

NATURA ED ENTITA' DEGLI ERRORI NELLE RIDUZIONI TOPOGRAFICHE ED ISOSTATICHE DEI VALORI DELLA GRAVITA' (*)

M. CUNIETTI

INTRODUZIONE

Uno dei metodi di studio della crosta terrestre consiste nella interpretazione delle anomalie gravimetriche. Oltre che in campi assai limitati e per indagini sub-superficiali nella geofisica applicata, esso viene sfruttato a scopi geodetici e geofisici puri per conoscere lo stato, la costituzione e la forma della crosta terrestre.

Per « anomalia gravimetrica » intendiamo la differenza fra la gravità ricavata sperimentalmente e un « valore normale » opportunamente scelto. I valori della gravità osservata non possono però essere usati così come ci vengono dati dalle misure. Bisogna renderli confrontabili tra di loro eliminando quelle perturbazioni di carattere posizionale di cui ci è possibile prevedere l'esistenza e conoscere la natura. Innanzi tutto si deve tener conto della quota della stazione sul mare, delle masse topografiche emerse e delle depressioni marine su tutta la terra.

Oltre a ciò l'ipotesi isostatica, che suppone compensate con difetti di massa della crosta terrestre le masse topografiche emergenti e viceversa, comporta anch'essa delle riduzioni da apportare ai valori osservati della gravità.

Le riduzioni vengono effettuate secondo uno schema già elaborato da Hayford e in parte modificato da Bowie e Vening Meinesz e che in sostanza si riduce a dividere la superficie del globo in tante corone sferiche concentriche sulla stazione e di larghezza via via crescente, e calcolare per mezzo di opportune tabelle l'effetto totale sulla gravità nel punto di stazione, delle masse e delle loro compensazioni, racchiuse entro ciascuna zona.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studi sulla Gravimetria e l'Isostasia del C. N. R. presso l'Istituto di Geodesia del Politecnico di Milano.

Secondo lo schema di Hayford la Terra viene suddivisa in 33 zone, denominate, le 15 più prossime alla stazione (fino alla distanza sferica di 166700 m da essa) con le lettere maiuscole *A. B. C. ... M, N, O* e le rimanenti 18 (a partire dall'angolo al centro di $1^{\circ}29'52''$ corrispondente alla distanza di circa 166700 m fino al punto diametralmente opposto alla stazione), con i numeri 18, 17, 16, ... 3, 2, 1. In seguito venne ritenuto opportuno suddividere ulteriormente in due parti ciascuna delle zone *C D E F* e *O*. Risultarono così per le diverse zone e sottozone i limiti indicati nella Tabella I ⁽²⁾. (I limiti delle zone sono definiti a mezzo di $X = \text{sen } \Theta / 2$ ove Θ è la distanza angolare dal punto di stazione).

Naturalmente le riduzioni sono affette da errori di varia natura: in parte dovuti alla schematizzazione usata, in parte dovuti alla difficoltà di risalire dai dati topografici al valore della massa entro ciascuna zona, e in parte dovuti alle imprecise ipotesi sulla natura e sulla localizzazione della compensazione. Però, malgrado lo schema adottato sia universalmente accettato, esso lascia un po' troppo agio alla valutazione personale di ciascun operatore, cosicché spesso le medesime riduzioni effettuate da operatori diversi portano a risultati differenti. Si veda per esempio il caso delle riduzioni delle due stazioni di Cagliari e Trapani effettuate da G. Cassinis e da R. Coster ⁽¹⁾ e che portano a risultati che divergono da 13-11 mgal. Paavo Holopainen, in un suo recente lavoro ⁽²⁾ ha confrontato alcune riduzioni effettuate da lui con quelle, per le medesime stazioni, già ottenute dal collega Tanni ⁽³⁾, gli scarti in media sui 2-3 mgal raggiungono in un caso i 9 mgal. Anche se allo stato attuale delle nostre conoscenze sulla struttura della crosta, una precisazione maggiore nelle riduzioni ben poco servirebbe, tuttavia una maggiore uniformità di riduzione sarebbe molto desiderabile, anche perché ci permetterebbe di conoscere a priori l'ordine di grandezza degli errori da cui sono affette le riduzioni e renderebbe più agevole un eventuale lavoro di revisione.

I. — La formula generale dell'attrazione di un compartimento di zona, sul punto di stazione, venne ricavata in modo rigoroso e tabulata da G. Cassinis ⁽³⁾. Essa viene espressa come differenza di due termini, funzioni dei limiti X_1 e X_2 della zona e della differenza di quota h fra compartimento e stazione

$$g = -\frac{4kR}{n} \left[F(x_1, x_2, h_1) - F(x_1, x_2, h_2) \right] \quad [1]$$

TABELLA I

Suddivisione in zone adottata, seguendo Hayford, con le modificazioni di Bowie e Vening Meinesz

Letterate				Numerate			
Zone	Limiti <i>d</i>	<i>x</i>	Area	Zone	Limiti	<i>x</i>	Area
<i>A</i>	0	0,000 0000			1°29'58" ⁷⁷	0,013 0	2,3 · 10 ⁴ km ²
<i>B</i>	2 m	1		18	1 41 13	14 7	3,3 · 10 ⁴
<i>C</i> ₁	68	53		17	1 54 52	16 7	4,6 · 10 ⁴
<i>C</i> ₂	130	102		16	2 11 53	19 1	6,9 · 10 ⁴
<i>D</i> ₁	230	180		15	2 33 46	22 3	1,2 · 10 ⁵
<i>D</i> ₂	380	298		14	3 03 05	26 6	3,65 · 10 ⁵
<i>E</i> ₁	590	463		13	4 19 13	37 6	8,2 · 10 ⁵
<i>E</i> ₂	870	682	1,29 km ²	12	5 46 34	50 3	1,10 · 10 ⁶
<i>F</i> ₁	1280	100	2,85 »	11	7 51 30	68 5	2,05 · 10 ⁶
<i>F</i> ₂	1680	131	3,77 »	10	10 44	93 5	3,03 · 10 ⁶
<i>G</i>	2290	179	7,52 »	9	14 09	123	3,7 · 10 ⁶
<i>H</i>	3520	276	22,40 »	8	20 41	179	10,2 »
<i>I</i>	5240	411	47,70 »	7	26 41	230	20,5 »
<i>J</i>	8140	662	96,00 »	6	35 58	308	46 »
<i>K</i>	12400	973	240,00 »	5	51 04	431	82 »
<i>L</i>	18800	1 47	625,00 »	4	72 13	589	117 »
<i>M</i>	28800	2 26	15,00 · 10 ² km ²	3	105 48	797	151 »
<i>N</i>	58800	4 61	20,50 · 10 ² »	2	150 56	0,968	32 »
<i>O</i> ₁	99000	7 76	81,00 » »	1	180	1,000	
<i>O</i> ₂	132850 m	10 4	24,50 » »				
	1°29'58" ⁷⁷	0,013 0	31,91 » »				

Il valore $F(x_1, x_2, h)$ è tabulato per ogni zona in funzione di h . Per mezzo delle tavole fondamentali e della espressione [1] è possibile ottenere oltre che il valore della riduzione topografica, anche quello della riduzione isostatica secondo tutti i criteri fin qui escogitati dagli studiosi per schematizzare la compensazione locale delle masse topografiche, basta entrare nelle tavole con opportuni valori di h_1 e h_2 .

