CUBO 8 , 25-29 (1992)
Recibido: Octubre 1992.

Acerca de álgebras báricas satisfaciendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3 x$ *

A. Catalán y R. Costa

Abstract.
Let (A,ω) be a baric algebra, we define the E-ideal associated to the train polynomial $p(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x$, by the ideal $E_A(p)$ de A generated by all $p(a)$, $a \in A$. Different train polynomials may give rise to the same E-ideal. Two train polynomials $p(x)$ and $q(x)$ are equivalent when $E_A(p) = E_A(q)$. We prove that for baric algebras satisfying $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ there are 3 equivalence classes of train polynomials.

1 Introducción

Sean F un cuerpo de característica cero, A una álgebra conmutativa y no necesariamente asociativa sobre F. Si $\omega : A \to F$ es un homorfismo no nulo, entonces el par (A,ω) se llama una álgebra bárica (conmutativa) sobre F, ω es su función peso, y para cada $x \in A, \omega(x)$ es su peso. Los elementos de A de peso cero forman un ideal N de codimensión 1. El concepto de álgebra bárica fue introducido por I.M.H. Etherington [2]. En lo que sigue describimos brevemente dos ejemplos de álgebras báricas:

I.- Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ elementos de F tal que $1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1} = 0$. La expresión formal

$$p(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x \tag{1}$$

es llamada un tren polinomio con coeficientes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ de grado n.

---

*Financiado por Proyecto DIUFRO 9204

Si los elementos de una álgebra bárica (A,ω) satisfacen la identidad

$$p(a) = a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a = 0 \tag{2}$$

se dice que A es una tren álgebra. El elemento a^k está definido por $a^1 = a$ y $a^k = a^{k-1}a$ para $k \geq 2$. Si $p(x)$ tiene grado mínimo n de entre todos los tren polinomios que se anulan en A, entonces $p(x) = 0$ se llama tren ecuación de A y n es el rango de A. Para estas álgebras N es un nilideal.

II.- Recientemente, Walcher [3] obtuvo resultados acerca de álgebras báricas que satisfacen la igualdad

$$(a^2)^2 = \omega(a)^3 a \quad \forall a \in A \tag{3}$$

Ellas admiten la existencia de idempotentes y para uno de ellos fijo, a saber e, tienen una descomposición de Pierce $A = Fe \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_{-\frac{1}{2}}$, donde $N_{\frac{1}{2}} = \{a \in N/ea = \frac{1}{2}a\}$ y $N_{-\frac{1}{2}} = \{a \in N/ea = -\frac{1}{2}a\}$. No es difícil probar que las dimensiones de estos subespacios son independientes de e, así podemos definir el invariante tipo como el par $(1 + dimN_{1/2}, dimN_{-1/2})$. Más aún

$$N_{1/2}^2 \subseteq N_{-1/2}, \quad N_{1/2}N_{-1/2} \subseteq N_{1/2} \text{ y } N_{-1/2}^2 \subseteq N_{-1/2} \tag{4}$$

Si $u \in N_{1/2}$ y $v \in N_{-1/2}$, valen las siguientes identidades:

$$\begin{array}{rrcl rrcl}
i) & u^3 & = & 0 & v) & (u^2)^2 & = & 0 \\
ii) & 2u(uv) & = & u^2v & vi) & u^2(uv) & = & 0 \\
iii) & 2(uv)v & = & uv^2 & vii) & 2(uv)^2 + u^2v^2 & = & 0 \\
iv) & v^3 & = & 0 & viii) & (uv)v^2 & = & 0 \\
ix) & (v^2)^2 & = & 0 & & & &
\end{array} \tag{5}$$

Para obtener estas identidades basta analizar la expresión polinomial nula en las variables $\lambda, \mu \in F$, $((\omega(x)e + \lambda u + \mu v)^2)^2 = \omega(x)^3(\omega(x)e + \lambda u + \mu v)$ que resultan de (3), haciendo $a = \omega(x)e + \lambda u + \mu v$.

Sea ahora $x = \alpha e + u + v$ un elemento de A, con $\alpha = \omega(x)$. Entonces para $k \geq 1$

$$x^k = \alpha^k e + \alpha^{k-1}(u + a_k v) + \alpha^{k-2}(b_k u^2 + c_k uv + d_k v^2) + \alpha^{k-3}(e_k u^2 v + f_k uv^2) \tag{6}$$

donde $a_k, ..., f_k$ son números racionales. Monomios en u y v de grado 4 no aparecen debido a las relaciones (5). Como $x^{k+1} = x^k x$, obtenemos el sistema de ecuaciones de diferencias con valor inicial $a_1 = 1, b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = 0$

$$\begin{cases}
2a_{k+1} + a_k + 1 = 0 \\
2b_{k+1} + b_k - 2 = 0 \\
2c_{k+1} - c_k - 2a_k - 2 = 0 \\
2d_{k+1} + d_k - 2a_k = 0 \\
2e_{k+1} + e_k - 2b_k - c_k = 0 \\
2f_{k+1} - f_k - c_k - 2d_k = 0
\end{cases}$$

