujo y analizó la complejidad que tendría un dibujo), Zehnder hace el siguiente dibujo:

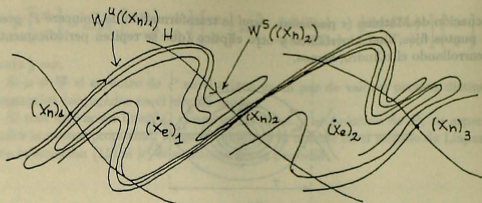


Figura 16.

S. Smale [Sm] estudió esta situación y demostró que existe un conjunto de Cantor  $K$  incrustado en  $S^1 \times \mathbb{R}$ , conteniendo a  $H$  y  $X_h$  e invariante por una potencia  $P_\epsilon^N$  de  $P_\epsilon$ . La dinámica de  $P_\epsilon^N$  en una vecindad de  $K$  es muy errática, en particular todo punto de  $K$  (por lo tanto el punto  $H$ ) es límite de puntos periódicos de  $P_\epsilon^N$ , Birkhoff, (y por lo tanto de  $P_\epsilon$ ) contenidos en  $K$ .

Iterando  $P_\epsilon$  podemos en la idea de la demostración reemplazar  $H$  por un punto homoclínico  $\tilde{H}$  arbitrariamente próximo de  $X_h$ , tan próximo que en la región en que  $P_\epsilon$  es casi lineal. La idea de considerar la restricción a un pequeño rectángulo  $R$  conteniendo  $X_h$  de un iterado  $P_\epsilon^N$  de  $P_\epsilon$  bien elegido de tal forma que la intersección entre  $R$  y  $P_\epsilon^N(R)$  contiene al menos 2 pedazos (dos componentes conexas). Usando las coordenadas  $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ;  $(e^{iz}, y) \rightarrow e^{y+iz}$ , la acción de  $P_\epsilon^N$  sobre  $R$  se ve como en la figura:

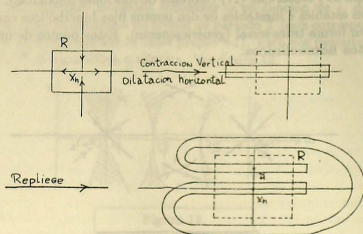


Figura 17.

Si la órbita de  $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de un punto  $p_0$  bajo la acción del difeomorfismo  $P_\epsilon^N$  permanece en  $R$ ,  $p_n$  está para todo  $n$  en la intersección  $P_\epsilon^{-N} \cap R$ , formada por 2 rectángulos verticales (ver figura 18)  $\Delta_0^+$  y  $\Delta_1^+$ . Podemos asociar a  $p_0$  una sucesión  $(i_n(p_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  donde todos los términos son iguales a 0 y 1 por la regla  $p_n \in \Delta_{i_n(p_0)}^+$ .



Esta sucesión describe la historia de la órbita  $p_0$ . Si nos damos una sucesión finita  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  de ceros y de unos, el conjunto  $\Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^+$  de puntos  $p$  para los cuales  $p \in \Delta_{\alpha_0}^+, P_\epsilon^N(p) \in \Delta_{\alpha_1}^+, \dots, P_\epsilon^{N^{n-1}}(p) \in \Delta_{\alpha_{n-1}}^+$  es un rectángulo vertical donde su espesor tiende a 0 cuando  $n \rightarrow +\infty$ . De igual forma el conjunto  $\Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^-$  formado por los  $p$  para los cuales:  $(P_\epsilon^N)^{-1}(p) \in \Delta_{\alpha_1}^-, \dots, (P_\epsilon^N)^{-n}(p) \in \Delta_{\alpha_n}^+$  es un rectángulo horizontal cuyo espesor tiende a 0 cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

La intersección  $\Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}; \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} = \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^- \cap \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^+$  es un "cuadrado" donde sus lados tienden a 0 cuando  $n \rightarrow +\infty$ . (Ver figura 18). Hemos deducido que un punto  $p_0$  cuya órbita está en  $R$  está enteramente determinada por la sucesión  $(i_n(p_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  y reciprocamente, a toda tal sucesión de ceros y unos corresponde un tal punto  $p_0$ .

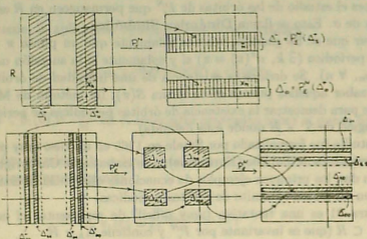


Figura 18.