Praticamente gli operatori per ridurre un poco il lavoro, usano tavole e schemi meno generali, ma più semplici; e così per la riduzione topografica si usa la formula di Bullard (*)

$$g = -1,118 \cdot H_s + B + C \quad [1']$$

che dà la correzione (in unità di 0,1 mgal) da apportare alla gravità. Il primo addendo è la correzione di Bouguer vera e propria; il secondo « B », è dovuto alla curvatura della Terra; il terzo « C » è la «*geländerreduktion*» corrispondente alla massa o al difetto di massa tra l'altezza della stazione e del terreno. B e C sono opportunamente tabulati.

Ultimamente P. Lejay nel suo libro «*Développements modernes de la Gravimétrie*» (6), suggerisce un nuovo metodo in cui i 2 primi termini sono tabulati insieme come attrazione di una calotta sferica con polo nella stazione, di spessore H_s ed estesa fino alla zona O_s .

Sia nella formula generale di Cassinis, sia in quelle abbreviate di Bullard-Lejay, ha importanza nella riduzione topografica il valore $h_1 = H - H_s$, cioè differenza di quota fra il compartimento e la stazione; è infatti con questo valore che bisogna entrare nelle tavole.

Ammesso di conoscere con sufficiente esattezza H_s , quota della stazione, cerchiamo che influenza ha un'errata valutazione di H , sulle riduzioni. Per le zone più interne è comodo modificare la domanda, come fa P. Lejay nel già citato suo libro, e cioè: «con quale precisione dobbiamo misurare H per ottenere una data precisione nella riduzione». Dalle tavole di Cassinis su cui sono già segnate le differenze prime ΔF per un dato intervallo i di h , per mezzo della formula

$$\Delta F < \frac{i}{2,67 \Delta h} 10^{-4} \text{ gal } 2,67 = \text{densità media della crosta}$$

si ricavano i valori limite di h , entro i quali un errore Δh prefissato, commesso nella valutazione della quota della zona, porta un

errore inferiore al decimo di milligal sulla correzione topografica. Nel grafico di fig. 1 vengono riportate in ascissa la lunghezza del raggio medio di ogni zona e in ordinata i valori limiti di h ricavati dalla formula precedente.

In questo grafico ogni zona, definita la sua distanza e la sua quota è rappresentata da un punto e la porzione di piano entro cui questo punto va a cadere, ci dà la precisione con la quale dobbiamo misurare la quota della zona, per ottenere un valore della riduzione approssimato a meno di 0,1 mgal.

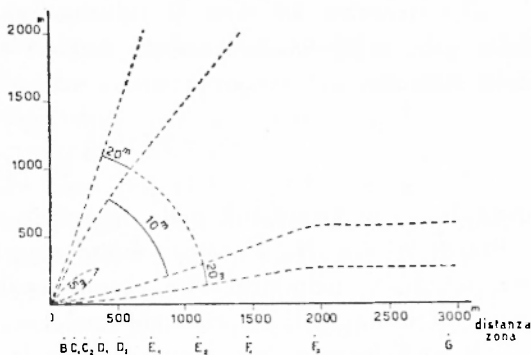


Fig. 1

A differenza di quanto fatto da P. Lejay, parve opportuno adottare un altro metodo per considerarne l'errore nelle zone più lontane. Si divisero i valori di h in 6 gruppi comprendenti i dislivelli tra — 500 e 0; 0-100; 100-500; 500-1000; 1000-2000; 2000-3000 m per ciascuno dei quali si calcolò il valore medio $\Delta F/i$ dalle differenze tabulari prese dalle tavole di Cassinis.

I valori, moltiplicati per la densità costante 2,67, danno l'errore per metro nelle riduzioni topografiche e vennero tabulati e disposti in un grafico avente per ordinate l'errore espresso in unità di 10^{-5} gal/metro e per ascisse la successione delle zone a uguale intervallo l'una dall'altra. Le curve degli errori hanno inizio dalla zona H, in cui i gruppi sono ancora ben distinti (vedi fig. 2), e vanno via via ravvicinandosi fino a confondersi intorno alla zona O_1-O_2 .

L'errore per metro rimane quasi nullo nell'intervallo fra le zone O_1 e B.

Un grafico ed una tabella analoghi ai precedenti, si ottennero calcolando l'errore per metro in compartimenti oceanici, tenendo conto di una opportuna inversione dei limiti nella [1], ed inoltre che la densità del compartimento oceanico è $\delta = -1,64$. Per le curve degli errori, in compartimenti oceanici, vedi fig. 3.

La discussione sugli errori nelle riduzioni isostatiche è resa molto più semplice dal fatto che le correzioni sono sensibilmente propor-

zionali alle quote delle zone. Questo vale unicamente per quanto riguarda il tipo di riduzione isostatica detta di Hayford.

Nel caso dei tipi di riduzioni secondo Heiskanen e Vening Meinesz la proporzionalità non è più molto stretta, tuttavia le conclusioni a cui si giunge per quel caso valgono anche per questi.

Caratteristica del tipo di riduzione di Hayford è che l'altezza della zona influenza unicamente la densità di compensazione data dalla formula

$$\delta_c = 2,71063 \frac{H}{H_c - H} \quad [2]$$

dove H_c è la profondità della superficie di compensazione, da noi scelta di 96 km. H_c è sempre molto maggiore di H e perciò le variazioni di δ_c sono pressoché proporzionali alla variazione di H a meno di unità della 7^a cifra decimale.

Il coefficiente di proporzionalità fra la densità di compensazione e la correzione, costante in ciascuna zona, è funzione unicamente della profondità di compensazione e anche in minima parte di H .

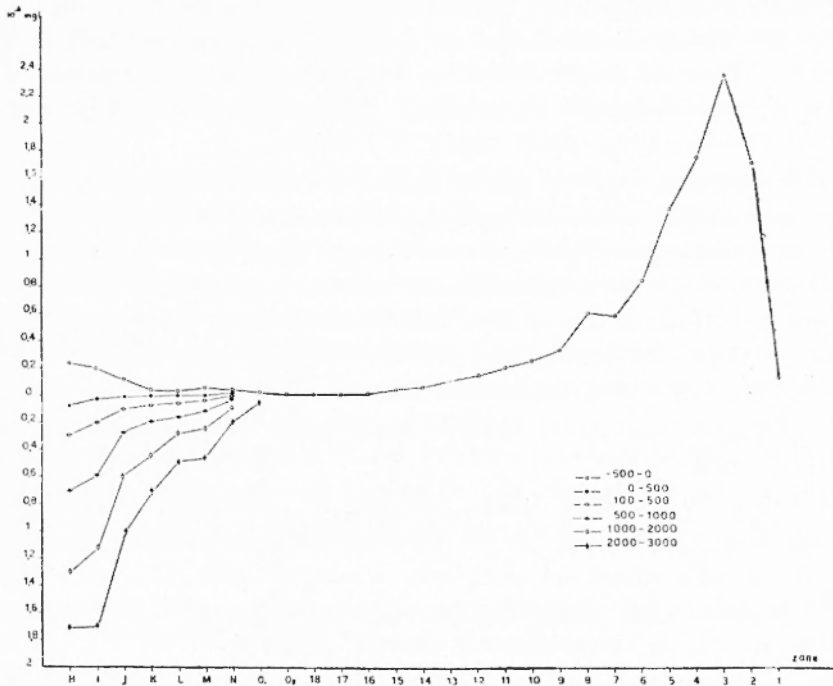


Fig. 2

La fig. 4 dà una visione d'insieme dell'andamento degli errori.