Es fácil probar por inducción que

$$a_k + c_k = 1, a_k + 2b_k = 1, 2d_k + 2e_k + a_k = 1, e_k = f_k \forall k \geq 1 \tag{7}$$

Definición 1.1 *El ideal generalizado de Etherington (o simplemente E-ideal) de una álgebra bárica (A,ω), asociado al tren polinomio $p(x)$, es el ideal de A generado por los elementos $p(a) = a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a \quad \forall a \in A$. Este ideal lo denotaremos por $E_A(1,\gamma_1,...,\gamma_{n-1})oE_A(p)$.*

Etherington en [2] define el ideal generado por los elementos $a^2 - \omega(a)a$, que según nuestra notación es el E-ideal $E_A(1,-1)$. Observamos que $E_A(p) \subseteq N, A/E_A(p)$ satisface $p(x) = 0$ y $E_A(p)$ es el menor ideal $I \subseteq N$ tal que A/I satisface $p(x) = 0$. Más aún, (A,ω) es una tren álgebra cuando alguno de sus E-ideales es cero.

Proposición 1.2 *Para toda álgebra bárica (A,ω) y todo tren polinomio $p(x)$ se tiene $E_A(p) \subseteq E_A(1,-1)$.*

Demostración: Sea $E_A(n,k)$ el E-ideal asociado al tren polinomio $x^n - \omega(x)^{n-k}x^k$, $1 \leq k \leq n-k$. Para todo tren polinomio (1) tenemos que $\forall a \in A$.

$$\begin{aligned} p(a) &= a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a \\ &= a^n - (1+\gamma_2+...+\gamma_{n-1})\omega(a)a^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a \\ &= (a^n - \omega(a)a^{n-1}) - \gamma_2\omega(a)(a^{n-1} - \omega(a)a^{n-2}) - ... - \gamma_{n-1}\omega(a)(a^{n-1} - \omega(a)^{n-2}a). \end{aligned}$$

Es decir $p(a) \in E_A(n,n-1) + E_A(n-1,n-2) + ... + E_A(n-1,1)$, entonces $E_A(p) \subseteq E_A(n,n-1) + \sum_{k=1}^{n-2} E_A(n-1,k)$

Analogamente para $k = 1,2,...,n-2, E_A(n-1,k) \subseteq E_A(n-1,n-2) + \sum_{r=1}^{n-3} E_A(n-2,r)$.

Aplicando ésto reiteradamente, obtenemos $E_A(p) \subseteq \sum_{k=2}^{n} E_A(k,k-1)$. Pero cada uno de los ideales $E_A(k,k-1)$ está contenido en $E_A(1,-1)$ debido a que $a^k - \omega(a)a^{k-1} = (...(a^2 - \omega(a)a)...)a \in E_A(1,-1)$. ■

En general, tren polinomios diferentes pueden generar el mismo E-ideal, así, introducimos la siguiente definición:

Definición 1.3 *Sea Ω una clase de álgebras báricas. Los tren polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son equivalentes módulo Ω si $E_A(p) = E_A(q) \forall A \in \Omega$.*

Cuando $\Omega = \{A\}$ las clases de equivalencias corresponden a los E-ideales de A.

2 E-ideales para álgebras báricas satisfaciendo $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$.

Denotemos $A,...,F$ las sucesiones $(a_k)_{k\in IN},...,(f_k)_{k\in IN}$, de (7) tenemos

$$A + C = 1, A + 2B = 1, 2D + 2E + A = 1, E = F \qquad (7')$$

donde $1 = (1,1,...,1)$. Para $k \geq 1$ sea $A_k = (a_k, a_{k-1},...,a_1) \in F^k$ y similarmente $B_k, C_k, D_k, E_k, F_k, 1_k$ las relaciones (7') valen también para estos vectores de F^k.

Un tren polinomio $p(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + ... + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x$ puede ser identificado con el vector $p = (1,\gamma_1,...\gamma_{n-1}) \in F^n$. Así el conjunto de todos los tren polinomios de grado n es identificado con la variedad lineal de F^n definida por las ecuaciones $x_1 + ... + x_n = 0$ y $x_1 = 1$.

Sea $<,>$ la forma bilineal usual en F^n. Cuando reemplazamos cada potencia x^k de x dada por (6), obtenemos