Denotemos por  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  el conjunto de las sucesiones de ceros y unos, con la topología producto (dos sucesiones están próximas si ellas coinciden sobre un segmento finito suficientemente largo). El espacio topológico obtenido es homeomorfo al producto de dos conjuntos de Cantor. El clásico conjunto de Cantor se obtiene quitando de un intervalo el tercio del medio y repitiendo esta operación indefinidamente sobre los intervalos restantes.

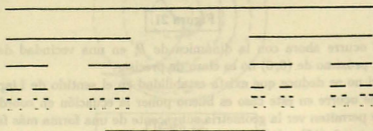


Figura 19.

La aplicación  $S : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow R$  definida asociando a cada sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un único punto  $p_0 \in R$  que verifica  $(P_\epsilon^N)^n(p_0) \in \Delta_{\alpha_n}^+, \forall n$  es un homeomorfismo sobre su

etc.

imagen. La inversa es  $p_0 \rightarrow (i_n(p_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  que conjuga  $P_\epsilon^N$  a la aplicación "corrimiento en uno" más conocida por su nombre en inglés **Shift**,  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  definida por  $\sigma((\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (\beta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $\beta_n = \alpha_{n+1}$ , es decir

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{P_\epsilon^N} & R \\ S \uparrow & & \downarrow S^{-1} \\ \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \\ & & S^{-1} \circ P_\epsilon^N \circ S = \sigma \end{array}$$

Figura 20.

Entonces el estudio de las órbitas de  $P_\epsilon^N$  que permanecen en  $R$  es el estudio de las órbitas de  $\sigma$ . Esto se llama **Dinámica Simbólica**.

Para ver que se ha ganado, veamos solamente que un punto  $\pi = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  es periódico ( $\exists k, \sigma^k(\pi) = \pi$ ) si y solamente si la sucesión  $\alpha_n$  es periódica ( $\alpha_{n+k} = \alpha_n, \forall n$ ). Se deduce la existencia de una infinidad de órbitas periódicas de  $P_\epsilon^N$ , a saber aquellos puntos de la forma  $S(\pi)$ , (el método de Melnikov, sirve igualmente para demostrar la existencia de órbitas periódicas de períodos largos de  $P_\epsilon$  en la región de  $S^1 \times R$  donde está definida).

Este estudio fue formalizado por Smale en 1965 en un caso muy parecido a este llamado Herradura de Caballo (Horseshoe). Los trabajos de Cartwright, Littlewood y Levinson dan los primeros ejemplos de ecuaciones diferenciales estructuralmente estables con un número infinito de órbitas periódicas.

La figura 21 es una tentativa (muy difícil) de representar el conjunto  $K = S(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}) \subset R$  (que es invariante por  $P_\epsilon^N$  y contiene  $X_h$  y  $\tilde{H}$ )

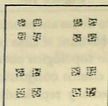


Figura 21.

Lo que ocurre ahora con la dinámica de  $P_\epsilon$  en una vecindad del punto fijo elíptico  $X_e$  próximo de  $(0, 0)$  no es claro de precisar.

A priori no se deduce que exista estabilidad en el sentido de Liapunov. Para analizar que ocurre en este caso es bueno poner la ecuación en coordenadas adecuadas que permiten ver la geometría subyacente de una forma más fácil.

Cuando  $\epsilon = 0$ , (17) o (18) se reduce a  $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 \sin(x) = 0$ . Aquí por un cambio de variable de tipo formal esta ecuación es equivalente a

$$\frac{d\xi}{dt} = i\omega\xi - \frac{i\omega}{12}|\xi|^2 + O(|\xi|^4) \quad (20)$$

usando variación de constantes (19) es equivalente a la ecuación integral:

$$\xi(t) = e^{i\omega t} \xi(0) + \int_0^t e^{i\omega(t-s)} \left[ \frac{-i\omega}{12} \xi(s) |\xi(s)|^2 + O(|\xi(s)|^4) \right] ds \quad (21)$$

La aplicación  $P_0$ , definida por integración de (19) durante el tiempo  $T$ , se puede escribir como

$$P_0(\xi) = \xi e^{i\omega T(1 - \frac{\omega^2}{12} |\xi|^2)} + O(|\xi|^4)$$

Si  $\epsilon$  es pequeño, la aplicación  $P_\epsilon$  tendrá una forma análoga

$$P_\epsilon(\xi) = \xi e^{i(b_0(\epsilon) + b_1(\epsilon) |\xi|^2)} + O(|\xi|^4)$$

con  $b_0(0) = \omega T$ ;  $b_1(0) = \frac{-\omega^2 T}{12}$  en coordenadas centradas sobre el punto fijo elíptico  $X_e$ .