L'errore nella correzione isostatica in zone oceaniche è proporzionale anch'esso agli errori di H e le costanti, a meno di piccole variazioni, sono simili a quelle delle zone continentali moltiplicate per 0.614, rapporto fra la densità della Terra e la differenza $\delta_t - \delta_m$ fra la terra e il mare.

La fig. 5 riporta per le zone dalla H alla 1 la somma degli errori per metro nella riduzione isostatico-topografica per zone continentali, sempre ammettendo come densità il valore 2.67.

Si nota subito che le influenze delle riduzioni sono nettamente ripartite fra le zone. Nelle zone più vicine alla stazione influisce soprattutto la riduzione topografica, mentre nelle zone intermedie dalla 1 alla 10 prevale l'errore dovuto alla riduzione isostatica.

E' notevole il fatto che il massimo spiccatissimo che si nota nella zona M per la riduzione isostatica, non si sposta cambiando la profondità di compensazione o adottando altri criteri di riduzione: pur variando in ampiezza il massimo rimane costantemente nella zona M (escluso il caso di gradi di regionalità molto forte). Si è pensato allora di studiare l'andamento del rapporto tra l'area della zona e il quadrato del raggio medio. Ne è risultato un grafico che riportiamo in fig. 6, e che presenta nettissima una punta, esattamente in corrispondenza della zona M . Ciò sta a dimostrare che il massimo dell'errore nella correzione isostatica in quella zona è dovuto alla eccessiva larghezza della zona M .

II. — Nello schema di Hayford il modo come si deve ricavare dalle carte il valore della quota media di ciascun compartimento viene lasciato all'arbitrio dell'operatore.

In generale gli autori consultati, nell'espore il procedimento seguito, le carte usate, ecc. si limitano a dire di aver « valutato » la quota media dei compartimenti senza più dettagliati ragguagli.

Uno dei criteri più comuni, forse perché anche più semplice, è quello di assumere come quota media di un compartimento la media fra la quota più alta e la quota più bassa entro il compartimento. Questo metodo suppone che l'andamento delle quote sia in media lineare, tra la massima e la minima. Ciò può essere ritenuto vero se si prendono piccole porzioni di topografia. Se invece ci si riferisce ad aree già piuttosto vaste, le caratteristiche orografiche seguono determinate leggi generali quale quella messa in luce dalle curve ipsografiche continentali, cosicché l'andamento delle quote tra il

punto di massima con quello di minima, ha sempre la concavità verso l'alto. In questo caso gli errori non hanno più i caratteri di casualità ma sono sistematici e di segno positivo. Dal lavoro iniziale di quadrettatura — che esporremo in seguito — è risultato che gli errori di valutazione della quota media, su quadrati di 2 km di lato, sono in numero maggiore di segno positivo; precisamente 180 su 250. Le determinazioni di quote medie di alcune zone (*G H I*) hanno dato risultati ancora più evidenti; su 11 prove l'errore, ricavato da opportuni confronti, in un solo caso è risultato negativo.

Si noti ora che proprio nelle zone intermedie $L - \theta_2$, in cui è

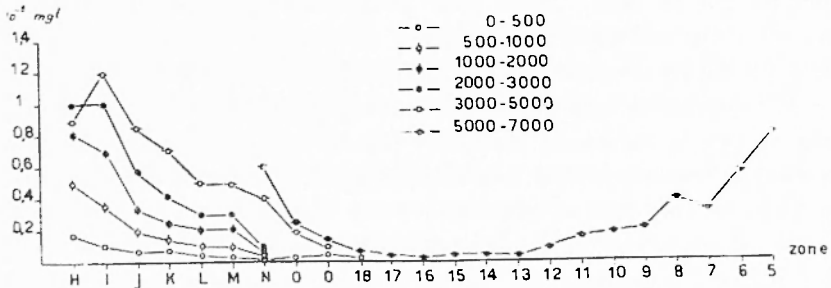


Fig. 3

posto il massimo dell'errore nelle riduzioni isostatiche, la sistematicità nell'errore di valutazione della quota è molto spiccata e gli errori possono raggiungere entità assai notevoli.

Sono queste le zone più critiche nelle riduzioni.

Un'altra notevole conseguenza riguarda i compartimenti marini. Per la riduzione isostatica di compartimenti oceanici e continentali, un errore del medesimo segno nella valutazione rispettivamente delle profondità e delle altezze porta ad errori di segno opposto nella correzione. Ma come è ben visibile dall'andamento della curva ipsografica per gli oceani, la concavità è rivolta verso l'alto e valutando le profondità col metodo della media fra massimo e minimo, si commette sempre un errore negativo. Cosicché l'errore nella riduzione risulta dello stesso segno e va a sommarsi a quelli commessi in compartimenti terrestri.

Quanto fin qui visto giustifica pienamente i tentativi di ricercare un metodo migliore per la determinazione delle altezze medie nelle zone di Hayford, che oltre ad una precisione maggiore offra una garanzia di uniformità per tutte le stazioni e tutti gli autori.

D'altra parte si richiede che il metodo nuovo non complichì eccessivamente i calcoli.

Nel già citato suo libro, P. Lejay suggerisce a questo proposito un nuovo sistema. «Potrà essere utile — così scrive P. Lejay — dividere una carta a scala media, a 1:200 000 per esempio, in regioni elementari di qualche minuto d'arco di lato e valutare la quota media di ciascuna di queste regioni. Rappresentando le zone alla medesima scala con delle corone tracciate su di un foglio di carta lu-

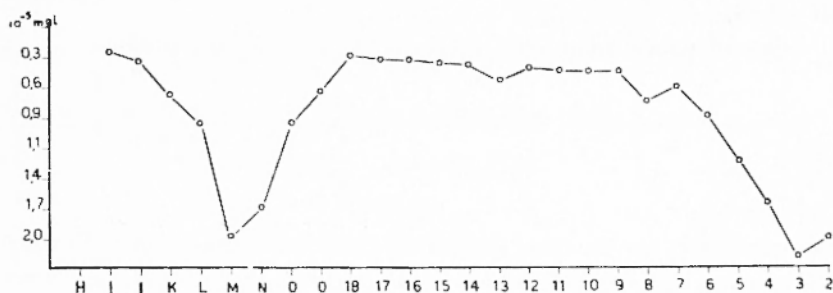


Fig. 4

cida, si potrà allora rapidamente valutare la loro quota media, leggendo, attraverso la carta, tutti i valori che scritti sulla carta cadono entro la zona, e prendendone la media. Per le zone da *M* a *O*, si riporteranno le altezze medie di regioni di lato 4 o 5 volte più grande, su una carta a più piccola scala, a 1:1 000 000 per esempio, e si farà la medesima operazione».

Seguendo questo indirizzo schematico si eseguirono alcune prove onde verificare l'utilità del metodo e la sua applicabilità. Furono variate però le scale e per la carta fondamentale fu scelta quella a scala 1:25 000 dell'Istituto Geografico Militare. Come reticolato ne venne scelto uno di tipo geometrico piano con 2 cm di lato. Come carta derivata fu costruita quella in scala 2:100 000 con maglie di 2 cm di lato, ottenuta dalle carte 25 000 facendo la media su 16 quadretti.