$p(x) = < p, 1_n > \alpha^n e + \alpha^{n-1}(< p, 1_n > u + < A_n, p > v)$
$+ \alpha^{n-2}(< B_n, p > u^2 + < C_n, p > uv + < D_n, p > v^2)$
$+ \alpha^{n-3}(< E_n, p > u^2v + < F_n, p > uv^2)$. Como $< p, 1_n >= 1 + \gamma_1 + ... + \gamma_{n-1} = 0$, los dos primeros sumandos desaparecen. Por (7'), podemos expresar A_n, C_n, D_n y F_n como combinaciones lineales de B_n, E_n y 1_n. Entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha^{n-1} < 1_n - 2B_n, p > v \\ &\quad +\alpha^{n-2}(< B_n, p > u^2 + < 2B_n, p > uv + < B_n - E_n, p > v^2) \\ &\quad +\alpha^{n-3} < E_n, p > (u^2v + uv^2) \\ &= -2\alpha^{n-1} < B_n, p > v \\ &\quad +\alpha^{n-2}(< B_n, p > u^2 + 2 < B_n, p > uv + < B_n - E_n, p > v^2) \\ &\quad +\alpha^{n-3} < E_n, p > (u^2v + uv^2) \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora estamos en condiciones de probar que sólo existen tres clases de equivalencias de tren polinomios, descritos geometricamente por las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1 *Si p y B_n no son ortogonales, entonces*

$$E_A(p) = N_{1/2}N_{-1/2} \oplus N_{-1/2} = E_A(1, -1)$$

Demostración: Es fácil probar que $E_A(p) = N_{1/2}N_{-1/2} \oplus N_{1/2}$ y sabemos que $E_A(p) \subseteq E_A(1, -1)$. Para probar la proposición, es suficiente demostrar que $N_{-1/2} \subseteq E_A(p)$. En efecto, si $v \in N_{-1/2}$ entonces $p(e + v) = -2 < B_n, p > v + < B_n - E_n, p > v^2$ y $p(e - v) = 2 < B_n, p > v + < B_n - E_n, p > v^2$, así $p(e - v) - p(e + v) = 4 < B_n, p > v$ y $v = \frac{1}{4} < B_n, p >^{-1} (p(e - v) - p(e + v)) \in E_A(p)$. ∎

Proposición 2.2 *Si p es ortogonal a B_n y p no ortogonal a E_n, entonces* $E_A(p) = N_{1/2}N^2_{-1/2} \oplus N^2_{-1/2}$. ..

Demostración: Como $< B_n, p >= 0$, la igualdad (8) se reduce a

$$\begin{aligned} p(x) &= -\alpha^{n-2} < E_n, p > v^2 + \alpha^{n-3} < E_n, p > (u^2v + uv^2) \\ &= \alpha^{n-3} < E_n, p > (u^2v - \alpha v^2 + uv^2) \in N_{1/2}N^2_{-1/2} \oplus N^2_{-1/2} \end{aligned} \tag{9}$$

Usando (5) es fácil probar que éste espacio es un ideal. Esto implica que $E_A(p) \subseteq N_{1/2}N^2_{-1/2} \oplus N^2_{-1/2}$. Para la otra inclusión, es suficiente probar que $N^2_{-1/2} \subseteq E_A(p)$ cuando p y E_n no son ortogonales. En efecto, supongamos inicialmente que $v^2 \in N^2_{-1/2}$. Entonces $p(e + v) = - < E_n, p > v^2$, así $v^2 =< E_n, p >^{-1} p(e + v) \in E_A(p)$. Para un generador aditivo v_1v_2 de $N^2_{-1/2}$, es suficiente recordar que $2v_1v_2 = (v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2 \in E_A(p)$. ∎

Proposición 2.3 *Si p es ortogonal a B_n y E_n, entonces $E_A(p) = 0$*

Demostración: Es suficiente ver de (9) que $p(x) = 0$ cuando p y E_n son ortogonales. ∎

Observación: Los E-ideales para álgebras que satisfacen $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ están determinados por $x^2 - \omega(x)x, x^3 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 - \frac{1}{2}\omega(x)^2x$ y $x^4 - \frac{3}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x$ respectivamente y cuyos grados son los mínimos. En particular todas las álgebras que satisfacen $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$ son tren álgebras de rango 4, como fue observado por Walcher [3, ec(11)].

Referencias

[1] Costa R.: Principal train algebras of rank 3 and dimensión ≤ 5. Proc. Edimb. Math. Soc. 33, 61-70 (1990).

[2] Etherington I. M. H.: Genetic algebras. Proc. Roy. Soc. Edim 59, 242-258 (1939).

[3] Walcher S.: Algebras wich satisfy a train equation for the firts three plenary powers. Arch. Math. 56, 547-551 (1991).

[4] Worz A.: Algebras in genetics, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 36, Springer-Verlag, 1980.

Dirección de los autores:
Abdón Catalán
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de la Frontera.
Casilla 54-D. Temuco.

Roberto Costa
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 20570. CEP 01498 São Paulo. Brasil.

Referencias

[1] Costa R.: Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 6. Proc. Edimb. Math. Soc. 33, 61-70 (1990).

[2] Etherington I. M. H.: Genetic algebras. Proc. Roy. Soc. Edim 59, 242-258 (1939).

[3] Walcher S.: Algebras wich satisfy a train equation for the firts three plenary powers. Arch. Math. 56, 547-551 (1991).

[4] Wörz A.: Algebras in genetics. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 36, Springer-Verlag, 1980.

Dirección de los autores:

Abdón Catalán
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de la Frontera,
Casilla 54-D, Temuco.

Roberto Costa
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Caixa Postal 20570, CEP 01498 São Paulo, Brasil.