Olvidando los términos de orden superior (mayor o igual a cuatro) se obtiene una forma normal aproximada

$$\pi_\epsilon(\xi) = \xi e^{i(b_0(\epsilon) + b_1(\epsilon) |\xi|^2)}$$

y al igual que  $P_0$  deja invariante cada círculo centrado en  $\xi = 0$ , y sobre cada uno de estos círculos induce una rotación donde el ángulo varía (decrece) cuando el rayo crece (propiedad de Torsión o Twist, típicamente no lineal).

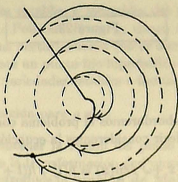


Figura 22.

La dinámica de  $P_\epsilon$ , agregando los términos superiores, es como en la figura 23 debido al extraordinario Teorema de Kolmogorov - Arnold - Moser, de las curvas invariantes.

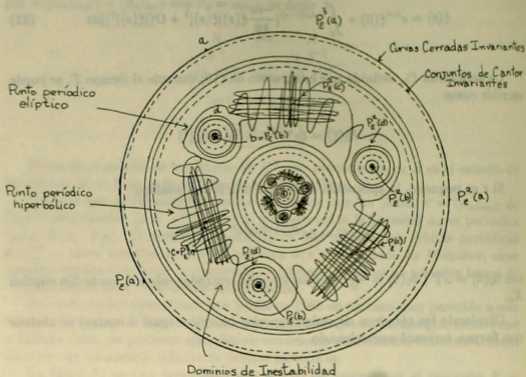


Figura 23.

### 3.3

Para finalizar estas notas abordaremos el problema con perturbaciones periódicas (de auto-oscilaciones), es decir consideremos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = h(t), \quad h(t+T) = h(t) \quad (22)$$

como sistema autónomo es:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \operatorname{sen}(x) - f(x)y + h(t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

ó equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = z - F(x) \\ \dot{z} = -\omega^2 \operatorname{sen}(x) + h(\tau) \\ \dot{\tau} = 1 \end{cases} \quad (24)$$

Cuando  $|f(x)|$  y  $|h(t)|$  son pequeños, (22) es considerado como una perturbación de  $\ddot{x} + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = 0$  y las herramientas que se usan para estudiar esta ecuación son las funciones de Melnikov, bifurcaciones de Hopf de difeomorfismos del círculo. El caso  $|f(x)|$  y  $|h(t)|$  son muy grandes la ecuación se reduce a la ecuación de Van de pol forzada estudiada por Levinson y Levi.

En el caso especial de la ecuación de Liénard en  $[BWB]_1$ ,  $[BWB]_2$  y  $[BWB]_3$  han estudiado los retratos de fase promediados.

Estudiaremos aquí el siguiente ejemplo:

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = \epsilon p(t), \quad p(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$|\epsilon|$  pequeño. Cuando  $|\rho|$  es pequeño esta ecuación puede considerarse como una perturbación de

Si  $\rho = 0$  las variedades estables e inestables del punto fijo hiperbólico  $X_h \in S^1 \times \mathbf{R}$  de la aplicación de Poincaré  $P_\epsilon = P_{0,\epsilon}$  tienen una intersección transversal, luego insensible a pequeñas perturbaciones (no se cortan). Lo mismo ocurre si  $|\rho|$  es muy pequeño (e.d. existe un punto fijo hiperbólico de la aplicación de Poincaré  $P_{\rho,\epsilon}$  asociada a (21) y sus variedades estables e inestables).

Si  $\epsilon = 0$  no hay intersección para  $\rho \neq 0$ .

Con el propósito de obtener la región del plano  $(\rho, \epsilon)$  correspondiente a los parámetros para los cuales la transformación de Poincaré  $P_{\rho,\epsilon}$  asociada a (24) tiene puntos homoclínicos, se introduce la función de Melnikov. Veamos geométricamente esto sobre una figura.

Pensemos primeramente en el caso  $\rho = \epsilon = 0$ , entonces el retrato de fase de  $\ddot{x} + \omega \operatorname{sen}(x) = 0$  (con  $\frac{d\theta}{dt} = 1$ ), se puede pensar en  $(S^1 \times \mathbf{R}) \times S^1_T$  o mejor aún para nuestros propósitos en  $\mathbf{R}^2 \times [0, T]$ .