La valutazione delle quote medie delle singole maglie a scala 1:25 000 venne fatta come media fra massimo e minimo, giacché la esiguità dell'area (0.25 km^2) permetteva di supporre in media soddisfacente l'ipotesi della linearità dell'andamento della topografia. La valutazione delle quote medie dei compartimenti in cui viene divisa la zona secondo il classico criterio di Hayford, venne fatta per mezzo di quadretti o porzioni di quadretti (valutate ad occhio),

compresi entro i limiti delle zone e dei compartimenti. Naturalmente la determinazione delle quote di un compartimento sulla carta a scala 1:25 000 è la più precisa e perciò venne presa come base di riferimento per il computo degli errori che si commettono negli altri casi. Si confrontarono quindi di ogni compartimento delle varie zone, la quota media ricavata dalle carte al 25 000, colla quota media dalle carte al 100 000, e col valore ottenuto usando il metodo consueto della media fra la massima e minima quota e se ne calcolarono gli scarti.

Queste prove sono state eseguite su due regioni diverse: quella

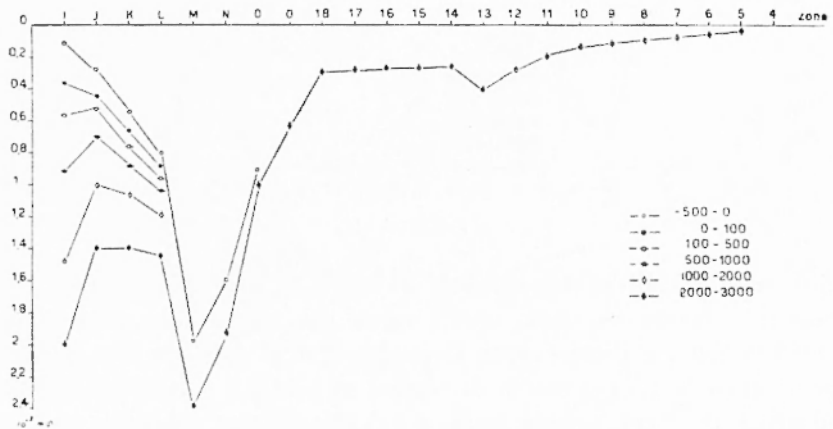


Fig. 5

del Passo della Futa (foglio 98) con dislivelli poco accentuati e uniformemente ondulata e quella di Rovereto (foglio 36) con dislivelli accentuatissimi (1900 m) e andamento topografico caratteristico.

Gli errori si mantengono in valore assoluto, presso a poco della medesima grandezza.

Più evidente invece si manifesta il beneficio se si esegue la valutazione delle quote medie per le intere zone prescindendo dalle loro divisioni in compartimenti. Le prove eseguite furono 14: 7 per la zona *G*, 5 per la zona *H* e 2 per la *I*; la Tabella II dà i risultati ottenuti. Oltre una sensibile diminuzione degli errori, il calcolo della quota media viene effettuato in modo molto semplice con un notevole risparmio di tempo; gli errori residui rimangono però in alcuni casi assai notevoli e non del tutto trascurabili. Questo errore residuo è dovuto alla influenza esercitata sulla zona anche dalla to-

TABELLA II

	C			H			I		
	1/100000	Max min	Curve	1/100000	Max min	Curve	1/100000	Max min	Curve
Passo della Futa	+ 9		+ 4	- 9		+ 2	+ 4		+ 7
Rovereto I	+ 11	+ 33	+ 16	+ 7	45	- 6	+ 1	46	- 7
II	- 33	+ 5	+ 4	+ 5	38	0			
III	+ 41	+ 20	- 2						
IV	- 19	- 7	+ 4	+ 23	15	3			
V	- 17	+ 28	- 1	+ 30	52	6			
Roncone	+ 31	+ 18	- 17						

pografia che, esterna ad essa, è interna però ad un quadretto della carta concatenato con la zona. Tale errore che noi chiameremo « errore di concatenamento », è funzione del dislivello che esiste fra due zone consecutive e del rapporto α fra l'area esterna alla zona appartenente a quadretti concatenati con essa e l'area della zona stessa. A sua volta α è funzione dei raggi limitanti la zona, della scala e del lato del reticolato.

Sia k il numero intero seguente $R/L + 1/2$ ove R è uno dei raggi della zona ed L il lato del reticolato;

$$n = 4(2k - 1)$$

è il numero dei quadretti concatenati con la circonferenza. Questo numero non tiene conto dei casi in cui la circonferenza passa per un nodo della maglia. Seguendo un ragionamento statistico, il numero di questi casi è

$$n' = \frac{2\pi R}{L^2} \eta$$

η viene definito come il raggio di una circonferenza, con centro nel nudo, tale che se la circonferenza limite della zona la attraversa, si considera quel nodo come tagliato dalla zona. Posto $\eta/L = \epsilon$ il numero dei quadretti concatenati è

$$N = 4(2k - 1) - 2\pi \frac{R\epsilon}{L}$$

perciò $NL^2 = a$ area quadrati concatenati; supponendo che in media

l'area delle maglie sia tagliata a metà dalla circonferenza, il rapporto α è

$$\alpha = \frac{N_1 + N_2}{2} L^2 \frac{1}{A}$$

dove A è l'area della zona e N_1 e N_2 si riferiscono rispettivamente al cerchio interno e al cerchio esterno.

Ricordando che $R=rs$ ove s è la scala e r il raggio effettivo della zona e posto $\varepsilon=0,1$, si ha:

$$\alpha = \frac{-2L^2 + 3,7(r_1 + r_2)L}{\pi(r_2^2 - r_1^2)s} \quad [3]$$

Posto $L=2$ cm. viene tabulato il valore di α per ogni zona in funzione della scala.

TABELLA III

Zona	$\frac{1}{25000}$	$\frac{1}{50000}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{200000}$	$\frac{1}{300000}$	$\frac{1}{400000}$	$\frac{1}{500000}$	$\frac{1}{800000}$
<i>G</i>	0,42	0,77	1,52					
<i>H</i>	0,33	0,63	1,20					
<i>I</i>	0,18	0,35	0,67	1,20				
<i>J</i>	0,15	0,27	0,54	1,03				
<i>K</i>	0,09	0,17	0,35	0,67	1,20			
<i>L</i>	0,05	0,11	0,22	0,43	0,67	0,85	1,07	
<i>M</i>			0,07	0,15	0,23	0,30	0,41	0,57
<i>N</i>				0,08		0,09	0,29	0,29
<i>O₁</i>						0,28	0,31	0,55

Come si vede dalla Tabella, i casi considerati nelle nostre prove hanno un rapporto α molto notevole.

Siano date ora 3 zone consecutive. Sia Q' la quota della zona intermedia e Q'' la quota media delle 3 zone e A' e A'' le rispettive aree.

Possiamo ritenere con sufficiente approssimazione che l'andamento della quota media di una zona di area crescente fra A' e A'' sia funzione lineare dell'area stessa, e precisamente

$$Q = \frac{A(Q' - Q'') + (Q'A'' - Q''A')}{A'' - A'}$$

Questa equazione dà l'andamento della curva integrale. L'espressione

$$q = \frac{dQ}{dA} A + Q$$

dà invece la quota della topografia ai bordi della zona di area A . Integrando questa espressione lungo l'area concatenata interna alla zona e dividendo per l'area concatenata A_c si ha

$$Q_{conc.} = \frac{Q' - Q''}{A' - A''} (2A - A_c) + \frac{Q'A'' - A'Q''}{A' - A''} \quad [4]$$

che ci dà la quota media della porzione di quadretti concatenati interna alla zona. L'errore E nella valutazione della quota sarà dato dalla differenza fra la quota al bordo della zona (uguale alla quota media dei quadretti concatenati) e la $Q_{conc.}$, moltiplicata per il rapporto A_c/A' .

$$E = \frac{Q' - Q''}{A' - A''} A' \alpha^2$$

Se poi teniamo conto che Q' rappresenta la quota vera della zona mentre quella determinata sperimentalmente è errata, cioè

$$Q''' = Q' + E$$

ove Q''' è la quota misurata della zona, sostituendo nell'espressione [4] e ricavando E si ottiene

$$E' = \frac{Q''' - Q''}{-A'' + A'(1 + \alpha^2)} A' \alpha^2 \quad [4']$$

Naturalmente queste relazioni ci permettono di prevedere unicamente l'ordine di grandezza degli errori, e non già il loro esatto ammontare; sono infatti assai grossolane e semplificative le ipotesi adottate. Dalla [4] e [4'] si vede che l'errore è proporzionale al quadrato di α , perciò per ridurre gli errori non abbiamo altra via che ridurre i valori del rapporto α , sia riducendo il lato del quadrato, sia aumentando contemporaneamente la scala delle carte. Ciò porta a rendere assai più laborioso il lavoro di computo delle altezze medie, implicando la somma di un numero ingente di valori. Potrebbe sembrare a prima vista possibile una compensazione degli errori E di zona in zona: ciò non è possibile. Infatti E ha sempre segno contrario alla differenza $Q' - Q''$, la quale caratterizza l'andamento della quota media dalla zona più interna alla più esterna.

Se ora questo andamento per un dato intervallo di zone è sempre il medesimo. l'errore sulla quota e l'errore sulla correzione saranno sistematici. Ora, l'analisi di parecchi casi pratici ha rivelato che proprio nell'intervallo di zone, per le quali è utile usare le carte quadrettate, si ha quasi sempre un andamento uniforme delle quote.



Fig. 6

Prove eseguite su due stazioni già ridotte della rete gravimetrica italiana usando la formula [4] e valori di α ricavati sperimentalmente portano ad errori di concatenamento assai notevoli.

Il metodo delle carte quadrettate, suggerito da P. Lejay è utile, partendo da un'unica carta fondamentale a scala molto grande, unicamente fino alla zona O_2 , compresa cioè ad una distanza di circa 160 km dalla stazione. Entro questa distanza sono però comprese le zone di massimo errore sulla riduzione topografica ed isostatica.

Per le zone numerate, in cui l'errore per metro va man mano diminuendo, è opportuno usare criteri più speditivi ma sufficientemente approssimati.

Si noti a questo proposito che le riduzioni topografiche e isostatiche non hanno nessun senso se applicate ad un'unica stazione. Se perciò la rete delle stazioni è piuttosto fitta, le zone esterne di stazioni vicine si sovrappongono per buona parte. Può essere utile

perciò adottare uno schema ormai in uso presso la Scuola di Helsinki e usato inizialmente da Bullard (2); cioè scegliere, sulla rete delle stazioni, alcune di queste a distanze presso a poco uniformi, determinare le quote medie delle zone esterne dalla 18 alla 11 di queste stazioni e ricavare i valori delle quote medie delle medesime zone per le stazioni intermedie, interpolandoli fra quelli delle stazioni ridotte. La distanza fra le stazioni della rete fondamentale è bene sia tale da non superare la larghezza della zona di Hayford da ridurre, e inoltre che prese tre stazioni consecutive sulla rete, la differenza fra la quota ottenuta per la stazione intermedia e la media fra le quote per le due stazioni estreme non superi il valore dell'errore consentito a quella zona per ottenere l'approssimazione richiesta.

I valori delle quote medie delle zone per le stazioni ai nodi della rete, possono essere ottenuti da una seconda serie di carte quadrettate ricavate dalla « Carta del mondo alla scala 1:1 000 000 » e ridotte alla scala che si desidera più conveniente per l'uso, e che può essere anche abbastanza piccola, giacché l'errore di concatenamento può essere trascurato. Vedremo che questa carta avrà una notevole applicazione per la densità.

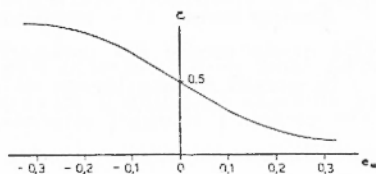


Fig. 7

Le riduzioni per le zone 10 — 1 si ottengono dalle ottime mappe di Heiskanen (1^a) che anch'esse a mezzo di interpolazioni ci danno direttamente il valore della riduzione topografico-isostatica spettante a quelle zone. I valori ricavati da queste mappe hanno l'approssimazione del mezzo milligal.

Diamo qui ora un breve cenno ad una interessante relazione venuta in luce nelle laboriose prove sulle carte quadrettate.

Sia Q_m la quota media ottenuta dai 16 quadretti della carta quadrettata 1:25 000 compresi entro un unico quadrato di 8 cm di lato, e Q la media fra la quota massima e la quota minima compresi entro il medesimo quadrato. Chiameremo e_u il rapporto fra $Q - Q_m$ e il dislivello massimo D della topografia ivi compresa, ed ε la percentuale di area del quadrato racchiudente i punti di quota maggiore di Q . Risulta che e_u è una funzione di ε . Ricavando sperimentalmente e_u ed ε per ogni quadretto e raggruppando su un grafico opportuno i punti aventi e_u come ascissa e ε come ordinata, questi

si addensano intorno ad una curva ben definita, che taglia l'asse delle ordinate nel punto $\varepsilon = 0,5$, si avvicina asintoticamente all'asse delle ascisse e alla retta $\varepsilon = 1$ e tra i punti $e_u = -0,15$ ed $e_u = +0,15$, si può considerare pressoché rettilinea. Questo tratto, che è anche il più interessante, giacché intorno ad esso si addensano il maggior numero di punti, si può rappresentare con la relazione

$$\varepsilon = 0,5 - 2 e_u \quad [5]$$

La curva che per brevità chiameremo « curva delle altezze medie », venne tracciata empiricamente sui dati di 250 punti ottenuti in diverse regioni d'Italia in modo da poter garantire l'indipendenza della curva da caratteristiche regionali della topografia.

L'errore quadratico medio complessivo della curva è di 14 m, mentre con gli errori effettivi si ottiene 70 m. Si determinò anche il coefficiente di correlazione della curva tracciata empiricamente. Esso risultò essere 0,912 dando un peso uguale ad ogni misura.

Analogamente si è applicato questo criterio alla determinazione delle quote medie dei compartimenti delle zone di Hayford.

Si eseguì questo lavoro su tutte le zone su cui si erano fatte le altre prove. I risultati ottenuti dimostrano che il metodo porta un sensibilissimo vantaggio rispetto a tutti gli altri casi. Anche le quote medie delle zone intiere ottenute come medie delle quote dei compartimenti, sono sensibilmente più esatte. Gli errori sono elencati nell'ultima colonna — « curve » — della Tabella II.

Si noti però che questo metodo pur portando a sensibili miglioramenti, senza complicare se non di poco il lavoro, ha il grave difetto di essere strettamente legato alle carte al 25 000 e perciò usabile con reale vantaggio solo per quelle zone più interne che a quella scala non hanno dimensioni esagerate.