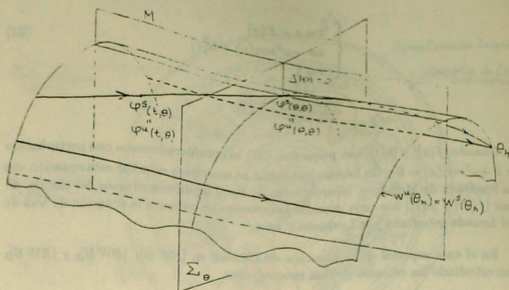


Figura 24.

Al punto fijo hiperbólico  $X_h$  de la aplicación  $P_{\rho, \epsilon}$  corresponde una órbita periódica hiperbólica  $\theta_h$  de la ecuación diferencial. Las variedades estables e inestables de  $X_h$  corresponden a las variedades estables e inestables  $W^s(\theta_h), W^u(\theta_h)$  de  $\theta_h$  (cuando  $\rho = \epsilon = 0$  estas variedades son las mismas) la base del método de Melnikov es la transversalidad de la única intersección de las curvas integrales situadas sobre estas variedades con el plano  $M$  de ecuación  $x = 0$ . Esta transversalidad aún es válida para  $\rho, \epsilon$  pequeños y existe para todo  $\theta$  una única curva integral  $t \rightarrow \varphi^s(t, \theta)$  contenida en  $W^s(\theta_h)$  tal que  $\varphi^s(\theta, \theta) \in M$ ; también existe una única curva integral  $t \in \varphi^u(t, \theta)$  contenida en  $W^u(\theta_h)$  tal que  $\varphi^u(\theta, \theta) \in M$ .

Los dos puntos  $\varphi^u(\theta, \theta), \varphi^s(\theta, \theta)$  están situados sobre la recta vertical que es la intersección de  $M$  y  $\Sigma^\theta = \{(x, y, \tau) : \tau = \theta\}$

Observemos que la distancia  $\Delta(\theta) = \varphi^s(\theta, \theta) - \varphi^u(\theta, \theta)$ , medida en esa recta (paralela al eje  $y$ ).

Efectuemos un cálculo para  $\Delta(\theta)$ : Sea  $t \rightarrow (x_h(t), y_h(t))$  la parametrización de la variedad inestable (estable) del equilibrio hiperbólico de  $\ddot{x} + \omega^2 \text{sen}(x) = 0$  tal que  $x_h(0) = 0$ . Notemos que  $\tau(t, \theta) = \text{Área del paralelogramo engendrado por los vectores } \varphi^s(t, \theta) - \varphi^u(t, \theta) \text{ y } (y_h(t - \theta), -\omega^2 \text{sen}(x_h(t - \theta)))$ . Cuando  $t = \theta$  los dos

vectores son ortogonales y  $\tau(\theta, \theta) = y_h(0) \Delta(\theta) = 2\omega \Delta(\theta)$ .

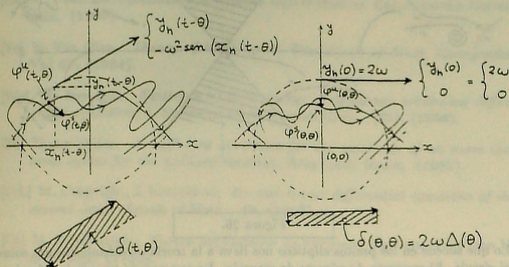


Figura 25.

Derivando  $\tau(t, \theta)$  respecto a  $t$  y considerando el comportamiento asintótico de  $\varphi^s(t, \theta)$  y  $\varphi^u(t, \theta)$  se demuestra

$$\tau(\theta, \theta) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} y_h^2(t - \theta) dt - \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) y_h(t - \theta) dt + O(|\rho| + |\epsilon|)^2$$

Existe  $\theta_0$  tal que  $\Delta(\theta_0) = 0$  si y sólo si  $W^s(\theta_h)$  y  $W^u(\theta_h)$  se encuentran, y que la intersección es transversal si y sólo si  $\Delta(\theta)$  se anula transversalmente en  $\theta_0$  (e.d. con derivada no nula).