III. — La seconda fonte di errore quanto a importanza nelle riduzioni topografico-isostatiche dei valori della gravità, è dovuta alla scelta della densità da attribuire alle masse topografiche superficiali. In generale tutti gli autori adottano un valore unico della densità su tutta la terra evitando il laborioso lavoro di determinare zona per zona la densità media da attribuire alle masse.

E' bene far notare però che questo criterio conduce ad errori di entità non trascurabile. Soprattutto per il fatto che il valore di 2,67 da tutti universalmente usato per densità media delle masse topografiche non risponde sempre bene allo scopo. Esso è molto pros-

simo al valore di 2.79 attribuito dai geochimici (*) alla crosta terrestre, considerata questa profonda oltre 15 km e composta in stragrande prevalenza (95%) di rocce ignee. In superficie, invece, gli scarti sono molto notevoli, soprattutto nelle zone di origine alluvionale dove la densità può variare tra 1.2÷2.1; e solo in presenza di rocce compatte, la densità superficiale, può raggiungere e superare il valore accettato di 2.67 (*).

La formula [1] ci mostra chiaramente che ogni errore nella densità δ si ripercuote proporzionalmente sulla correzione; identicamente negli schemi ridotti di Bullard e di Lejay. Cosicché se noi riteniamo errata la densità di un certo $\Delta\delta$ entro un determinato raggio dalla stazione, non abbiamo che da moltiplicare per $\Delta\delta/\delta$ il valore della riduzione topografica di tutte le zone comprese entro quel raggio, per ottenere l'errore commesso nella riduzione di quelle zone. Naturalmente però questo errore sarà notevole per zone vicine. Paavo Holopainen (7) ha mostrato che l'errore è sensibile nel raggio di 10 km dalla stazione.

L'errore nella densità ha però una notevole importanza anche nelle riduzioni isostatiche. Infatti, sia nella formula di Cassinis per la riduzione di Hayford

$$\delta_c = \delta_\tau \frac{H}{H_c - H} (1 - \gamma \dots)$$

sia in quella di Heiskanen per la riduzione Airy (12)

$$\tau = \frac{\delta_\tau}{\delta_m - \delta'_\tau} H (1 + \dots)$$

che danno rispettivamente la densità di compensazione e lo spessore dello strato compensante, il termine δ_τ rappresenta la densità superficiale, cioè di quella massa di materia che sta tra la superficie del geode e la superficie topografica; e non è già la densità di uno strato di crosta profondo fino alla superficie di compensazione. Quest'ultimo valore viene rappresentato nella formula di Heiskanen dal simbolo δ'_τ . Naturalmente, anche in questo caso, come è evidente dalle due formule, per ottenere l'errore sulla riduzione dovuto ad

(*)	rocce ignee e metamorfiche	$\delta = 2.30 \div 3.55$
	» sedimentarie compatte (calcarei)	» 2.20 ÷ 2.90
	» sedimentarie coerenti	» 1.65 ÷ 2.60
	» elastiche	» 1.2 ÷ 2.10

Questi valori limite per le rocce vanno presi in scala regionale.

un errore $\Delta\delta$ sulla densità, basta moltiplicare per il rapporto $\Delta\delta/\delta$.

I due errori, quello dovuto alla riduzione topografica e quello dovuto alla isostatica, sono di segno opposto; si ottiene così una parziale compensazione nella somma che ci dà l'errore totale su tutte le zone.

Ciò nonostante l'errore residuo rimane, a volte, notevole; p. es., in Val Padana ove $\Delta\delta$ è circa 0,5, gr/cm³ l'ammontare dell'errore totale è di 2 milligal e mezzo.

Onde evitare scarti così notevoli ci si può regolare in questo modo: sulla seconda serie delle carte quadrettate ricavate dalla carta del mondo 1:1 000 000 raggruppare i quadretti con opportune colorazioni, a seconda della densità che da attento esame della carta e sulla scorta dei dati geologici e geochimici sembra più opportuno si debba attribuire a quella determinata regione. Sovrapponendo a queste carte il lucido rappresentante le zone dalla 18 in poi per la determinazione delle quote medie, si può ricavare dalla carta stessa il valore più opportuno della densità da attribuirsi alla parte di topografia compresa entro il limite interno della zona 18. Naturalmente, questa carta quadrettata a scala 1:1 000 000 o più, con indicazione di densità, deve essere usata identicamente da tutti gli operatori per raggiungere l'omogeneità di riduzione tanto auspicata.

E' da notarsi però che per ottenere la correzione di densità, nel caso della riduzione secondo Hayford, basta moltiplicare per $\Delta\delta/2,67$ il valore della riduzione totale di tutte le zone letterate, mentre nella riduzione tipo Airy, bisogna moltiplicare per quel rapporto l'altezza della zona prima di entrare con quella nelle tavole di Heiskanen; così facendo commettiamo un errore che però è di piccola entità.

IV. — Oltre alla valutazione delle masse topografiche e alla densità, la terza causa di errore è dovuta allo schema che si è adottato per eseguire le riduzioni e cioè la divisione in zone ad altezza media uniforme.

Ci si domanda ora se sostituire una sommatoria ad un integrale continuo e spianare le zone senza alterarne la massa totale, ma provocando notevoli spostamenti di questa, non provochi sulla correzione errori notevoli.

Gli errori sono evidentemente di due tipi: 1) quello dovuto a spostamenti di masse lungo il raggio; 2) quello dovuto allo spostamento di masse lungo circonferenze con centro nella stazione.

Per studiare questi errori conviene schematizzare l'andamento della topografia entro la zona. P. Lejay (²), p. es., per studiare il primo tipo di errore considera una zona la cui metà più interna è all'altezza della stazione e l'altra metà ad altezza h sulla stazione. Partendo dalla formola che dà l'attrazione di zone cilindriche — zone prossime alla stazione — si ottiene l'errore che si commette considerando la zona con massa uniformemente distribuita anziché concentrata nella sola semizona più esterna.

$$\Delta F = k\delta \left(\frac{1}{40} - \frac{81}{3810} \right) \frac{h^2}{d}$$

dove d è il raggio medio della zona. L'errore relativo sarà

$$\frac{\Delta F}{F} = 0,16.$$

L'errore che si commette è perciò circa la sesta parte della correzione esatta calcolata. Errore notevolissimo che aumenta poi ancora se si considera invertita la distribuzione delle masse. Naturalmente questa relazione non vale più quando incomincia ad avere notevole influsso la curvatura della terra. D'altra parte oltre un certo limite la correzione topografica diviene così piccola da essere del tutto insignificante l'errore.

Nel caso isostatico il problema si fa più complesso. Si ricordi che nel tipo di riduzione secondo Hayford, la correzione dipende dall'altezza del compartimento unicamente attraverso la densità di compensazione che a sua volta è pressoché proporzionale ad H , e precisamente:

$$\delta_c = H, 27,10^{-6}$$

Partendo da una formola approssimata di Cassinis (³) e supponendo per H un andamento iperbolico

$$H = \frac{k}{x}$$

si ha per l'errore l'espressione

$$\Delta F = D \left[-10,65,10^{-5} x_1 x_2 \left(\frac{\ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{2}{x_1 + x_2} \right) - \right. \\ \left. - 2,10^{-7} \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} \right]$$

D è il dislivello tra i 2 bordi della zona.

Questa espressione vale solamente con buona approssimazione per le zone dalla 18 in poi, tuttavia ci permette di ricavare l'ordine di grandezza dell'errore anche per le zone un po' più interne. Per esempio è interessante ricavare ΔF per la zona M di cui abbiamo già per altra via notato la notevole estensione; esso è

$$\Delta F = -5,6 \cdot 10^{-6} D$$

Il che significa che per un dislivello di 100 m si commette un errore di circa mezzo milligal. Dalla zona 17 in poi gli errori sono sempre molto piccoli sì da essere giustificato il raggruppamento 2 a 2 delle zone come fa Holopainen (2) nel già citato suo lavoro.

Per quel che riguarda il secondo tipo di errore derivante dal trascurare la distribuzione angolare delle masse, si noti subito che esso è sistematico; l'azione di due masse di altezze differenti sarà sempre più grande dell'azione della massa di altezza media. Malgrado questo carattere di sistematicità, gli errori commessi sono piccoli se si segue il classico metodo di Hayford di dividere la zona in compartimenti e calcolare la riduzione compartimento per compartimento. Ma, come già visto, l'adozione del metodo delle carte quadrettate porta a reali vantaggi di comodità e di precisione solo se adoperato per determinare la quota media dell'intera zona prescindendo dalla sua divisione in compartimenti; vogliamo perciò studiare ora il comportamento di questo errore sulla zona intera.

Si noti che nella riduzione isostatica le correzioni sono con buona approssimazione proporzionali alle altezze, perciò gli errori si compensano completamente prendendo la media delle altezze dei compartimenti in una zona; resta perciò solo da considerare la riduzione topografica, notevole unicamente nelle zone più prossime alla stazione entro un raggio non inferiore a qualche decina di chilometri, fino alla zona J .

Partendo ancora dalla già nota formula che dà la attrazione di una zona cilindrica, si può ottenere una espressione dell'errore commesso trascurando la distribuzione angolare delle masse e supponendo che queste abbiano andamento lineare tra la massima e la minima quota poste in punti diametralmente opposti, in funzione del dislivello massimo D entro la zona e del rapporto $\eta = H_0/D$ fra l'altezza H_0 della stazione sul punto più basso della zona e il dislivello D :

$$\Delta F = 2k\delta \left[\int_0^\pi \left(\sqrt{d_2^2 + \left(H_s - \frac{D\eta}{\pi}\right)^2} - \sqrt{d_1^2 + \left(H_s - \frac{D\eta}{\pi}\right)^2} \right) d\eta - \right. \\ \left. - \pi \left(\sqrt{d_2^2 - \left(H_s - \frac{D}{2}\right)^2} - \sqrt{d_1^2 - \left(H_s - \frac{D}{2}\right)^2} \right) \right];$$

sviluppando in serie il radicale fino al secondo termine, integrando e riducendo si ottiene

$$\Delta F = k\delta\pi \left\{ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right\} \frac{D^2}{12} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d_2^3} - \frac{1}{d_1^3} \right) D^4 \left(\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta + \frac{11}{80} \right) \quad [8]$$

Si vede subito che per D piuttosto piccolo ΔF è indipendente dal rapporto η . La formula si adatta perfettamente al grafico (fig. 8) dell'errore ricavato per la zona H direttamente dalle tavole seguendo la medesima ipotesi sulla distribuzione delle masse, opportunamente schematizzata.

Si è pensato allora di usare il grafico per correggere eventualmente i valori della correzione topografica ottenuti tenendo conto della quota media su tutta la zona, ricavando direttamente dalle carte quadrettate il valore di D e quindi di η . A questo proposito si eseguirono alcune prove sfruttando il materiale di circa 200 stazioni italiane ridotte, a nostra disposizione. Le 33 prove eseguite, i cui risultati sono raccolti nella tabella n. 4, mostrarono innanzi tutto la semplicità e rapidità con cui si può apportare la correzione e inoltre come questa riduca sensibilmente l'errore limitandolo — escluso un caso — a poche unità della 5ª cifra decimale.

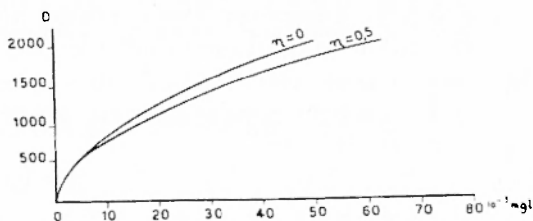


Fig. 8

I valori di ΔF devono essere ancora moltiplicati per la densità.

Conclusioni. — Dopo lo sguardo generale alla natura ed alla entità degli errori possibili nelle riduzioni isostatico-topografiche dei valori della gravità, raccogliamo ora in un prospetto generale i suggerimenti che l'analisi precedente ci offre sul modo più conveniente per precisione, omogeneità e utilità di eseguire le riduzioni. Dob-

TABELLA IV.

unità 10^{-5}

N	S	H_s	a	η	H_m	T_m	T_c	E_s	E_c	AE
517-2	Dobbiate	1234	809	-0.10	3593	-253	-215	8	9.7	1.7
525	S. Leonardo	655	1310	-0.23	1673	+112	130	18	23.0	5
512	Sarentino	970	985	-0.19	1611	-86	75	11	14.5	3.5
504	S. Valpurga	1133	1321	-0.02	1857	-142	114	28	25	+
497	Bolzano	258	995	0	751	+34	50	16	18	+2
485	Mad. Campier.	1530	1092	0.12	1965	-380	327	23	18.5	-4.5
494	Catalzo	808	804	-0.14	1304	-75	63	12	10	-2.0
491	Male	730	1140	-0.14	1550	+25	45	20	19	1
490	Cogolo	1155	1263	-0.08	2123	+71	55	16	22	6
321	Cortona	650	572	0.7	453	-73	66	7	5.5	-1.5
294	Aquila	723	565	0.3	788	-100	95	5	5	0
272	Campolasso	705	362	0.64	673	-95	92	3	2	1
200	Serra S. Bruno	800	525	0.18	938	-118	112	6	5	1
153	Mispetta	895	725	0.7	716	-145	137	8	9	+
139	Cesato	1137	425	0.9	913	-230	227	3	3	0
138	Capizzi	1093	821	0.5	1053	-231	208	13	11.4	-1.6
130	Peralta	1018	835	0.33	1065	-195	181	14	11.6	-2.4
122	Nicosia	769	290	0.8	720	-112	111	1	1	0
125	Troina	1041	318	1.2	809	-193	190	3	2	1
119	Oscery, Eneo	2913	893	1.45	2915	-1089	1075	14	13	1
115	Mila	750	1187	0.48	753	-108	70	38	23.5	14.5
114	Cantoliera	1333	1711	0.37	1709	-573	520	53	49	4
93	Assoro	629	387	1.29	504	-110	107	3	2.5	0.5
79	Castellermoti	554	500	0.65	487	-57	51	6	4	2
59	Piazza Amerina	721	262	0.55	684	-99	98	1	1	0
50	Natro	545	235	1.16	390	-52	51	1	1	0
40	Calagrone	509	266	0.88	413	-48	47	1	1	0.4
34	Bucheroni	797	316	0.73	690	-119	117	2	1.6	0.5
28	Chiarani, Gulla	677	429	0.84	555	-85	81	4	3.5	0.5
26	Ragusa	482	275	0.45	527	-47	45	2	1.5	0.5
21	Rovereto II	630	1305	0.30	814	-68	28	40	36	4
	Rovereto I	170	1100	0	689	-46	66	20	18	2
	Rovereto III	950	1260	0.60	680	-155	122	33	26	7

biamo però premettere alcune considerazioni sulla precisione che noi vogliamo ottenere in queste riduzioni. Gli errori sperimentali di osservazione sono per le moderne misure di terra contenute entro il milligal, non così quelle in mare, tuttora affette da errori assai notevoli valutabili intorno a 4÷5 mgal. Assai più grossi e certamente superiori ai 5 mgal gli errori nelle riduzioni isostatiche dovuti all'incertezza dei criteri di compensazione adottati, non tanto per quel che riguarda la profondità di compensazione o il grado di regionalità, quanto perché viene attribuito a tutti i punti della terra quel grado di regionalità e quella profondità di compensazione che risultano invece propri di quella particolare zona in studio.