Así se obtiene el siguiente diagrama de bifurcación

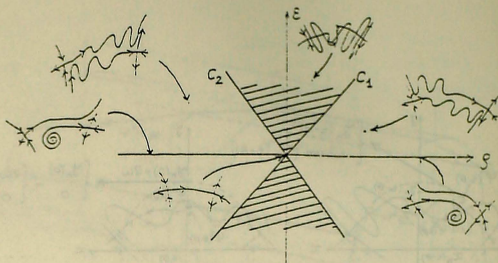


Figura 26.

Lo que sucede en los puntos elípticos nos lleva a la teoría de difeomorfismos sobre el círculo. El concepto de número de rotación. Lo que sucede cuando los términos de excitación son muy grandes nos lleva al análisis no-standard, curvas de Birkhoff, ... y en general los caminos hacia la turbulencia.

Si consideramos en nuestras ecuaciones términos de tipo aleatorio (ruido blanco por ejemplo), las técnicas deben ser cambiadas, los enfoques son del tipo sistemas dinámicos estocásticos, cuya teoría aún está en sus inicios.

## Referencias

- [Li] A.M. Liapunov, *Stability of Motion*, Academic Press, (1966).
- [La] S. Lazarus, *El método de blowing-up para centros de tipo lineales y elípticos*, Tesis Magister en Ciencia, U. Santa María (1990).
- [BSS<sub>1</sub>] J. Billeke, E. Sáez, I. Szántó *On the existence of limit cycles around a Elliptical Focus*, Preprint enviado a Bulletin of the Australian Math. Society, (1991).
- [BSS<sub>2</sub>] J. Billeke, E. Sáez, I. Szántó, *Limit cycles from an Elliptic Center*, Presentado a contribuciones científicas y Tecnológicas (USACH), (1991).
- [BWB<sub>1</sub>] J. Billeke, M. Wallace, H. Burgos, *Bifurcation of the weakly forced Liénard Equation  $x + \alpha(x^4 - ax^2 - \mu)x + x = \beta(wt)$* , Presentado a Lectures Notes in Math. Dynamical Systems in Santiago de Chile, (1991).



- [BWB<sub>2</sub>] J. Billeke, M. Wallace, H. Burgos, *Melnikov deviations and limit cycles for Liénard Equations*, Revista Colombiana de Matemáticas, Volumen XXVI, (1992).
- [BWB<sub>3</sub>] J. Billeke, M. Wallace, H. Burgos, *Some theorems on the non existence, Uniqueness and Existence of two limit cycles for the Liénard Equation of Degree five*, AHi Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXIX, 11-27, (1991).
- [Ch] A. Chenciner *Systèmes dynamiques différentiables*, Encyclopaedia Universalis, (1989).
- [Ye] Ye Yan Qian, *Theory of limit cycles Traslations of Math*, Monographs, Vol 66, (1984).
- [Wu] Wu Zhuo-qun, *Existence of limit cycles of nonlinear oscillating differential equations*, J. Northeast China Peoples Univ., 2(3), (1956).
- [Zh] Zhang Zhifen, *A sufficient condition for the existence of no more than limit cycles for the Liénard equation*, Acta Math. Sinica, (1982).
- [C-L] M. Carwright, J. Littlewood, *On non-linear differential equations of the second order*, Annals of Math., 48, (1947).
- [Ca] M. Carthwright, *Forced oscillations in nonlinear Systems*, Princeton Univ. Press, (1950).
- [Le] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric theory*, Dover Publications (1977).
- [Lev] N. Levinson, *On the existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term*, Journal of Math. and Phys., 22, (1943).
- [L-S] N. Levinson, K. Smith, *A general equation for relaxation oscillations*, Duke Math. Journal, 9, (1942).
- [Sh] T. Shimizu, *On differential equations for non-linear oscillations*, Math. Japonica, 2, (1951).
- [Go] R. E. Gomory, *Critical points at infinity and forced oscillations*, Princeton Univ. Press, (1956).
- [Co] W. A. Coppel, *Some quadratic systems with at most one cycle*, Dynamics Reported, Vol 2, (1988).
- [R-D] C. Rousseau, F. Dumortier, *Cubic Liénard equations with linear damping*, Nonlinearity, Vol No.4, (1990).
- [P-dM] J. Palis, W. de Melo, *Introducao aos Sistemas Dinamicos*, Projecto Euclides IMPA, (1977).

- [Wig] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag, (1990).
- [Mc] N. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford Press, (1947).
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical Systems*, Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967).

**Dirección del autor:**

Depto. de Matemáticas y Ciencias de la Computación.

Universidad de Santiago de Chile

Casilla 5659-Correo 2. Santiago. Chile