La stessa densità, pur coll'accorgimento suggerito, avrà sempre una notevole influenza sull'errore a meno di complicazioni laboriosissime. Perciò ci sembra inutile spingere troppo l'approssimazione che si richiede nelle riduzioni, come fa nel suo libro P. Lejay che vorrebbe determinare la correzione per ogni zona a meno del decimo di mgal.

A noi sembra già un buon risultato poter ottenere la riduzione totale con un errore medio di 3 mgal. Se consentiamo sia di un milligal l'errore dovuto alla densità, e un altro milligal lo attribuiamo agli errori commessi con la schematizzazione, e usiamo per le zone dalla 10 in poi le mappe di Heiskanen che permettono l'approssimazione del mezzo mgal, possiamo porre

$$\eta_{\text{tot}} = 3 \text{ mgal} = \sqrt{1 + 1 + 0,25 + n \varepsilon^2}$$

dove ε è l'errore medio per zona ed n è il numero delle zone. Giacché i massimi degli errori nelle due riduzioni non si sovrappongono, possiamo essere sicuri che se per una riduzione si è entro l'errore medio previsto, sicuramente per l'altra l'errore sarà di gran lunga inferiore, perciò possiamo prendere $n=28$, numero totale delle zone in considerazione. Si ricava da qui:

$$\varepsilon = 0,49 \text{ mgal}$$

Se perciò si prende come errore medio per ogni zona 0,4 mgal, si può presumere di essere quasi sicuramente entro l'approssimazione voluta.

Dalle curve degli errori possiamo perciò, noto ε , ricavare il massimo di errore consentito nella valutazione della quota e da qui risalire al criterio più opportuno per determinarla. Nel quadro rias-

suntivo che segue, diamo per ogni zona i criteri generali da seguire per ottenere questa approssimazione.

Ci è grato esprimere la nostra gratitudine alla dott. Bianca Radica che ci aiutò efficacemente nel lavoro di quadrettatura e nelle determinazioni delle quote medie delle zone.

*Centro Studi sulla gravimetria e l'isostasia del C. N. R.
Politecnico di Milano — Giugno 1948.*

RIASSUNTO

Si studiano quantitativamente gli errori che affettano le riduzioni topografiche ed isostatiche dei valori della gravità e se ne ricercano le cause. Si analizzano alcuni procedimenti atti ad eliminare alcune delle cause di errore, con particolare riguardo alla loro possibilità pratica di applicazione, e infine si propone uno schema generale ed uniforme da seguire nei computi, che permette di ottenere i valori delle riduzioni con errori inferiori a 3 mgal.

BIBLIOGRAFIA

(¹) COSTER H. P.: *The gravity field of the Western and Central Mediterranean* - Groningen, 1945.

(²) HOLOPAINEN PAAVO E.: *On the gravity field and the isostatic structure of the Earth crust in the East Alps* - Ann. Acc. Scient. Fennicae, ser. A, III, Geol. Geograf. 12, Helsinki, 1917.

(³) TANNI L.: *On the isostatic structure of the Earth's crust in the Carpathian countries and the related phenomena* - Ann. Accad. Scient. Fennicae, ser. III, A. Geol. Geograf. 4, Helsinki, 1912.

(⁴) CASSINIS G. e DORE P.: *Le tavole fondamentali per la riduzione dei valori osservati della gravità* - Boll. del Comitato per la Geodesia e la Geofisica del C.N.R. serie II, A, IV, n. 1-2, 3-4, 1034.

(⁵) BULLARD E. C.: *Gravity measurements in East Africa* - Phil. Trans. R.S.L. serie A., n. 757, vol. 235.

(⁶) LEJAY P.: *Developpements modernes de la Gravimétrie* - Gauthier-Villars, Paris, 1917.

(⁷) CLARK e WASHINGTON: U. S. Geological Survey - P. Paper n. 127, 1921.

(⁸) CASSINIS G.: *Sull'applicazione del metodo isostatico alla riduzione delle misure di gravità* - Mem. Soc. Ital. delle Scienze, serie III, tomo XVII, pag. 117, 1912.

(⁹) CASSINIS G., DORE P., BALLARIN S.: *Tavole fondamentali per la riduzione dei valori osservati della gravità* - Pubbl. della Commissione Geodetica Italiana - Nuova serie, n. 13, 1937.

(¹⁰) HILSKANEN W. - NUORO: *Topographic - Isostatic world maps of the effect of the Hayford zones 10, 9, 8 and 7 to 1* - Ann. Accad. Scient. Fenn. Ser. A, tomo LI, n. 011.

Zona		Densità
A B C ₁ C ₂ D ₁ D ₂ E ₁ E ₂	Queste zone hanno grande importanza nelle riduzioni topografiche ma per lo più esse sono alla stessa quota — o poco diversa — della stazione. Le zone devono essere divise in compartimenti e la correzione computata singolarmente solamente nei casi di dislivelli notevoli. Per rilevare la quota media si deve usare la carta a scala maggiore disponibile.	Zone di scarsa importanza nella riduzione isostatica. Si raggruppano in una sola zona.
F ₁ F ₂ G	Quote ottenute dalla carta topografica compartimento per compartimento eventualmente corretta per mezzo della curva degli errori. Riduzione effettuata compartimento per compartimento.	
H	Carte quadrettate — 2 cm di lato — scala 1:50000 correzione per distribuzione angolare formula (8).	
I	Carte quadrett. - I serie - 2 cm - scala 1:100000 - Correz.	
J	» » » » » » » 1:100000 - »	
K	» » » » » » » 1:200000 - »	
L	» » » » » » » 1:200000 non è più necessaria la correzione per distribuzione angolare	
M	» » » » » » » 1:300000	
N	» » » » » » » 1:300000	
O ₁ O ₂	» » » » » » » 1:300000	
18	Si usano carte quadrettate seconda serie derivate dalla carta del mondo 1:1000000 : 2 cm lato - scala 1:1000000.	Zone di massima importanza nella riduzione isostatica.
17	Carte quadrett. - II serie - 2 cm - scala 1:1000000	
16	» » » » » » » 1:2000000	
15	» » » » » » » 1:2000000	
14	» » » » » » » 1:1000000	
13	» » » » » » » 1:1000000	
12	» » » » » » » 1:3000000	
11	» » » » » » » 1:3000000	
10	Correzione ricavata dalle mappe di Heiskanen	
9	» » » » » » »	
8	» » » » » » »	
7		Convieni raggruppare queste zone a due a due. Si noti che nelle tabelle speciali di riduzione isostatica per queste zone è dato il valore complessivo della riduzione isostatica e topografica. Quest'ultima è infatti piccolissima.
6		
5		
4	» » » » » » »	
3		
2		
1		
		Queste zone agli antipodi sono raggruppate in una sola zona.

Densità per le 2 riduzioni ricavate dalle carte scala 1:1000000 seconda serie

Densità = 2.67